

## 2次元主成分分析を用いた Mahalanobis 距離最小化による高次元線形写像計算法 : 2D-M3

岡 藍子 † 和田 俊和 ‡

† ‡ 和歌山大学システム工学部 〒640-8510 和歌山市 栄谷 930 番地  
E-mail: † oka@vrl.sys.wakayama-u.ac.jp, ‡ twada@ieee.org

**概要** 高次元ベクトル間の写像を単純な回帰計算で求めた場合、学習サンプル数よりも入力次元数が高い場合に多重共線性の問題が生じる。この問題を解決するために我々は学習サンプルの共分散行列から計算される Mahalanobis 距離を最小化する写像法 M3 を提案した。本来、共分散行列が正則でない場合には正確な Mahalanobis 距離が計算できないが、M3 はこの点を解消し共分散行列が非正則の場合でも安定に写像を計算することができる。本論文では、M3 を拡張し、2次元主成分分析を用いた写像計算法を提案する。2次元主成分分析を用いることで、短時間での学習、写像計算が可能となる。画像の欠損修復の実験を通して2次元主成分分析の性質を明らかにし、提案手法の有効性を議論する。

**キーワード** 線形回帰, 2次元主成分分析, Mahalanobis 距離

## Two-Dimensional Mahalanobis Distance Minimization Mapping : 2D-M3

Aiko Oka † Toshikazu Wada ‡

† ‡ Faculty of Systems Engineering, Wakayama University 〒640-8510 930, Sakaedani,  
Wakayama-shi E-mail: † oka@vrl.sys.wakayama-u.ac.jp, ‡ twada@ieee.org

**Abstract** This paper presents a regression method, two-dimensional Mahalanobis distance minimization mapping (2D-M3), which is an extension of Mahalanobis Minimization Mapping :M3. M3 is a regression method between very high-dimensional input and output spaces based on Mahalanobis distance minimization criterion. Unlike the original M3, 2D-M3 directly extracts the features from image matrix rather than matrix-to-vector transformation. Because of this, 2D-M3 is much faster than original M3 without consuming much memory. We demonstrate the effectiveness of M3 through extensive experiments on a face image inpainting task.

**keyword** Linear Regression, two-Dimensional Principal Component Analysis, Mahalanobis Distance

## 1 はじめに

高次元ベクトル間の写像計算は、インペインティング [1] や欠損画像の修復 [2], Hallucination[3], 画像の陰影推定・除去 [4] など広範囲に用いられる。

この写像を単純な回帰計算で求めると、「多重共線性 (multi-collinearity)」に起因する回帰計算の精度低下 [5] が起きることがある。この問題を回避するために、入出力の直積空間内で学習サンプルから推定した共分散行列を用いて、Mahalanobis 距離を最小化するという基準で出力を求める方法、Mahalanobis-distance Minimization Mapping (M3) を提案した [6]。M3 は、従来の多重共線形回避法である Principal Component Regression (PCR)[5], Partial Least Square (PLS)[7, 8] や Canonical Correlation Analysis (CCA)[8] などとは異なり、次元圧縮を行わずに多重共線性を回避する手法である。共分散行列が正則でない場合、直接最小 Mahalanobis 距離を計算することは出来ないため、M3 はこの場合に特化した解法も提案している。M3 は、Mahalanobis 距離、すなわち学習データの分布を利用して条件数不足を補うため、高精度な写像が実現できる。

しかし M3 は主成分分析 (PCA) を用いているため、行列をベクトルに変換する必要があり、学習の際に画像の要素間の相関が無視されてしまう。また、計算時間がかかるという問題点もある。

本論文では、M3 を拡張し、2次元主成分分析を用いた Mahalanobis 距離最小化による高次元線形写像計算法: 2D-M3 を提案する。近年、2D-PCA[9] や GPCA[10] など、行列をベクトルに変換せずに扱う手法が提案されている。Yang らによって提案された 2D-PCA[9] は、画像から直接求めた 1次元の基底と画像を表す行列の積を求めることで小さいサイズの行列として扱う手法である。しかし、この方法では 1次元の基底のみを使うため、画像の列方向の相関を見ることが出来ない。これに対して Ye らによって提案された GPCA[10] では画像から直接 2次元の基底を求めるため、行列の行方向、列方向のすべての相関を表現することができる。本稿では、この GPCA を 2次元主成分分析として利用する。

