

複数の射影変換行列を用いた 単眼移動カメラによるシーンの3次元復元

船本将平 金澤 靖

豊橋技術科学大学 知識情報工学系

複数の平面に対する射影変換行列を用いた単眼移動カメラの画像からの3次元シーンの復元方法を提案する。ここでは、平面として、床面や道路面などのような基準となる実平面だけでなく、それと平行な仮想平面群を考える。そして、これらの平面群に対する射影変換行列を用いる。これらの射影変換行列および平面の情報を用いて復元されたシーン形状は、カメラを基準としたものだけでなく、床面などを基準とした高さ情報を直接得ることができる。これは、移動ロボットなどにとって重要な障害物の直接得ることができることを意味する。また、基準となる平面情報が未知であり、かつカメラの移動の大きさのみ既知である場合でも、射影変換行列からそれらのパラメータを推定することで復元できる。実画像を用いた実験により、提案法の有効性を示す。

3-D Reconstruction based on Multiple Homographies using a Moving Camera

Shohei Funamoto Yasushi Kanazawa

Department of Knowledge-based Information Engineering
Toyohashi University of Technology, Toyohashi, Aichi 441-8580 Japan

We propose a 3-D reconstruction method based on multiple homographies for planes using a moving camera. We consider the following planes: one is a real plane such as a floor and a road, which is a reference plane; the others are virtual planes paralleled to the reference plane. Using the homographies on these planes, we can directly obtain the height of a reconstructed point from the reference plane. We can reconstruct the scene when the length of the translation vector is only known by decomposing the homography matrix of a dominant plane in the scene. We show the effectiveness of our method by real image experiments.

1. はじめに

自動車や移動ロボットにおいて、カメラなどのセンサーを用いて周囲の環境を認識することは大変重要な技術の一つであり、走行経路における障害物の検出だけでなく、ドライバの運転支援などに応用されている [9, 11, 12, 13, 14]. このような目的のセンサーとしては、ミリ波やレーザーなどのレーダーを用いる方法と、カメラを用いたものに大別できるが、空間分解能の高さや、得られる画像情報の他への応用が可能になるなど、カメラを用いた方法が期待されている。

カメラを用いた環境認識技術は、単眼カメラによるもの [11, 12, 16] とステレオカメラによるもの

[9, 13, 14] に大別できる。ステレオカメラを用いる場合、装置のサイズが大きくなったり、コストがかかるなどの問題があるのに対し、単眼カメラによる方法は、車載などを考えた場合、現在搭載されているバックモニターやドライブレコーダーなどに使われている周辺監視用のカメラをそのまま利用することができるため、比較的安価に構築可能となる。そこで本研究では、この単眼カメラを用いた環境の3次元復元を考える。

このようなカメラを用いた環境認識において、岡田ら [11] は、車載したカメラを用いて、道路面とそれに平行および垂直な仮想的な2平面を利用した障害物の検出法を提案した。彼らは、3次元復元は行わずに、仮想的な平面に対する2フレーム間の射影変換の関係を用いて、コントラストの高い領域の追跡を行い、その射影変換に一致する領域を判定す

¹441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1
Tel: (0532)44-6888, Fax: (0532)44-6873
E-mail: kanazawa@uttkie.tut.ac.jp

ることにより、画像内での障害物領域を検出している。一方、山口ら [16] も同様に車載した単眼カメラを用いて、オプティカルフローにより自車両の運動パラメータを推定後、その運動パラメータを用いて、シーン内の特徴点の3次元復元を行なっている。また、武田と金谷 [15] は、シーン内の平面に対する射影変換行列を最適に計算する方法を提案すると同時に、射影変換行列から平面のパラメータとカメラの運動を解析的に推定する方法を提案している。

