Vol.2009-AL-124 No.6
2009/5/11

# Cayley グラフの逐次診断可能次数の下界

山田　敏規[†1]

小文では，すでに知られている CCC の逐次診断可能次数の下界を求める手法を一般化して，任意の $N$ 点 Cayley グラフの逐次診断可能次数が $\Omega(N/D)$ であることを示す．ここで，$D$ は Cayley グラフの直径である．また，本結果を $N$ 点スターグラフと Wrapped Butterfly へ適用することによって，逐次診断可能次数がそれぞれ $\Omega(N \log\log N/\log N)$ と $\Omega(N/\log N)$ であることを示す．

# Lower Bound for Sequential Diagnosability of Cayley Graphs

Toshinori Yamada[†1]

This paper presents that the degree of sequential diagnosability of an $N$-vertex Cayley graph is $\Omega(N/D)$ by generalizing a known technique of finding a lower bound for that of a CCC, where $D$ is the diameter of the Cayley graph. From the lower bound, it is shown that the degrees of sequential diagnosability of the $N$-vertex star graph and wrapped butterfly are $\Omega(N \log\log N/\log N)$ and $\Omega(N/\log N)$, respectively.

## 1. はじめに

近年，マルチプロセッサシステムが大規模化しているが，それにつれてシステム内の故障プロセッサの数が飛躍的に増加している．そのため，マルチプロセッサシステムに対する耐故障技術の開発が重要な課題となっている．耐故障技術には，マルチプロセッサシステム内の故障箇所をどのようにしてに見つけるかを考える故障診断と，故障を持ったマルチプロセッサシステムにおいて，正常な箇所のみを用いていかにシステムを正しく運用するかを考える耐故障設計の大きく二つに分類される．小文では後者，すなわちマルチプロセッサシステムの故障診断について考える．

マルチプロセッサシステムのシステムレベル故障診断のためのグラフ理論的な枠組みは Preparata ら [9] によって提案され，PMC モデルとして知られており，PMC モデルに基づいたマルチプロセッサシステムの故障診断に関する研究がこれまでに数多く行なわれている．PMC モデルでは，各プロセッサは正常もしくは（常時）故障のどちらか一方の状態をとり，故障の最中にこの状態が変わることはないと仮定する．また，システム内の故障プロセッサの数は制限されていると仮定する．各プロセッサは，通信リンクを介して隣接するプロセッサの検査を行ない，もし正常であると判断したならば 0 を，故障していると判断したならば 1 を出力する．ただし，正常なプロセッサが行なう検査は常に正しいが，故障しているプロセッサが行なう検査は全く信頼できないものとする．これら検査結果から成る集合をシンドロームと呼ぶ．

PMC モデルでは，故障診断のための 2 つの方法が提案され，議論されている．故障プロセッサの数が $t$ を越えないという仮定の下で，任意のシンドロームからシステム内の全ての [少なくとも 1 つの] 故障プロセッサが同定可能であるならば，システムは同時 [逐次]$t$-診断可能であると言われる．システムの同時 [逐次] 診断可能次数は，システムが同時 [逐次]$t$-診断可能であるような $t$ の最大値である．同時 $t$-診断可能であるシステムの特徴づけが Hakimi と Amin [3] によって与えられ，システムの同時診断可能次数を求める多項式時間アルゴリズムが Sullivan [11] によって示されている．一方，逐次 $t$-診断可能であるシステムの特徴づけは Xu と Huang [14] によって与えられたが，不幸なことに，システムの逐次診断可能次数を求める問題は co-NP-困難であることが Raghavan と Tripathi [10] によって証明された．

これまでに様々なシステムに対する逐次診断可能次数の評価が行われている [4–7,15]．とりわけ，$N$ 点から成る $d$ 次元平方トーラス [7,15] と CCC(cube-connected cycles) [15] の逐次診断可能次数がそれぞれ $\Theta(N^{(d-1)/d})$ と $\Theta(N/\log N)$ であることが知られている．また，$N$ 点から成るハイパーキューブの逐次診断可能次数が $\Omega(N/\sqrt{\log N})$ かつ $O(N \log\log N/\sqrt{\log N})$ であること [15]，$N$ 点から成るスターグラフの逐次診断可能次数が $\Omega(\sqrt{N \log N/\log\log N})$ であること [5][⋆1]が示されている．