M3 では、共分散行列が正則でない場合に正確な最小 Mahalanobis 距離を直接計算することが出来なかったが、2次元主成分分析を用いることで少ない学習サンプルでも全ての固有値を計算することができ、直接正確な最小 Mahalanobis 距離を求めることが可能となる。また、画

像データをベクトルに変換する必要がないため、高速に学習・写像を行うことが出来る。

以下 2 章では直積空間を介した写像計算法について述べ、3 章で M3 の計算法、4 章で提案手法である 2DM3 の計算法、5 章で実験結果、6 章でまとめについて述べる。

## 2 直積空間を介した写像計算法

ここでは、入力と出力の直積空間を介した写像計算の定義を与え、その性質と問題点を明らかにする。

以下、空間  $R^N$  内での主成分分析に基づいて、入力空間  $R^r$  のベクトルに対応する出力空間  $R^{N-r}$  の要素を求める方法について述べる。但し、ベクトル  $\mathbf{x}$  は平均 0 共分散  $C$  の正規分布に従うものとする。

### 2.1 諸定義

まず、以降で用いる記号等の定義を行う。

- $\mathbf{x}$  のうち観測された部分 (入力) を、

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^r \varphi_i \varphi_i^T \mathbf{x} = \Phi_1 \Phi_1^T \mathbf{x} = P_1 \mathbf{x} \quad (1)$$

- $\mathbf{x}$  のうち未観測の部分 (出力) を、

$$\mathbf{z} = \sum_{i=r+1}^N \varphi_i \varphi_i^T \mathbf{x} = \Phi_2 \Phi_2^T \mathbf{x} = P_2 \mathbf{x} \quad (2)$$

と表す。但し、 $\varphi_i (i = 1 \dots N)$  は任意の正規直交基底、 $\Phi_1 = [\varphi_1 \dots \varphi_r]$ 、 $\Phi_2 = [\varphi_{r+1} \dots \varphi_N]$  である。 $\Phi_1$ 、 $\Phi_2$  に含まれるベクトルが張る空間  $R^r$ 、 $R^{N-r}$  を、それぞれ、「入力空間」、「出力空間」と呼ぶ。 $P_1$  と  $P_2$  は直積空間からそれぞれ入力空間、出力空間への射影行列になっている。通常、出力空間には入力  $\mathbf{y}$  は含まれないが、 $\mathbf{y}$  を含む出力空間と平行な超平面を「出力超平面」と呼ぶ。<sup>1</sup>写像計算の際には、この出力超平面内の探索を通じて出力が決定される。ここで  $\Phi = [\varphi_1 \dots \varphi_N]$  とすると、明らかに、

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i \varphi_i^T = \Phi \Phi^T = (\Phi^T \Phi)^T = I^T = I \quad (3)$$

<sup>1</sup>共分散行列の固有ベクトルで張られる空間の場合、元の空間の原点を含まないため超平面と呼ぶべきであるが、本稿ではこの場合も部分空間と呼ぶ。

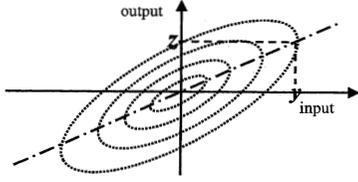


図 1: M3 による回帰計算 (点線は等距離面)

となる。但し  $I$  は単位行列である。したがって

$$P_1 + P_2 = I, \quad (4)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad (5)$$

$$\mathbf{y}^T \mathbf{z} = 0 \quad (6)$$

が成り立つ。例えば欠損画像の修復では、 $P_1, P_2$  は画像のマスキングを行う行列と考えることができ、

$$\varphi_i = \left[ \underbrace{0 \cdots 0}_{i-1} \quad 1 \quad \underbrace{0 \cdots 0}_{N-i} \right]^T \quad (7)$$

とすれば、 $\varphi_i$  は正規直交基底となり、

$$P_1 = \sum_{i=1}^r \varphi_i \varphi_i^T = \begin{bmatrix} I_r & 0_{N-r,r} \\ 0_{r,N-r} & 0_{N-r,N-r} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$P_2 = \sum_{i=r+1}^N \varphi_i \varphi_i^T = \begin{bmatrix} 0_{r,r} & 0_{N-r,r} \\ 0_{r,N-r} & I_{N-r} \end{bmatrix} \quad (9)$$

