2009－GI－21　(15)
2009／3／9

ダーツ 01 ゲーム最適戦略

西谷　崇志 †, 原　慎平 ††, 井上　真郷 †,††
† 早稲田大学 理工学部 電気・情報生命工学科
†† 早稲田大学大学院理工学研究科 電気・情報生命専攻

本研究ではダーツ 01(301) ゲームを対象に研究を行った。ダーツゲームは状態遷移確率がプレイヤーのスキルに依存する不確定ゲームであるため、未だその戦略的側面についてはあまり詳しく研究されていない。本研究ではプレイヤーが狙った点からダーツが二次元正規分布に従って当たるとするモデルで解析を行った。また、01 ゲームの状態遷移には様々な経路が存在する点に着目し、動的計画法を用いることでプレイヤーのスキルに応じて平均的に最も少ないラウンド数で終了条件を満たす戦略を得ることに成功した。また、対戦相手が前述の戦略をとるものと仮定した上での、勝率を最大化する戦略も求め、結果を得た。本手法はより一般的な 501 ゲームにも容易に適用可能である。

Optimal Strategies for 301 Darts Game

Takashi NISHITANI†,Shinpei HARA††,Masato INOUE†,††
† Dept. of Electrical Engineering and Bioscience, School of Science and Engineering, Waseda University
†† Dept. of Electrical Engineering and Bioscience, Graduate School of Advanced Science and Engineering,Waseda University

We investigated the 301 darts game. The strategic aspects of this game have not been fully studied yet due to the complexity of its state transition equations depending on players' skills. In this research, we adopted a simple model of two-dimensional Gaussian distribution for the gap between targeted point and actual hit point. Then, we analyzed this game by using the dynamic programming techniques because it has numerous transition pathways. As the results, we successfully obtained the optimal strategy which minimizes the expected number of rounds needed to reach the goal. Besides, we also successfully obtained the optimal strategy which maximizes the probability of the winning assuming the opponent player adopting the above strategy. Our analysis method can be easily applied for more popular 501 darts game.

1　背景

コンピュータサイエンス分野ではゲームに関する研究が古くから行われており、オセロやチェス等の比較的状態数が少ないゲームに関してはトッププレイヤーと同レベルのプログラムがすでに提案されている。また、最近のゲーム研究の傾向の一つに状態遷移確率がプレーヤーの身体的なスキルに依存するようなタイプの不確定ゲームが扱われたはじめたことがあげられる。例えばビリヤードやカーリングなどのスポーツをモデル化し、その戦略について解析することが始められている。本研究ではこのようにスポーツをモデル化することでゲームの枠組みで解析することを目的として近年普及したデジタルダーツ・01 ゲームを対象として研究を行った。

近年デジタルダーツの普及により流行したソフトダーツであるが、競技人口の多さに比べその戦略的な部分についてはあまり研究されていない。これを解決するため本研究では狙った点からのずれを二次元正規分布を用いてモデル化を行い、動的計画法により期待ラウンド数最小戦略と勝率最大戦略を求めた。ダーツゲームの場合、プレイヤーのスキルにより狙った位置にダーツを投げられず意図しない状態へ遷移する場合がある。このような枠組みのゲームにおいて最適な戦略は各プレイヤーのスキルに応じて存在していると考えられるため、それぞれの状況における期待値を求めることで、スキルに応じた適切な戦略が得られ

ると考えた。この戦略は、特に点数が低い時に重要になる。また、バーストルールにより状況数はかなり多いが、01 ゲームでは持ち点が増えることがないという方向性をもっているので、動的計画法により計算量を飛躍的に減らすことが可能となる。

2　01 ゲーム

基本的なダーツルール及び 01 ゲームのルールについて述べる。

基本的なダーツルールとして以下の 3 つがある。

・参加するプレイヤーはスローイングラインに立ち、ボードに向かって 3 本のダーツを投げる。参加するプレイヤー全員がこの 3 本のダーツを投げることを「1 ラウンド」と呼ぶ。