†1 埼玉大学
Saitama University

⋆1 文献 [5] において，$N$ 点スターグラフの逐次診断可能次数が $\Omega(N \log\log N/\log N)$ であることを主張してい

Vol.2009-AL-124 No.6
2009/5/11

小文では，Cayley グラフに対する逐次診断可能次数について考える．Cayley グラフは Aker と Krishnamurthy [1] によって提案され，ハイパーキューブ，トーラス，CCC(cube-connected cycles), スターグラフなど，マルチプロセッサシステムの相互結合網として知られている様々なグラフが Cayley グラフであることが示されている．小文では，文献 [15] における CCC の逐次診断可能次数の下界を求める手法を一般化して，直径が $D$ であるような $N$ 点から成る Cayley グラフに対して，逐次診断可能次数が $\Omega(N/D)$ であることを示す．さらに，系として，$N$ 点スターグラフと Wrapped Butterfly の逐次診断可能次数がそれぞれ $\Omega(N \log\log N/\log N)$ と $\Omega(N/\log N)$ であることを示す．

## 2. マルチプロセッサシステムの逐次診断

マルチプロセッサシステムの相互結合網は，各プロセッサを頂点に，各通信リンクを辺に置き換えることによって，グラフで表現することが出来る．このグラフを相互結合グラフと呼ぶ．システムの検査割り当ては，各プロセッサを頂点に，各検査を有向辺に置き換えることによって，有向グラフで表現することが出来る．この有向グラフを検査割り当て有向グラフと呼ぶ．もし $\langle x, y\rangle$ が検査割り当て有向グラフの有向辺であるならば，プロセッサ $x$ はプロセッサ $y$ を検査する．検査は相互結合グラフの辺に沿って行われる．

グラフ $G$ の頂点集合と辺集合をそれぞれ $V(G)$ と $E(G)$ で表す．同様に，有向グラフ $D$ の頂点集合と有向辺集合をそれぞれ $V(G)$ と $A(G)$ で表す．グラフ $G$ の全ての辺を同じ端点を持つ双方向の有向辺に置き換えることによって得られる有向グラフを $\overrightarrow{G}$ で表す．

$D$ をシステムの検査割り当て有向グラフとする．$D$ に対するシンドロームは，以下のように定義される写像 $\sigma : A(D) \to \{0, 1\}$ である：

$$\sigma\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0 & x \text{ が } y \text{ を正常と診断したとき；} \\ 1 & x \text{ が } y \text{ を故障と診断したとき．} \end{cases}$$

ここで，$\sigma(\langle x, y\rangle)$ は簡単のために $\sigma\langle x, y\rangle$ と表現する．検査結果は，$x$ が正常であるときかつそのときに限り信頼できるものとする．集合 $F \subseteq V(G)$ は，以下の (1) と (2) のどちらも成り立たないとき，シンドローム $\sigma$ に矛盾しない故障集合と呼ぶ：

**(1)** $x \in V(D) - F$ かつ $y \in F$ に対して $\sigma\langle x, y\rangle = 0$；

**(2)** $x, y \in V(D) - F$ に対して $\sigma\langle x, y\rangle = 1$.

るが，証明に明らかな誤りがあるために本文には記載しなかった．

$D$ に対する任意のシンドローム $\sigma$ と正の整数 $t$ に対して，

$$\mathcal{F}(\sigma, t) = \{F : F \subseteq V(D) \text{ は}\sigma\text{に矛盾しない故障集合}, |F| \le t\};$$
$$\mathcal{S}_D(t) = \{\sigma : \mathcal{F}(\sigma, t) \ne \emptyset\}.$$

と定義する．任意の $\sigma \in \mathcal{S}_D(t)$ に対して

$$|\mathcal{F}(\sigma, t)| = 1 \text{ または } \bigcap\{F : F \in \mathcal{F}(\sigma, t)\} \ne \emptyset$$

であるならば，$D$ は逐次 $t$-診断可能であるという．$D$ が逐次 $t$-診断可能である最大の $t$ を $D$ に対する逐次診断可能次数と呼び，$\delta(D)$ で表す．$G$ が無向グラフであるとき，$G$ の逐次診断可能次数を $\delta(G) = \delta(\overrightarrow{G})$ と定義する．無向グラフの逐次診断可能次数について，以下の定理が知られている [7].