本論文では、単眼で移動するカメラの画像を用い、複数の互いに平行な平面群に対する射影変換行列を用いた3次元シーンの復元方法を提案する。ここでは、床面などの基準となる平面と、それと平行な仮想平面群を考える。そして、2画像間の対応する特徴点において、どの射影変換行列による関係を満足するかを判定し、それに対応する平面の情報を用いることで、3次元復元を行う。このような方法で復元された点は、カメラを基準としたものだけではなく、床面などを基準とした、高さのある障害物などに関する高さ情報を直接得ることができる。また、基準となる平面の情報が未知であり、かつカメラの移動の大きさのみ既知である場合でも、射影変換行列を分解することで、復元できる復元が行える。実画像を用いた実験により、提案法の有効性を示す。

2. 射影変換行列による3次元復元

図1に示すように、平面 Π_0 上の点 $P(X, Y, Z)$ を移動前後のカメラで撮影した際の投影像を (x, y) , (x', y') とし、それらをベクトル

$$\mathbf{x} = (x/f, y/f, 1)^T, \quad \mathbf{x}' = (x'/f, y'/f, 1)^T \quad (1)$$

で表す。ここで f はカメラの焦点距離とする。良く知られているように、これらのベクトル \mathbf{x} , \mathbf{x}' は 3×3 の正則行列 \mathbf{H}_0 により

$$\mathbf{x}' = Z[\mathbf{H}_0 \mathbf{x}] \quad (2)$$

と表すことができる [3, 5]。ここで、 $Z[\cdot]$ はベクトルの第3要素を1とする正規化を表す。この行列

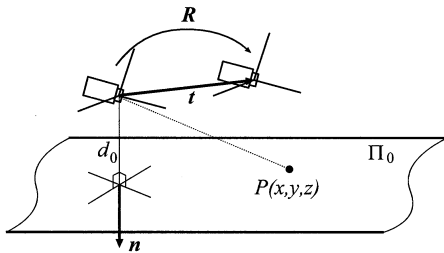


図1: カメラと座標系

\mathbf{H}_0 は射影変換行列と呼ばれ、カメラの移動情報と平面の情報を用いれば次のように書ける [3, 5]。

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{R}^T (d_0 \mathbf{I} - \mathbf{t} \mathbf{n}^T) \quad (3)$$

ここで、 d_0 は移動前のカメラから平面 Π_0 までの距離、 \mathbf{n} は平面 Π_0 の単位法線ベクトル、 \mathbf{R} はカメラの移動前後の回転を表す行列、 \mathbf{t} はカメラの移動（並進）ベクトルである。この $\{\mathbf{R}, \mathbf{t}\}$ を運動パラメータと呼ぶ。また、平面の単位法線ベクトル \mathbf{n} の向きは、平面上の点 P の位置ベクトル $\mathbf{r} = (X, Y, Z)^T$ に対し、 $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) > 0$ となるように定める。ただし、ベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} の内積を (\mathbf{a}, \mathbf{b}) で表記している。

逆に、平面 Π_0 上の点 P の投影像が \mathbf{x} , \mathbf{x}' であるとき、その点 P の3次元位置 $\mathbf{p} = (X, Y, Z)^T$ は次式で与えられる [5]。

$$\mathbf{p} = \frac{d_0 \mathbf{x}}{(\mathbf{n}, \mathbf{x})} \quad (4)$$

3. 仮想平行平面群と高さによるグルーピング

今、複数の画像間対応が同じ射影変換行列 \mathbf{H}' による式 (2) の関係を満足している場合を考える。このことは、その射影変換行列 \mathbf{H}' の元となった平面 Π' 上にそれらの復元点が全て載っていることを意味する。平面 Π' のパラメータを $\{\mathbf{n}', d'\}$ とすれば、これは、それらの全ての復元点が高さ d' を持っていることがわかる。そこで、この関係を利用して画像間の対応を射影変換行列によってグルーピングすることで、点を復元せずに、直接高さによるグルーピング結果を求めることを考える。