・ボードに刺さっているダーツの点数を計算する。

・点数はあたった場所の基本となる点数にエリアごとの倍率をかけたものとする。ただし、真ん中の小さな円の内側を inner Bull、大きな円の内側を outer Bull と呼び、どちらの Bull に入った場合も 50 点、ダーツボードにあたらなかった場合 (アウトボード) は 0 点となる。シングルエリアを S、ダブルエリアを D、トリプルエリアを T、アウトボードを OB と表記する。1 投での最低点は 0 点、最高点は 20T の 60 点となる。

ダーツの中で 01 ゲームのルールは以下の 3 つがある。

・最初の持ち点を 301 点とする。

・ヒットさせた点数を差し引いていき、0 点にすればそこで終了となる。対戦時には先に 0 点にした方が勝利となる。

・持ち点がマイナスになった場合、そのラウンドは終了し、持ち点はそのラウンドが始まった時の点数に戻る。これをバーストと呼ぶ。

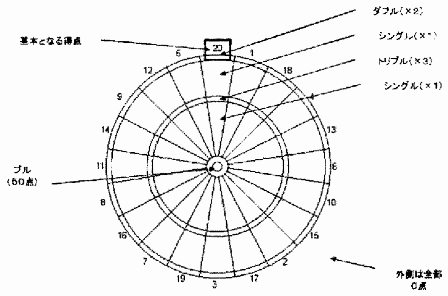

図 1　ダーツボード

3　モデル

本研究で用いたモデルについて述べる。

本研究ではダーツが実際に当たる点は、狙った点から二次元の正規分布に従ってズレることを仮定した。具体的には平均が狙った座標、共分散行列が

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

で与えられるような正規分布を用いた。σ がダーツの腕前を表す。この仮定の下で、標準偏差 σ と狙う点 t ごとにモンテカルロシミュレーションを行う。ここで、狙う点はそれぞれの点数における外側の S・D・T エリアの中心の 3 点とブル、それにアウトボード (必ず 0 点を取る点) の計 62 点とする。

このシミュレーションにより得られた結果を、実際に得られる点数を i として、$P(i|t)$ として定義する。

4　手法

本研究で用いた動的計画法について述べる。

動的計画法とは、与えられた問題の部分問題を考え、それを解く。その時、得られた解を記憶し

ておき、その解を用いてより大きい問題を解く。これを繰り返してボトムアップ的に問題を解くという手法である。この手法の利点は、単純なアルゴリズムの適用により、多項式時間での解法が存在しないと思われる大規模な問題の最適解を擬似多項式時間で得ることが出来るという点である。なぜなら部分問題の解を記憶させておくことで、再帰的な方法と違い一度計算したものを繰り返して計算する必要がなくなるためである。一般的に動的計画法を用いた場合に高速化される問題の性質として、部分構造の最適性を満たす、つまりある問題の最適解が、その内部の部分問題の最適解を含んでいるという性質がある。他に、部分問題に重複性がある、つまり、問題に対する再帰アルゴリズムが、同じ問題を繰り返して解くという性質もある。

この枠組みを 01 ゲームの最適戦略に適用する。01 ゲームにおいてラウンドが始まった時の持ち点が増えることはないので、持ち点を 1 点の状況から適当な項目により評価し最も良いものを求める。ただし、狙う点を決めても次の状況は確定しておらず、確率的に次の状況が決まることに注意しなければならない。

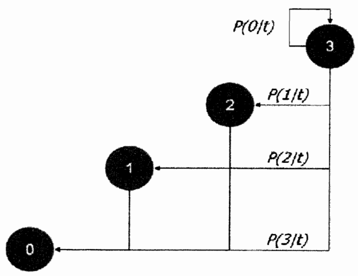

図 2　動的計画法イメージ図

4.1　期待ラウンド数最小戦略

全ての状況を期待ラウンド数によって評価し、期待ラウンド数が最小となる戦略を考える。

期待ラウンドを求める際に区別しなければならない状態とは、ラウンドが始まった時の持ち点 i、その時点での持ち点 j、投数 α によって決まる。それぞれの状態における最小期待ラウンド数 x は、1 投目では $j = i$ なので

$$x_{i,j,1} = \min_t \left[\sum_{k=0}^{i-1} P(k|t) x_{i,i-k,2} + P(i|t) + \sum_{k=j+1}^{60} P(k|t)(x_{i,i,1} + 1) \right] \quad (2)$$