**定理 I** [7] $t$ を非負整数とする．$|F| = t$ を満たす任意の $F \subset V(G)$ に対して $G - F$ が $t + 1$ 個以上の点から成る連結成分を含むならば，$\overrightarrow{G}$ は逐次 $t$-診断可能である．すなわち，$\delta(G) \ge t$ である．

## 3. Cayley グラフ

$U$ を (有限) 集合とし，$\circ$ を $U$ 上の 2 項演算とする．以下の 3 つの条件を満たすとき，$\Gamma = (U, \circ)$ は (有限) 群と呼ばれる：

**結合則:** 任意の $x, y, z \in U$ に対して $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ である；

**単位元の存在:** 任意の $x \in U$ に対して $x \circ 1 = 1 \circ x = x$ であるような $1 \in U$ が存在する；

**逆元の存在:** 任意の $x \in U$ に対して，$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = 1$ であるような $x^{-1} \in U$ が存在する．

$\Gamma = (U, \circ)$ を有限群とし，$S \subseteq U$ を $U$ の生成元集合とする．このとき，Cay-D$(\Gamma, S)$ を以下のように定義される有向グラフとし，Cayley 有向グラフと呼ぶ：

$$V(\text{Cay-D}(\Gamma, S)) = U; \qquad A(\text{Cay-D}(\Gamma, S)) = \{\langle u, v\rangle : v = us \text{ for some } s \in S\}.$$

さらに，$1 \notin S$ かつ $S^{-1} = S$ であるとき，Cay$(\Gamma, S)$ を以下のように定義される (無向) グラフとし，Cayley グラフと呼ぶ：

$$V(\text{Cay}(\Gamma, S)) = U; \qquad E(\text{Cay}(\Gamma, S)) = \{(u, v) : v = us \text{ for some } s \in S\}.$$

このとき，$\overrightarrow{\text{Cay}(\Gamma, S)} = \text{Cay-D}(\Gamma, S)$ である．

$\Gamma = (U, \circ)$ を有限群とする．任意の $a \in U$ に対して，$f_a$ を $f_a(x) = a \circ x$ $(x \in U)$ とし

Vol.2009-AL-124 No.6
2009/5/11

て定義される $U$ 上の写像とする．このとき，$f_a$ は明らかに全単射であり，

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle \in A(\text{Cay-D}(\Gamma,S)) &\Leftrightarrow v = u\circ s\ (s\in S)\\ &\Leftrightarrow f_a(v) = a\circ v = a\circ(u\circ s) = (a\circ u)\circ s = f_a(u)\circ s\ (s\in S)\\ &\Leftrightarrow \langle f_a(u), f_a(v)\rangle \in A(\text{Cay-D}(\Gamma,S))\end{aligned}$$

が成立するので，$f_a$ は任意の Cayley 有向グラフ $\text{Cay-D}(\Gamma,S)$ の自己同型写像であり，したがって，Cayley グラフ $\text{Cay}(\Gamma,S)$ の自己同型写像である．

## 4. Cayley グラフの逐次診断可能次数の下界

$G$ をグラフとする．任意の 2 点 $x,y\in V(G)$ に対して，$\text{dist}_G(x,y)$ を $x$ と $y$ を結ぶ $G$ 上の最短パスの長さとする．このとき，

$$l(G) = \frac{1}{N^2}\sum_{x\in V(G)}\sum_{y\in V(G)}\text{dist}_G(x,y)$$

を $G$ の平均距離と呼ぶ．ここで，$N=|V(G)|$ である．

**定理 1** 任意の有限群 $\Gamma=(U,\circ)$ と，$1\notin S$ かつ $S^{-1}=S$ である任意の生成元集合 $S\subset U$ に対して，

$$\delta(\text{Cay}(\Gamma,S)) \geq \left\lfloor \frac{N}{l(\text{Cay}(\Gamma,S))+2}\right\rfloor$$