本研究では、図2のように、実在の平面 Π_0 と同じ法線 \mathbf{n} を持ち、平面までの距離 d_α を

$$d_\alpha = d_0 - \alpha \delta \quad (5)$$

と変化した仮想的な平面群 $\{\Pi_\alpha\}$ を考える。ここで、 δ は実平面を含む平面間の間隔を表し、この間

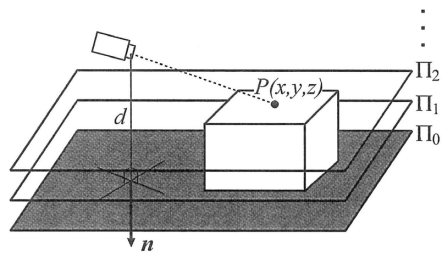


図2: 仮想平行平面群

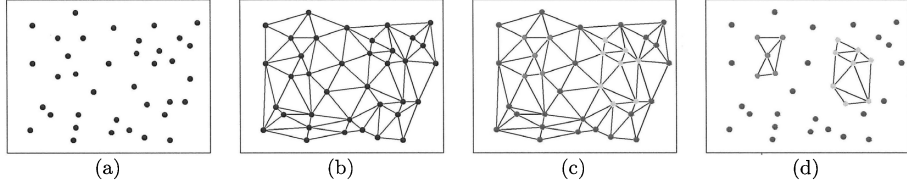


図 3: グルーピングの概略: (a) 画像上の特徴点, (b) ドロネー三角形分割した結果, (c) ノードに高さを与える (色で区別), (d) 障害物検出結果

隔 δ を必要に応じて変えることで, 復元点の高さの分解能を変えることができる. この平面 Π_α に対する射影変換行列 H_α は次式で計算できる.

$$H_\alpha = R^\top (d_\alpha I - tn^\top), \quad (6)$$

この実平面およびそれに平行な仮想平面群 $\{\Pi_\alpha\}$ に対する射影変換 $\{H_\alpha\}$ を用い, 個々の画像間の対応に対し, どの射影変換行列が式 (2) の関係を満足するかを調べることで, 高さによってグルーピングされた対応を直接求めることができる.

4. カメラの運動と基準平面のパラメータの推定

前節では, 基準となる平面に対し高さのみ異なる平面群を考えたが, 一般にカメラの移動によってその基準となる平面自体が変化してしまう. これは, 障害物の検出を目的として考えた場合に問題となる.

一般に, 画像内の平面に対する射影変換行列が得られている場合, その射影変換行列から, 平面のパラメータ $\{n, d\}$ と, 並進 t の大きさを 1 としたカメラの運動パラメータ $\{R, t\}$ を解析的に計算することができる [5]. この解は 8 組計算できるが, 本質的に異なる解は 2 組, すなわち現実の平面に対する解と非現実の平面に対する解があり, それらの判定が必要となる [5].

本研究では, カメラの運動の推定 (付録 A 参照) と平面パラメータの推定 (付録 B 参照) を推定を交互に行うことにより, 現実の平面に対する解のみを直接求めることを考える. また, 平面までの距離 d あるいは並進の大きさ $\|t\|$ が既知でないと, スケールを含めて正しく推定できないため, ここでは, 並進の大きさ $\|t\|$ を既知であるとする. これらのパラメータの推定の手順を以下に示す.

- (1) RANSAC[1] などを用いて, 画像間対応から, 最も大きな平面領域 (基準平面) に対する射影変換行列 H_d を求める.
- (2) 基準平面のパラメータを ν を初期値 ν_0 にとり, 得られた H_d を分解して, スカラの初期値

s と, 運動パラメータの初期推定値 $\{R, t\}$ を計算する.

- (3) 以下を収束するまで繰り返す.

- (a) 基準平面パラメータの推定値 ν' を次式で求める.
- (b) 得られた推定値 ν' を用いて, 射影変換行列 H_d を分解し, 運動パラメータおよびスカラの推定値 R', t', s' を求める.
- (c) ϵ を充分小さな数としたとき, もし,

$$\|\nu' - \nu\| < \epsilon \quad \text{かつ} \quad \|R' - R\| < \epsilon$$

$$\text{かつ} \quad \|t' - t\| < \epsilon \quad (7)$$

であれば終了. そうでなければ, 次のように更新する.