と表せる。さらに、2 投目、3 投目の場合

$$x_{i,j,2} = \min_t \left[\sum_{k=0}^{j-1} P(k|t) x_{i,j-k,3} + P(j|t) + \sum_{k=j+1}^{60} P(k|t)(x_{i,i,1} + 1) \right] \quad (3)$$

$$x_{i,j,3} = \min_t \left[\sum_{k=0}^{j-1} P(k|t)(x_{j-k,j-k,1} + 1) + P(j|t) + \sum_{k=j+1}^{60} P(k|t)(x_{i,i,1} + 1) \right] \quad (4)$$

と表せる。式 (4) の $x_j - k, j - k, 1$ が部分問題の解にあたり、これはすでに求めてあるので計算時間を短縮することが可能となる。ここで注意しなければならないのは、バーストした場合または 3 投連続で 0 点をとった場合、最初の状況における解が必要となり、この解はまだ得られてないので適当に初期値を設定し解が収束するまで計算を繰り返さなければならない。この式 (4) を解くことで、期待ラウンド数最小戦略とその時の期待ラウンド数を求めることが出来る。

4.2　指定ラウンド数以内に上がれる確率最大戦略

次に、全ての状況を指定ラウンド数以内に上がれる確率で評価し、その確率が最大となるような戦略を考える。これは例えば、自分の持ち点が 180 点で相手の持ち点が 20 点という状況を考える。この場合、期待ラウンド最小戦略では Bull を狙うが、この時 1 ラウンド以内に上がれる確率はほとんどない。しかし、相手の持ち点が 20 点であり 1 ラウンドで上がる可能性が高く、自分が 1 ラウンドであがらなければ負けてしまう可能性が高いことを考えると、期待ラウンド最小戦略ではなく 1 ラウンド以内に上がれる確率が最大となる戦略をとったほうが良いと考えられる。このような場合が考えられるため、指定ラウンド数以内に上がれる確率最大戦略は重要である。

r ラウンド以内に上がれる最大確率 c は、ラウンドスタート時の持ち点を i、現在の持ち点を j、狙う場所を t として 1 投目から考えると

$$c_{r,i,i,1} = \max_t \left[\sum_{j=0}^{i-1} P(j|t) c_{r,i,i-j,2} + P(i|t) + \sum_{j=i+1}^{60} P(j|t) c_{r-1,i,i,1} \right] \quad (5)$$

と表される。さらに 2 投目、3 投目の場合

$$c_{r,i,j,2} = \max_t \left[\sum_{k=0}^{j-1} P(k|t) c_{r,i,j-k,3} + P(j|t) + \sum_{k=j+1}^{60} \{P(k|t) c_{r-1,i,i,1}\} \right] \quad (6)$$

$$c_{r,i,j,3} = \max_t \left[\sum_{k=0}^{j-1} \{P(k|t) c_{r-1,j-k,j-k,1}\} + P(j|t) + \sum_{k=j+1}^{60} P(k|t) c_{r-1,i,i,1} \right] \quad (7)$$

と表される。この式 (5)、式 (6)、式 (7) は 1 投で得られる点数の確率と次の状況における上がれる確率によって解くことが出来る。これらの式を解くことで、指定ラウンド数以内に上がれる確率が最大となる戦略を求めることが出来る。

4.3　勝率最大戦略

次に全ての状況を勝率によって評価し、勝率が最大となるような戦略を求める。ただし、相手は期待ラウンド最小戦略をとるものとする。この時、勝率が最大となるような戦略についても同様のアプローチで求めることが可能である。しかしながら、計算量が若干多くなるため、ここでは、自分がとる戦略を 4.1 章・4.2 章で求めた戦略に限定することで計算量を減らし、近似的に勝率が最大となる戦略を求める。

まず、それぞれの戦略 T ごとに、持ち点が i の時 1 ラウンドに a 点取る確率 $P(a|T_i)$ を

$$P_R(a|T_i) = \sum_{j=0}^{a} \sum_{k=0}^{a-j} P(j|T_{i,i,1}) P(k|T_{i,i-j,2}) P(a-j-k|T_{i,i-j-k,3}) \quad (8)$$