である．

$G$ を無向グラフとすると，$G$ の直径は

$$\text{diam}(G) = \max_{x,y\in V(G)}\text{dist}_G(x,y)$$

である．$l(G)\leq \text{diam}(G)$ であるので，定理 1 から以下の系が成り立つ．

**系 1** 任意の有限群 $\Gamma=(U,\circ)$ と，$1\notin S$ かつ $S^{-1}=S$ である任意の生成元集合 $S\subset U$ に対して，

$$\delta(\text{Cay}(\Gamma,S)) \geq \left\lfloor \frac{N}{\text{diam}(\text{Cay}(\Gamma,S))+2}\right\rfloor$$

である．

### 4.1 定理 1 の証明

表記の簡単のため，$G=\text{Cay}(\Gamma,S)$, $t=\lfloor N/(l(G)+2)\rfloor$ とする．まず，$|F|=t$ を満たす任意の $F\subset V(G)$ に対して，$G-F$ は $t+1$ 個以上の点から成る連結成分を含むことを示す．背理法のため，$|F|=t$ を満たすある $F\subset V(G)$ に対して，$G-F$ のどの連結成分も $t$ 個以下の点しか含まないと仮定する．

任意の $x,y\in V(G)$ に対して，$P\langle x,y\rangle$ を以下のように定義する：

(i) $x=1$ であるとき，$P\langle 1,y\rangle$ を 1 と $y$ を結ぶ (任意の) 最短パスとする；

(ii) $x\neq 1$ であるとき，$P\langle x,y\rangle$ を $P\langle 1,x^{-1}\circ y\rangle$ 上の各点 $z$ を $f_x(z)$ へ移すことによって得られるパスとする．$f_x$ が自己同型写像であることから，$P\langle x,y\rangle$ は $x$ と $y$ を結ぶ最短パスである．

$\mathcal{P}=\{P\langle x,y\rangle : x,y\in V(G)\}$ とし，任意の $z\in V(G)$ に対して $\mathcal{P}(z)$ を $\mathcal{P}$ に含まれる $z$ を通るパスの集合とする．

**補題 1** 任意の $z\in V(G)$ に対して $|\mathcal{P}(z)|=(l(G)+1)\cdot N$ である．

**証明：** 簡単な事実から

$$\sum_{z\in V(G)}|\mathcal{P}(z)| = \sum_{x\in V(G)}\sum_{y\in V(G)}(\text{dist}_G(x,y)+1) = (l(G)+1)\cdot N^2$$

である．また，任意の $z,z'\in V(G)$ に対して，$\mathcal{P}(z)$ に含まれるパスと $\mathcal{P}(z')$ に含まれるパスの間には写像 $f_{z'\circ z^{-1}}$ によって一対一に対応するので，$|\mathcal{P}(z)|=|\mathcal{P}(z')|$ である．したがって，任意の $z\in V(G)$ に対して

$$|\mathcal{P}(z)| = \frac{1}{N}\sum_{z'\in V(G)}|\mathcal{P}(z')| = (l(G)+1)\cdot N$$

である． □

**補題 2** $F$ の点を通らない $\mathcal{P}$ のパスの数は高々$t(N-t)$ である．

**証明：** $P\langle x,y\rangle$ が $F$ の点を通らないならば，$x$ と $y$ は $G-F$ の同じ連結成分の点でなければならない．したがって，各 $x\in V(G)-F$ に対して，$F$ を通らないのパス $P\langle x,y\rangle$ の数は高々$t$ であり，ゆえに，$F$ の点を通らない $\mathcal{P}$ のパスの数は高々$t(N-t)$ である． □

補題 1 と 2 から，

$$\begin{aligned}N^2 &= |\mathcal{P}|\\ &= (F \text{ を通る } \mathcal{P} \text{ のパスの数}) + (F \text{ を通らない } \mathcal{P} \text{ のパスの数})\\ &\leq t\cdot(l(G)+1)\cdot N + t(N-t)\\ &< t\cdot(l(G)+2)\cdot N\end{aligned}$$

ゆえに

$$t = \left\lfloor\frac{N}{l(G)+2}\right\rfloor > \frac{N}{l(G)+2}$$

であり，これは矛盾である．したがって，$|F|=t$ を満たす任意の $F\subset V(G)$ に対して，$G-F$ は $t+1$ 個以上の点から成る連結成分を含む．ゆえに，定理 I から

$$\delta(G)\geq t = \left\lfloor\frac{N}{l(G)+2}\right\rfloor$$

が得られる．

### 4.2 定理 1 の適用

#### 4.2.1 スターグラフの逐次診断可能次数

$n$-スターグラフ $S_n$ は以下のように定義されるグラフである：

$$V(S_n) = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \text{ は } \{1, 2, \ldots, n\} \text{ 上の順列 }\}$$
$$E(S_n) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \boldsymbol{y} = \mathrm{swap}_j(\boldsymbol{x}) \text{ for some } j \neq 1\}.$$