となる。但し  $I_a, 0_{a,b}$  はそれぞれ、 $a \times a$  の単位行列、 $a \times b$  の零行列である。この場合、

$$\mathbf{y} + \mathbf{z} = P_1 \mathbf{x} + P_2 \mathbf{x} = \mathbf{x} \quad (10)$$

となり、式 (4)~(6) が成立することが確認できる。

また、学習サンプルから求められた共分散行列を  $C$ 、その固有値、固有ベクトルを  $\lambda_i, \mathbf{v}_i; (i = 1, \dots, M, M \leq N)$  と表わす。さらに以下の行列を定義する。

$$V_M = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_M \end{bmatrix}, \Lambda_M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_M \end{bmatrix}$$

## 2.2 Mahalanobis 距離最小化による線形写像計算：M3

ここでは、Mahalanobis 距離  $\mathbf{x}^T C^{-1} \mathbf{x}$  を最小化することによって出力  $\mathbf{z}_{C^{-1}}$  を求める方法について述べる (図

1)。これは、学習サンプルの分布を利用して写像を求める方法である。Mahalanobis 距離の式を展開すると、

$$\mathbf{x}^T C^{-1} \mathbf{x} = (P_1 \mathbf{y} + P_2 \mathbf{z})^T C^{-1} (P_1 \mathbf{y} + P_2 \mathbf{z}) \quad (11)$$

この式を  $\mathbf{z}$  で偏微分し、 $\mathbf{z} = \mathbf{z}_{C^{-1}}$  とした結果が  $\mathbf{0}$  であることから、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} (P_1 \mathbf{y} + P_2 \mathbf{z})^T C^{-1} (P_1 \mathbf{y} + P_2 \mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}_{C^{-1}}} & \\ = 2 (P_2^T C^{-1} P_1 \mathbf{y} + P_2^T C^{-1} P_2 \mathbf{z}_{C^{-1}}) & = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12)$$

この式中の  $P_1$  や  $P_2$  は正則ではないので、出力  $\mathbf{z}_{C^{-1}}$  は一般逆行列を用いて、

$$\mathbf{z}_{C^{-1}} = - (P_2^T C^{-1} P_2)^+ (P_2^T C^{-1} P_1) \mathbf{y} \quad (13)$$

と表わされる。このうち、自明な項を除き、整理すると次式の最小 Mahalanobis 距離解が得られる。

$$\mathbf{z}_{C^{-1}} = - (P_2 C^{-1})^+ (P_2 C^{-1}) \mathbf{y} \quad (14)$$

式 (22) と (21) を比較すると、 $S$  と  $C^{-1}$  が異なるだけで式の構造は同じであることが分かる。

出力  $\mathbf{z}_{C^{-1}}$  は、共分散行列  $C$  が正則であるときには妥当であり、本論文で提案する M3 の出力と一致する。しかし、高次元空間で  $N$  個以下の独立な学習サンプルしか得られない場合には正則な  $C$  が得られず、 $C^{-1}$  が計算できない。

## 2.3 共分散行列が正則でない場合の M3 の計算法

共分散行列  $C$  およびその逆行列  $C^{-1}$  が、正則でない場合、 $C$  の固有値 ( $\Lambda_M$  の対角成分) が 0 の要素に対応する  $C^{-1}$  の要素を  $\infty$  と計算しなければ、式 (21) による最小 Mahalanobis 距離解は不正確なものになる。仮に一般逆行列  $C^+ = V_M \Lambda_M^+ V_M^T$  で代替すると、 $\Lambda_M$  の固有値 0 に対応する  $\Lambda_M^+$  の要素は 0 であるため、正確な距離が計算できない。図 3 に、一般逆行列を用いた場合の、Mahalanobis 距離が定義されている空間を灰色で示す。このように、 $\mathbf{x}^T C^+ \mathbf{x}$  を計算すると、本来 Mahalanobis 距離が無限大となる筈の部分空間外部の補空間に沿った同じ Mahalanobis 距離が与えられてしまう。した