として求めておく。ただし、$a > i$ となる場合、バーストしたとみなせるので、0 点を取ったものとする。こうして求めた戦略ごとの 1 ラウンドに得る点数の確率を用いて、自分の持ち点が i、相手の持ち点が j である状況における最大勝率 w は、戦略を T、自分が 1 ラウンドに得る点数を k、相

手が 1 ラウンドに得る点数を l として

$$w_{i,j} = \max_{T}\left[\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} P_R(k|T_i)\right.$$
$$\left. P_R(l|T_{roundmin})w(i-k, j-l)\right] \qquad (9)$$

と表される。ここで、$w(0,j)$ は 1 であり、$w(i,0)$ は 0、$w(0,0)$ は先攻時の勝率を求める際には 1、後攻時の勝率を求める際には 0 となる。この式 (9) は、覚えておく部分問題の解は相手の持ち点と自分の持ち点によって決まる勝率だけである。また、自分の行動だけでなく相手の行動も含めて状況が遷移するが、本研究では相手の戦略を期待ラウンド最小戦略をとるものとしているので、この式は厳密に解くことが出来る。式 (9) を解くことで、勝率最大戦略とその時の勝率を求めることが出来る。

5 結果

本研究で得られた実験結果について述べる。

5.1 期待ラウンド最小戦略

一般戦略と期待ラウンド数最小戦略の期待ラウンド数を図 3 に示す。ここで言う一般戦略とは、ダーツがうまい人が 01 ゲームにおいてうまく上がれるために使用する戦略をまとめたアレンジ表というものを基にした戦略である。

期待ラウンド数が一般戦略と比べて低くなっていることから、この戦略は有効であるといえる。さらに、一般戦略と期待ラウンド数最小戦略の対戦結果を図 4 に示す。

σ =5[mm] のあたりで勝率が高くなっているが、これは一般戦略では持ち点が高い時に Bull を狙うが、σ が小さいうちは Bull 以外に、得点の高い T を狙っていたほうが早くあがれる場合があるためと考えられる。σ が大きくなってくると、T に入りにくくなるため Bull 狙いのほうが有効になり、得点が高い時には一般戦略と期待ラウンド最小戦略が一致するため σ =10[mm] あたりで勝率は多少下がるが、それより大きくなると勝率は上がり、σ が 15[mm] 以上では勝率は常に 50 %を大きく上回っている。

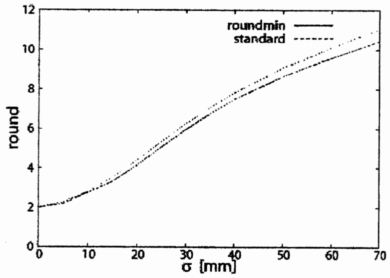

図 3 一般戦略と期待ラウンド数最小戦略の期待ラウンド

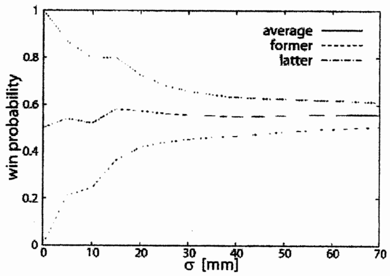

図 4 一般戦略とラウンド数最小戦略対戦結果

5.2 各ラウンド以内に上がれる確率最大戦略

各ラウンド以内に上がれる確率最大となる戦略と期待ラウンド最小戦略を比較する。σ を 20[mm]、持ち点を 129 点とした時の、それぞれの戦略における上がれる確率を表 1 に示す。

表 1 を見ると、各ラウンド以内に上がれる確率最大戦略によって、上がれる確率が最大となり期待ラウンド最小戦略より上がれる確率が上回って

表 1　各ラウンド以内に上がれる確率

ラウンド	各 R 以内上がれる確率最大 [%]	期待 R 最小 [%]
1	8.64	6.7
2	74.89	74.16
3	96.94	96.44
4	99.73	99.62
5	99.98	99.96