ここで，$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ であり，$\mathrm{swap}_j(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ の $x_1$ と $x_j$ を入れ替えることによって得られる順列である．任意の正の整数 $n$ に対して，$S_n$ が Cayley グラフであること，$\mathrm{diam}(S_n) = \lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$ であることが知られている [1]．したがって，系 1 より以下の系が得られる．

**系 2** 任意の正の整数 $n$ に対して $\delta(S_n) = \Omega((n-1)!)$ である．

#### 4.2.2 Wrapped Butterfly の逐次診断可能次数

$n$ 次元 Wrapped Butterfly $B_n$ は以下のように定義されるグラフである [8]：

$$\begin{aligned}
V(B_n) &= \{[\boldsymbol{x}, i] : \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n, i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}; \\
E(B_n) &= \{([\boldsymbol{x}, i], [\boldsymbol{y}, j]) : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}, j = (i \pm 1) \bmod n\} \\
&\quad \cup \{([\boldsymbol{x}, i], [\boldsymbol{y}, j]) : \boldsymbol{x} = \mathrm{ex}_i(\boldsymbol{y}), j = (i+1) \bmod n\} \\
&\quad \cup \{([\boldsymbol{x}, i], [\boldsymbol{y}, j]) : \boldsymbol{y} = \mathrm{ex}_i(\boldsymbol{x}), i = (j+1) \bmod n\}.
\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$, $\boldsymbol{y} = [y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]$ であり，$\mathrm{ex}_i(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ の $x_i$ の値を $1 - x_i$ に変えることによって得られる $\{0,1\}^n$ の要素である．任意の正の整数 $n$ に対して，$S_n$ が Cayley グラフであること，$\mathrm{diam}(B_n) = \lfloor 3n/2 \rfloor$ であることが知られている [12,13]．したがって，系 1 より以下の系が得られる．

**系 3** 任意の正の整数 $n$ に対して $\delta(B_n) = \Omega(2^n)$ である．

## 5. 擬 Cayley グラフへの拡張のための課題

$U$ を (有限) 集合とし，$\circ$ を $U$ 上の 2 項演算とする．任意の 2 つの要素 $a, b \in U$ に対して，等式 $a \circ x = b$ と $y \circ a = b$ がともに一意解を持つとき，$\Gamma = (U, \circ)$ は (有限) 擬群と呼ばれる．全ての $x \in U$ に対して $x \circ 1 = x$ であるような $1 \in U$ を $\Gamma$ の右単位元と呼ぶ．$S \subset U$ とする．全ての $a, b \in U$ に対して $(a \circ b) \circ S = a \circ (b \circ S)$ であるならば，$S$ は右結合的であると言われる．

$\Gamma = (U, \circ)$ を右単位元 1 を持つ有限擬群とし，$S$ を以下の 2 つの条件を満たす右結合的な $Q$ の生成元集合とする：

- $1 \notin S$;
- 任意の $s \in S$ に対して $s \circ x = 1$ である $x$ も $S$ に含まれる．

このとき，以下のように定義されるグラフ $\mathrm{QC}(\Gamma, S)$ を擬 Cayley グラフ (quasi-Cayley graph) と呼ぶ [2]：

$$V(\mathrm{QC}(\Gamma, S)) = U; \qquad E(\mathrm{QC}(\Gamma, S)) = \{(x, x \circ s) : x \in U, s \in S\}.$$

Cayley グラフは擬 Cayley グラフでもあることに注意されたい．

擬 Cayley グラフに対して，第 4 節の手法を直接用いることを考える．このとき，補題 2 は成立するが，補題 1 が成立するか否かは未解決である．補題 1 の証明の中では $f_{z' \circ z^{-1}}$ という写像を用いているが，有限擬群は必ずしも逆元が存在しないため，擬 Cayley グラフの場合には写像 $f_{z' \circ z^{-1}}$ を定義できず，$|\mathcal{P}(z)| = |\mathcal{P}(z')|$ が成立するか否かの判断がつかないためである．もし $|\mathcal{P}(z)| = |\mathcal{P}(z')|$ が成立するような全点間の最短パスの集合 $\mathcal{P}$ を擬 Cayley グラフ上でも定義できるならば，擬 Cayley グラフに対しても定理 1 と同じ結果を得る．