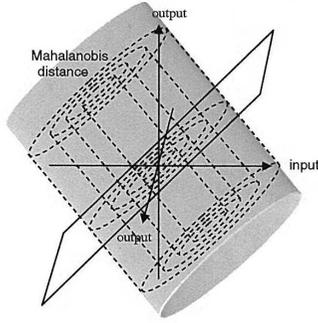


図 2: Mahalanobis 距離が定義されている空間 ( $M < N$  の場合)

がって、式 (21) で  $C^+$  を用いると、部分空間外部でも  $\mathbf{x}^T C^+ \mathbf{x}$  が小さくなり、不正確な写像になる。

そこで共分散行列が正則でない場合の解法として正則化を用いた近似解法と、厳密解法の二つを提案する。これらは、入力に直交する出力超平面と部分空間との両方に含まれ、且つ、最小 Mahalanobis 距離を与える直積空間内の点を求め、これに対応する出力を求める方法である。

## 2.4 近似解法

ここで示す解法は、部分空間の補空間への射影成分と Mahalanobis 距離の重み付き和を最小化する手法である。

部分空間への射影行列は  $W = V_M V_M^T$  となり、これを用いてベクトル  $\mathbf{x}$  の射影先  $W\mathbf{x}$  を求めることができる。このとき射影残差の 2 乗は次式で表わされる。

$$\mathbf{x}^T (I - W)^T (I - W) \mathbf{x} \quad (15)$$

$W^T W = W$  および  $W^T = W$  という性質から、式 (15) はさらに簡単化でき、

$$\mathbf{x}^T (I - W)^T (I - W) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (I - W) \mathbf{x} \quad (16)$$

となる。 $S = (I - W)$ 、 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$  として、式 (16) に代入すると、

$$(\mathbf{y} + \mathbf{z})^T S (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \quad (17)$$

が得られる。式 (17) と式 (21) を正則化の観点から融合すると、以下の式が得られ、

$$f(\mathbf{z}) = (\mathbf{y} + \mathbf{z})^T C^+ (\mathbf{y} + \mathbf{z}) + \alpha (\mathbf{y} + \mathbf{z})^T S (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \quad (18)$$

を最小化する  $\mathbf{z}$  を求める手法となる。但し、 $\alpha$  は正則化パラメータである。

式 (18) は次の行列を用いた 2 次形式になっている。

$$C^{-1*} \equiv C^+ + \alpha S \quad (19)$$

式 (19) を式 (18) に代入し、 $\mathbf{z} = \mathbf{z}_{C^{-1*}}$  とした結果が 0 であることから、 $\mathbf{z}$  で偏微分すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} (P_1 \mathbf{y} + P_2 \mathbf{z})^T C^{-1*} (P_1 \mathbf{y} + P_2 \mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z} = \mathbf{z}_{C^{-1*}}} \\ = 2 (P_2^T C^{-1*} P_1 \mathbf{y} + P_2^T C^{-1*} P_2 \mathbf{z}_{C^{-1*}}) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

このうち、自明な項を除き、式 (21) の場合と同様に整理すると次式が得られる。

$$\mathbf{z}_{C^{-1*}} = - (P_2 C^{-1*})^+ (P_2 C^{-1*}) \mathbf{y} \quad (21)$$

式 (21) は、行列と一般逆行列の積になるため、 $\alpha$  の絶対的値はキャンセルされ、 $\alpha$  によって  $C^+$  と  $S$  との相対的比率が変化するのみである。

## 2.5 厳密解法

この解法は以下の 3 つの考え方に基づいている。

1. 部分空間と入力に直交する出力超平面の交わり部分の基底ベクトルを求める。
2. 交わりに含まれる点を基底ベクトルの線形和で求める。
3. その係数を調整することにより、 $C^+$  を用いた Mahalanobis 距離を最小化する。

交わり部分の基底ベクトルは、 $P_2 W \mathbf{d} = \lambda \mathbf{d}$  を満足する  $\lambda = 1$  に対応する固有ベクトル  $\mathbf{d}_i$  を交わり部分の基底として利用する。