いることがわかる。

5.3　勝率最大戦略

それぞれの状況に応じて最も勝率が高くなる戦略を選択し、勝率最大戦略を求めた。各 σ ごとの勝率を表 2 に示す。

表 2　各 σ ごとの勝率

σ [mm]	勝率 [%]
15	50.02
20	50.06
25	50.10
40	50.20

σ が大きくなるにつれて勝率は多少上がっていったが、最大でも 51 %に届かない程度であった。期待ラウンド最小戦略が狙った点から外れた場合のことも考えて決められているので勝率が劇的に上がるということはなかった。しかし、それでも自分の持ち点と相手の持ち点によって戦略を変えることで勝率は 50 %よりは高くなり、僅かだが勝利に近づいたと言える。

6　考察

6.1　期待ラウンド最小戦略

6.1.1　σ による戦略の違い

σ =20[mm] と σ =40[mm] の場合について比較する。状況は 1 投目、持ち点が 21〜120 点とする。

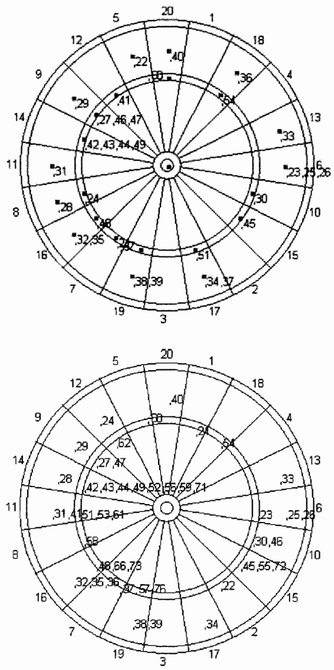

図 5　σ =20[mm](上) と σ =40[mm](下) の戦略

さらに図 5 から、持ち点によって狙う点が異なっている場合の点のみを抜き出した結果を図 6 に示す。

σ =20[mm] の場合、Bull を狙うと 50 %弱の確率で Bull に入るので、持ち点が多い時には Bull 狙いが基本となるが、σ =40[mm] の場合、Bull を狙っても 15 %程度しか入らないので、狙った点から多少ずれてもある程度高い点数が望めるよ

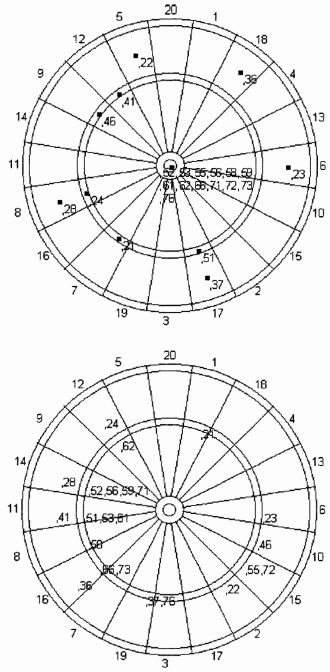

図 6　$\sigma=20$[mm](上) と $\sigma=40$[mm](下) の戦略比較

うな 14T や 11T を狙う。

6.1.2　ラウンドスタート時の点数による戦略の違い

まず、$\sigma=15$[mm] と $\sigma=20$[mm] の場合について比較する。状況は 3 投目、現在の持ち点 j が 8 点と 24 点、ラウンドが始まった時の点数 i が現在の持ち点 +0 と +120 とする。

表 3　$\sigma=15$ と $\sigma=20$ の違い

σ	$j=8$		$j=24$	
[mm]	$i=8$	$i=128$	$i=24$	$i=144$
15	8S	8S	8T	8T
20	8S	8S	8T	6S

$\sigma=15$[mm] の場合、Bull やシングルで 94 %、トリプルやダブルでも 30 %弱の確率で入るので、ラウンドが始まった時の点数に関係なくあがれるところを狙う。しかし、$\sigma=20$[mm] の場合シングルには 82 %程度入るが、トリプルに入る確率は 16 %程度であまり高くなく、他の点数のトリプルに入ってしまってバーストしてしまう可能性があるので持ち点が 24 点でバーストしてしまった時のリスクが高い場合、バーストせず確実に点数を減らせるようなシングルを狙う。

次に、$\sigma=25$[mm] と $\sigma=40$[mm] の場合について比較する。状況は先ほどと同じとする。

表 4　$\sigma=15$[mm] と $\sigma=20$[mm] の違い

σ	$j=8$		$j=24$	
[mm]	$i=8$	$i=128$	$i=24$	$i=144$
25	8S	8S	8T	6S
40	8S	OB	12S	12S