## 6. ま と め

小文では，文献 [15] で提案された CCC の逐次診断可能次数の下界を求める手法を一般化して，$G$ が $N$ 点 Cayley グラフであるとき，$G$ の逐次診断可能次数が $\delta(G) = \Omega(N/(l(G)+2))$ であること，その系として $\delta(G) = \Omega(N/(\mathrm{diam}(G)+2))$ であることを示した．ここで，$l(G)$ は $G$ の平均距離，$\mathrm{diam}(G)$ は $G$ の直径である．また，この結果を用いて，$n$-スターグラフ $S_n$ と $n$ 次元 Wrapped Butterfly $B_n$ の逐次診断可能次数がそれぞれ $\delta(S_n) = \Omega((n-1)!)$ と $\delta(B_n) = \Omega(2^n)$ であることを示した．

一方，本結果を $N$ 点から成るハイパーキューブ $Q_N$ に適応した場合，$\delta(Q_N) = \Omega(N/\log N)$ となり，文献 [15] に劣る結果しか得られない．したがって，Cayley グラフに対する逐次診断可能次数のより良い下界を見つけることは今後の課題である．また，擬 Cayley グラフの逐次診断可能次数を求める手法の開発も重要な課題である．

任意の有向グラフ $D$ に対して $\delta(D)$ を計算することが co-NP-困難であることはすでに示されている [10] が，任意の無向グラフ $G$ に対して $\delta(G)$ を計算することが co-NP-困難であるかは未解決であり，今後の課題である．

## 参 考 文 献

1) Sheldon B. Akers and Balakrishnan Krishnamurthy. A group-theoretic model for symmetric interconnection networks. *IEEE Transactions on Computers*, 38(4):555–566, 1989.

2) Ginette Gauyacq. On quasi-Cayley graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 77:43–58, 1997.
3) S. L. Hakimi and A. T. Amin. Characterization of connection assignment of diagnosable systems. *IEEE Transactions on Computers*, 23:86–88, 1974.
4) A.Kavianpour and K. H. Kim. A comparative evaluation of four basic system-level diagnosis strategies for hypercubes. *IEEE Transactions on Reliability*, 41:26–37, 1992.
5) A.Kavinpour. Sequential diagnosability of star graphs. *Computers & electrical engineering*, 22(1):37–44, 1996.
6) S. Khanna and W. K. Fuchs. A linear time algorithm for sequential diagnosis in hypercubes. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 26(1):48–53, February 1995.
7) S. Khanna and W. K. Fuchs. A graph partitioning approach to sequential diagnosis. *IEEE Transactions on Computers*, 46:39–47, 1997.
8) F.T. Leighton. *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes*, pages 442–446. Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1992.
9) F. P. Preparata, G. Metze, and R. T. Chien. On the connection assignment problem of diagnosable systems. *IEEE Transactions on Electronic Computers*, 16:848–854, 1967.
10) V. Raghavan and A. Tripathi. Sequential diagnosis is co-NP complete. *IEEE Transactions on Computers*, 40:584–595, 1991.
11) Gregory F. Sullivan. A polynomial time algorithm for fault diagnosability. In *Proc. 25th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science(FOCS)*, pages 148–156, 1984.
12) P. Vadapalli and P.K. Srimani. A new family of Cayley graph interconnection networks of constant degree four. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 7(1):26–32, 1996.
13) David S.L. Wei, Felix P. Muga II, and Kshirasagar Naik. Isomorphism of degree four cayley graph and wrapped butterfly and their optimal permutation routing algorithm. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 10(11):1290–1298, 1999.
14) Jie Xu and Shi-ze Huang. Sequentially $t$-diagnosable systems: A characterization and its applications. *IEEE Transactions on Computers*, 44(2):340–345, 1995.
15) T. Yamada, T. Ohtsuka, A. Watanabe, and S. Ueno. On sequential diagnosis of multiprocessor systems. *Discrete Applied Mathematics*, 146:311–342, 2005.