以降、これら固有ベクトルから成る行列を  $D = [\mathbf{d}_1 \ \dots \ \mathbf{d}_k]$  と表す。実際の交わりに含まれる点を表すには、交わりに含まれる 1 点  $\mathbf{x}_s$  が必要になる。 $\mathbf{x}_s$  としては、式 (17) に示した部分空間の補空間への射影成

分が最小のものを利用する。式 (17) を  $z$  で偏微分すると、次式が得られる。

$$z_s = -(P_2 S)^+ (P_2 S) \mathbf{y} \quad (22)$$

このとき、交わりに含まれる点集合は次式で表わされる。

$$\mathbf{x}(\mathbf{a}) = \mathbf{x}_s + D\mathbf{a} \quad (23)$$

但し、 $\mathbf{a}$  は次元係数ベクトルである。したがって、 $\mathbf{x}^T(\mathbf{a})C^+\mathbf{x}(\mathbf{a})$  を最小化する  $\mathbf{a}^*$  を求めると次式が得られ、 $z_{M3} = P_2 \mathbf{x}(\mathbf{a}^*)$  が計算できる。

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} (\mathbf{x}^T(\mathbf{a})C^+\mathbf{x}(\mathbf{a})) \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^*} \quad (24)$$

$$= 2(D^T C^+ D \mathbf{a}^* + D^T C^+ \mathbf{x}_s) = 0$$

$$\mathbf{a}^* = -(D^T C^+ D)^+ D^T C^+ \mathbf{x}_s \quad (25)$$

$\mathbf{x}_s = z_s + \mathbf{y}$  として以上の式を整理すると、式 (22), (23), (25) から、

$$z_{M3} = P_2 \left( I - D (D^T C^+ D)^+ D^T C^+ \right) \times \left( I - (P_2 S)^+ (P_2 S) \right) \mathbf{y} \quad (26)$$

が得られる。

### 3 2DM3

ここでは、提案手法である 2 次元主成分分析を用いた M 3 の計算法について述べる。

#### 3.1 諸定義

以下、以降で用いる記号等の定義を与える。

- 行列の要素間の積  $\odot$  を

$$[a_{ij}] \odot [b_{ij}] = [a_{ij} b_{ij}] \quad (27)$$

と定義する。これは行列の対応する要素を掛け合わせる計算である。

- マトリクス間のスカラ積  $\otimes$  を

$$[a_{ij}] \otimes [b_{ij}] = \sum a_{ij} b_{ij} \quad (28)$$

と定義する。これは、行列の対応する要素を掛け合わせて和を求める計算である。

$N \times N$  の行列  $X$  で表わされる画像のうち観測された部分 (入力) を、

$$Y = P_1 \odot X \quad (29)$$

未観測の部分 (出力) を、

$$Z = P_2 \odot X \quad (30)$$

と表す。この場合、

$$Y + Z = P_1 \odot X + P_2 \odot X = X \quad (31)$$

が成り立つ。

$P_1$  と  $P_2$  は直積空間からそれぞれ入力空間、出力空間への射影を表すマスク行列になっている。

また、2 次元主成分分析により学習サンプルから求められた固有ベクトルを  $\mathbf{l}_i, \mathbf{r}_j, (i, j = 1, \dots, M (M \leq N))$  と表わす。さらに以下の行列を定義する。

$$L_M = [\mathbf{l}_1 \ \dots \ \mathbf{l}_M], \quad R_M = [\mathbf{r}_1 \ \dots \ \mathbf{r}_M]$$

2 次元主成分分析のように行列を演算対象とする計算では、行列  $X$  で表わされる画像と、 $M$  次元ベクトル  $\mathbf{l}, \mathbf{r}$  で表わされる基底  $\mathbf{l}\mathbf{r}^T$  との内積計算は、 $\mathbf{l}^T X \mathbf{r}$  と表わされる。例えば  $\mathbf{l} = [l_1 \ l_2]^T, \mathbf{r} = [r_1 \ r_2]^T$ ,

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \text{ の場合,}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^T X \mathbf{r} &= \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \\ &= l_1 r_1 x_{11} + l_1 r_2 x_{12} + l_2 r_1 x_{21} + l_2 r_2 x_{22} \end{aligned}$$