$$\nu \leftarrow \nu', \quad R \leftarrow R', \quad t \leftarrow t', \quad s \leftarrow s' \quad (8)$$

5. 基準平面上の障害物の検出

3 節で述べたように, 複数の (仮想) 平行平面に対する射影変換行列を用いて, どの射影変換行列が式 (2) を満足したかを調べることによって, 復元点群をグループ化できるだけでなく, 復元点の高さを直接得ることができる. この性質を利用することにより, 例えば, 基準平面として床や道路の平面を取り, その平面と平行な平面を仮想平行平面群として用意することにより, 床や道路平面上の障害物を容易に検出することが可能となる. 図 3 および以下にその手順を示す.

- (1) 3次元復元した点群に対し, 基準平面 Π_0 に対し, 正射影する (図 3(a)). これは基準平面の法線 n を用いれば, 復元点 r の基準平面への射影 r_{Π_0} は次式で求まる.

$$r_{\Pi_0} = (I - nn^\top)r \quad (9)$$

ただし, I は単位行列とする.

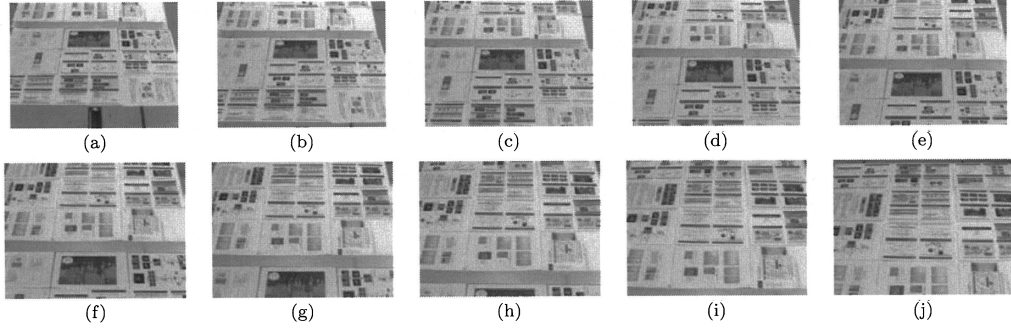


図 4: 傾斜のあるシーンの画像. (a) から (j) の順に 100[mm] ずつ前進しながら撮影.

- (2) 正射影後の点群に対し, ドロネー三角形分割を行い, 対応をノード, ドロネー三角形分割で張られた辺をアークとするグラフを考える (図 3(b)).
- (3) このグラフにおいて, 復元した点の基準平面からの高さを, 対応するノードの特徴量として与える (図 3(c)).
- (4) このグラフにおいて, 特徴量 (高さ) があるしきい値以下となるノードを取り出し, そのノードから出ている辺を全て削除する (図 3(d)).
- (5) 残ったそれぞれの部分グラフを個々の障害物とする.

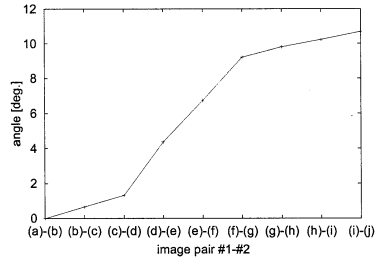


図 5: 基準となる平面の角度の変化

- (5) 各対応 $\{x_j, x'_j\}$ に対し, 次の射影変換の関係

$$x'_j \times H_i x_j < \epsilon \quad (11)$$

を満足する射影変換行列 H_i を見つける. ここで, ϵ は微小な正の数とする. そして, それに対応する平面の情報 $\{n, d_i\}$ を用いて 3 次元復元すると共に, 基準平面からの高さ情報 d_i を記録する.

- (6) 復元位置と, その基準平面からの高さ d_i を用いて, グルーピングを行い, 障害物の検出を行う.

以上の手順を繰り返すことにより, 移動する単眼カメラから, シーンの 3 次元形状の連続的な復元と, 障害物の検出を同時に行うことが可能となる.