$\sigma=25$[mm] の場合、シングルには 70 %弱と比較的高い確率で入るが、トリプルに入る確率は 12 %程度であまり高くないため、$\sigma=20$[mm] の場合と同様の理由で持ち点が 24 点でバーストしてしまった時のリスクが高い場合、バーストせず確実に点数を減らせるようなシングルを狙う。そして、$\sigma=40$[mm] の場合シングルに入る確率が 40 %と低いため、持ち点が 8 点でバースト時リスクが高くなると OB、つまり 0 点をとって次のラウンドに上がれるような戦略をとる。さらに、持ち点が 24 点の場合、トリプルには 5 %程度とほとんど入らないので最初から確実に点数を減らせる 12S を狙っていると考えられる。

6.2　勝率最大戦略

どちらも $\sigma=25$[mm]、相手の持ち点を 20 点、自分の点数を 90 点から 110 点の場合、自分の戦略が期待ラウンド数最小戦略時と勝率最大戦略時

の勝率を図 7 に示す。

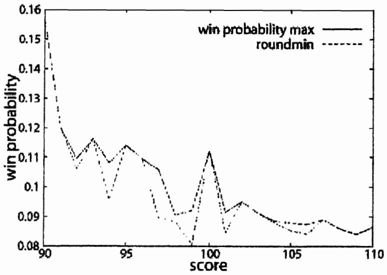

図 7　期待ラウンド数最小戦略時と勝率最大戦略時の勝率比較

σ =25[mm] で相手の点数が 20 点なので、相手は高い確率で 1 ラウンド以内に上がってしまう。自分の点数が 90 点から 110 点の場合、期待ラウンド最小戦略では 1 ラウンド以内に上がるためにリスクが高いところを狙うことはしないが、勝率最大戦略では相手の持ち点を見て出来るだけ相手より早いラウンド以内に上がれる確率が高いものを選ぶため、総じて期待ラウンド数最小戦略をとるより勝率は高くなっている。

さらに、相手が一般戦略をとる場合に、自分が期待ラウンド最小戦略をとった時と勝率最大戦略をとった時の勝率を比較する。

表 5　対一般戦略勝率

σ [mm]	期待 R 最小戦略時 [%]	勝率最大戦略時 [%]
15	58.12	58.13
20	57.19	57.25
25	56.20	56.17
40	55.02	54.90

表 6.2 を見ると、勝率最大戦略も一般戦略に対して有効であることがわかる。これは、期待ラウンド最小戦略が先に述べたようにかなり優秀でありその戦略に対して勝率最大となるような戦略なので、他の戦略に対しても有効性があると考えられる。ただし、あくまで期待ラウンド数最小戦略に対して勝率最大となる戦略なので、σ =15[mm] の時の勝率のように勝率が最大となっていない場合も有り得る。

7　議論とまとめ

各 σ について、状況が遷移する確率についてモデルを構築した。また、状況数が非常に多く、再帰的に解いた場合計算時間が非常にかかってしまうが、動的計画法を用いることによって計算時間を減らすことが出来たため、比較的短時間で全ての状況について評価することが出来た。また、二次元正規分布を用いて、スキルごとの状況遷移確率を求めることで、スキルに応じた戦略を求めることが可能となり、本研究では各状況を期待ラウンド数と、指定ラウンド数以内に上がれる確率によって評価し、最も良い戦略を求めさらにこれらを用いて勝率が最大となるような戦略を求めた。期待ラウンド数最小戦略は、現在一般に考えられている戦略と比べて優れており、その戦略の妥当性について考察した。また、対戦の場合には、相手は期待ラウンド最小戦略をとると仮定し、自分の持ち点と相手の持ち点という状況に応じて期待ラウンド数最小戦略と各ラウンド以内に上がれる確率最大戦略の中から、厳密に勝率が最大となるような戦略を選択していくことで勝率最大戦略を求め、実際に期待ラウンド最小戦略に対して勝率を高くすることが出来た。さらに、この対期待ラウンド最小戦略において勝率最大となる戦略は、他の戦略に対しても有効であることを示した。

参考文献

[1] R.Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ.Press, 1957.