となる。

これは、スカラ積  $\otimes$  を用いると、

$$\mathbf{l}^T X \mathbf{r} = X \otimes \mathbf{l}\mathbf{r}^T \quad (32)$$

とあらわすことができる。このことから、 $\mathbf{l}^T X \mathbf{r}$  は一般化された内積であることがわかる。これはつまり、上記の演算は行列  $X$  と  $\mathbf{l}\mathbf{r}^T$  をラスタスキャンなどの適当な方式でベクトル化した場合、ベクトル同士の内積と一致するからである。

### 3.2 2DM3 の計算法

2次元主成分分析を用いて計算された  $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_M \end{bmatrix}$ ,  $R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_M \end{bmatrix}$  という2つのベクトルの集合から計算される基底  $l_i r_j^T$  を用いて Mahalanobis 距離を最小化することを考える。

Mahalanobis 距離の二乗は

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i,j} \frac{(l_i^T X r_j)^2}{\lambda_{ij}^2} \\ &= \|(L^T X R) \odot \Lambda^{-1}\|_F^2 \\ &= \text{trace}\{((L^T X R) \odot \Lambda^{-1})^T \\ &\quad ((L^T X R) \odot \Lambda^{-1})\} \end{aligned} \quad (33)$$

で表される。但し、 $\|(L^T X R) \odot \Lambda^{-1}\|_F^2$  は行列の Frobenius ノルムである。このとき、 $\lambda_{ij}^2$  は基底  $l_i r_j^T$  上での学習サンプルの分散を表しており、 $\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_{ij} \end{bmatrix}$  となっている。

$X = Y + Z$  として式 (33) に代入すると、 $\text{trace}\{((L^T(Y+Z)R) \odot \Lambda^{-1})^T ((L^T(Y+Z)R) \odot \Lambda^{-1})\}$  が得られ、この式を最小化することで出力  $Z$  が求められる。入力  $Y$ , 出力  $Z$  がそれぞれ入力空間、出力空間内の行列であることを明示的に表すと、

$$D = \text{trace}\{(L^T(Y \odot P_1 + Z \odot P_2)R) \odot \Lambda^{-1})^T ((L^T(Y \odot P_1 + Z \odot P_2)R) \odot \Lambda^{-1})\}$$

となるので、この式を  $Z$  で偏微分した結果が 0 であることから次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial Z} &= \{L(L^T Y \odot P_1 R) \odot (\Lambda^{-1})^2 R^T\} \odot P_2 \\ &\quad + \{L(L^T Z \odot P_1 R) \odot (\Lambda^{-1})^2 R^T\} \odot P_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

さらに自明な項を除き、整理すると次の解が得られる。

$$Z = L\{L^T\{L(L^T Y R) \odot (\Lambda^{-1})^2 R^T\} \odot P_2 R\} \odot \Lambda^2 R^T \quad (34)$$

このとき、 $(\Lambda^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_{ij}^2 \end{bmatrix}$ ,  $\Lambda^2 = [\lambda_{ij}^2]$  となっている。

Method	Mahalanobis距離 (MD)	拡張MD1	拡張MD2
distance	$d = \sum_{i,j} \frac{l_i^T X r_j}{\lambda_{ij}^2}$	$d = \sum_{i,j} \frac{l_i^T X r_j}{\lambda_{ij}}$	$d = \sum_{i,j} \frac{l_i^T X r_j}{\sqrt{\lambda_{ij}}}$

表 1: 写像計算に用いた距離尺度

Method	Running time (seconds)	
	写像計算	学習
2D-M3	0.004999	0.3100
M3	1593.9	27.96

表 2: 2D-M3 と M3 の速度比較

## 4 実験

以下では、式 (34) を用いた 2次元主成分分析を用いた写像計算を画像の欠損推定に用いた場合の評価実験の結果を示す。

学習サンプルとして CAS-PEAL 顔画像データベースから無作為に抽出した正面顔画像 64 枚を用いてこのデータの 2次元主成分分析を行った。全画像は両眼位置が揃うように回転とスケールを行い、 $64 \times 64$  のサイズで切り出して使用している。比較実験は、通常の Mahalanobis 距離 (MD), そして精度が向上するように Mahalanobis 距離を最適化した新たな距離尺度として、拡張 MD1, 拡張 MD2 を定義してそれぞれの距離を最小化する出力を求め、学習サンプルに含まれる画像 30 枚を用いて各画素値における輝度値の差の平均を算出した。表 1 にそれぞれの距離の定義を示す。

通常の Mahalanobis 距離では距離を計算する際に分散を用いるが、拡張 MD1, 拡張 MD2 ではそれぞれ偏差と偏差の平方根をとったものを利用する。

表 2 に、通常の PCA を用いて写像を計算した M3 の厳密解と 2D-M3 の速度比較を示す。この表から、2D-M3 は M3 と比べて極めて高速に写像が計算出来ていることが分かる。

図 3, 表 3 に復元画像例と平均誤差値を示す。この図から通常の Mahalanobis 距離で写像を計算した場合には全く復元が行えていないことが確認できる。拡張 MD 1, 拡張 MD 2 を用いた場合は、入力次元数が高い場合や空間的に均一な欠損の場合には高精度な写像が実現できるが、入力次元数が低い場合には平均顔に近づいてしまい安定に写像が行えていない。これは、2次

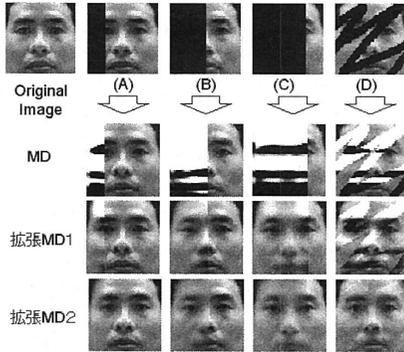


図 3: 学習画像を入力とした場合の写像結果

Input	拡張MD1	拡張MD2
¼(A)	8.92	4.44
¼(B)	13.2	9.76
¼(C)	20.2	15.5
Handwritten(D)	70.8	7.30

表 3: 学習画像を入力とした場合の画素値の平均誤差

元主成分分析で求められる基底が学習サンプルの分布を正しく表現出来ておらず、正規分布に従っていない可能性が考えられる。図 4 に 2 次元主成分分析により求められた第一主軸に学習サンプルから平均を引いたものを射影した場合のデータの分布をヒストグラムで示す。ヒストグラムに示すように 2 次元の基底を用いて学習サンプルの分布を表現すると、正規分布から大きく逸脱していることが確認できる。また、2 次元主成分分析で正しい基底が求められているかを検証するため、学習サンプルを 2 次元主成分分析して全基底  $L = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_{64}]$   $R = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{64}]$  を求めた場合の大きい固有値に対応する固有ベクトル 16 本と、 $L' = [l'_1 \ l'_2 \ \dots \ l'_{16}]$   $R' = [r'_1 \ r'_2 \ \dots \ r'_{16}]$  として求めた場合の固有ベクトル 16 本が一致しているか否かの検証実験を行った。図 5 に第 1 軸から第 16 軸までの対応する固有ベクトル  $R, R'$  の内積 (余弦波) の値を示す。このグラフから、求める軸の本数によって軸の方向にずれが生じており、2 次元主成分分析では固有

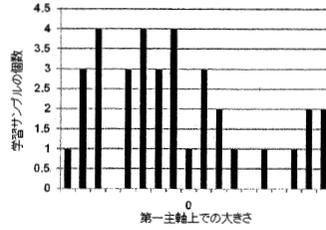


図 4: 2 次元主成分分析で得られた第一主軸でのデータの分布

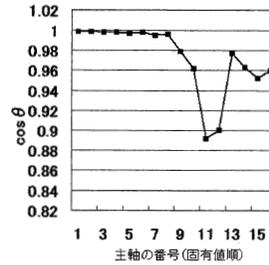


図 5: 2 次元主成分分析で求めた基底のずれ

ベクトルが安定に求められていないことが分かった。2 次元主成分分析は  $\sum_{K=1}^M (\|X_k\|_F^2 - \|L^T X_K R\|_F^2)$  を最小化することによって基底  $L, R$  を求めるが、この目的関数に問題があると考えられる。Mahalanobis 距離は学習サンプルの分布が正規分布に従っているという仮定上での距離尺度のため、このような場合には正確に距離を計算することは出来ない。この問題を解決するためには学習サンプルが正規分布に従うように正しく 2 次元の基底を求める必要がある。

## 5 まとめ

本論文では、2 次元主成分分析を用いた入出力の直積空間内で学習サンプルから推定した Mahalanobis 距離を最小化する高次元線形写像計算法 2D-M3 を提案した。

この手法は、高次元空間での回帰計算において発生する多重共線形性の問題を回避するために提案した M3 を拡張したものとなっている。M3 は画像をベクトルデータとして扱うため、共分散行列が正則でない場合に正確

な最小 Mahalanobis 距離が直接求められず、この場合に特化した解法を提案していた。2D-M3 では、2次元主成分分析を用いて画像から直接2次元の基底を得るため、すべての固有値が求められ、最小 Mahalanobis 距離を直接計算することができる。2次元主成分分析は、データ間の相関だけでなく要素間の相関を圧縮に利用しているため、通常の主成分分析に比べて圧縮性に優れている。しかし実験により、2次元主成分分析では2次元の基底が安定に求められていないことが明らかとなった。このため、2次元の基底を用いて表した学習サンプルが正規分布から逸脱し、写像の精度が低下してしまう。2次元主成分分析を用いた写像計算の利点は、1)リアルタイムでの画像処理も可能な速度で写像計算が行えることができ、2)2次元の基底を用いるため、ボケ、ブレなどシフトインバリエントな画像の復元などに適しており、3)2D-M3 は M3 と同様に入出力の相関関係を学習し入出力の直積空間内で写像を計算するため、矩形だけでなく図2の(D)のような手書きの欠損も復元することが可能であり、矩形のみしか表現できない2DCCA[11]よりも幅広く応用することが出来ることなどが挙げられ、安定な2次元の基底を求めることが出来れば高速、高精度な写像計算が実現可能となる。今後は、安定な2次元基底を求める方法を検討する予定である。

## 参考文献

- [1] 天野敏之, 佐藤幸男, "固有空間法を用いた BPLP による画像補間," 信学論 D-II, vol.J85-D-II, no.3, pp.457-465, Mar. 2002.
- [2] N. Otsu and T. Kasvand, "Image restoration by multiplier regression analysis approach," Proc. ICPR, pp.155-158, Montreal, Canada, Jul. 1984.
- [3] S. Baker and T. Kanade, "Limits on super-resolution and how to break them," Proc. CVPR, vol.2, pp.372-379, South Carolina, USA, Jun. 2000.
- [4] 島野美保子, 長尾健司, 岡部孝弘, 佐藤いまり, 佐藤洋一, "任意照明下顔認識のための顔表面の位置相関を考慮した MAP 推定," 情報処理学会 CVIM 論文誌, vol.47, no.SIG10 (CVIM 15), pp.162-172, Jul. 2006.
- [5] D. A. Belsley, E. Kuh, and R. E. Welsch, "Regression diagnostics: identifying influential data and sources of collinearity," John Wiley & Sons, New York, 1980.
- [6] 岡藍子, 和田俊和, "Mahalanobis 距離最小化による高次元線形写像計算法:M3," 画像の理解・認識シンポジウム (MIRU'08), pp149-156, Jul. 2008
- [7] A. S. Hadi and R. F. Ling, "Some cautionary notes on the use of principal components regression," The American Statistician, vol.52, no.1, pp.15-19, Feb. 1998.
- [8] M. Borga, T. Landelius, and H. Knutsson, "A unified approach to PCA, PLS, MLR and CCA," Technical Report LiTH-ISY-R-1992, ISY, SE-581 83 Linköping, Sweden, Nov. 1997.
- [9] J. Yang, D. Zhang, A. F. Frangi, and J. Y. Yang, "Two-dimensional PCA: A new approach to appearance-based face representation and recognition," IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol.26, no.1, pp.131-137, Jan. 2004
- [10] J.Ye, R. Janardan, and Q. Li, "GPCA: An efficient dimension reduction scheme for image compression and retrieval," in Proc. ACM SIGKDD Int. Conf, Knowledge Discovery and Data Mining, Seattle, WA, 2004, pp.354-363
- [11] C.R. Zou, N. Sun, Z.H. Ji, L. Zhao, "2DCCA: A Novel Method for Small Sample Size Face Recognition", WACV'07, pp. 43, 2007.