6. 全体の手順

以上をまとめると, 単眼移動カメラからの画像から, シーンの 3 次元復元および障害物の検出方法は以下の通りとなる. ただし, 4 節の通り, フレーム間でのカメラの移動の大きさ $\|t\|$ のみ既知とする.

- (1) 移動前後の 2 画像から, それぞれ特徴点を抽出し [2, 10], エピ極線拘束条件を拘束条件とした RANSAC などにより, 対応を決定する.
- (2) 得られた対応から RANSAC により, シーン内の基準となる平面 (最も大きな面積を持つ平面) に対する射影変換行列 $H_d (=H_0)$ を求める.
- (3) 射影変換行列 H_d およびカメラの移動の大きさ $\|t\|$ を用い, 基準となる平面のパラメータ $\{n, d\}$ と, カメラの運動パラメータ $\{R, t\}$ を推定する.
- (4) 推定された $\{n, d\}$ および $\{R, t\}$ を用い, 基準平面に対して高さが d_i だけ異なる仮想平行平面群に対する射影変換行列 H_i を次式で求める.

$$H_i = R^T (d_i I - t n^T) \quad (10)$$

ただし, 仮想平行平面群の間隔を δ とするとき, 高さ d_i は $d_i = d - i\delta$ とする.

7. 実画像実験

ここでは, まず坂のあるシーンにおいて, カメラが移動することにより, 基準となる平面が変化する場合について, 基準となる平面のパラメータが正しく求まるかについて実験を行った. また連続する移動においてカメラの軌跡も含めたシーンの 3 次元形状及び障害物が正しく求まるかについて実験を行った.

以下の実験では, カメラに Point Grey Research 社の Flea2 に焦点距離 6 [mm] のレンズを用い,

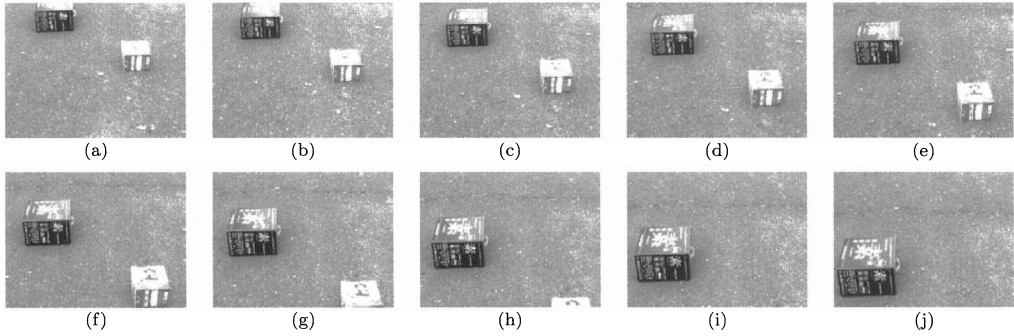


図 6: 直進. (a) から (j) の順に 100[mm] ずつ前進しながら撮影.

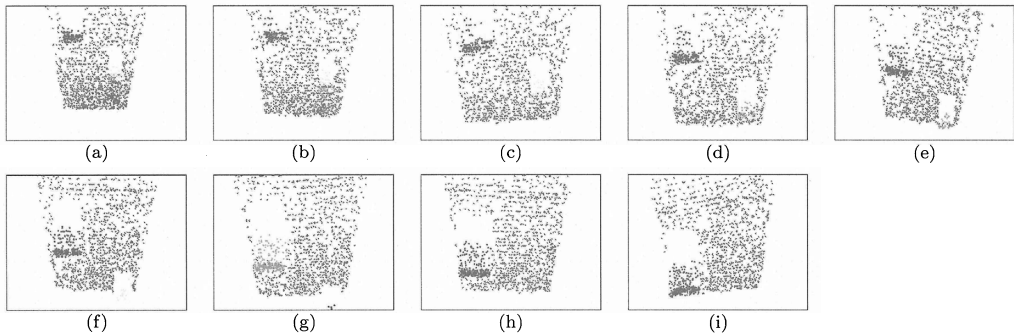


図 7: 図 6 に対する復元結果.

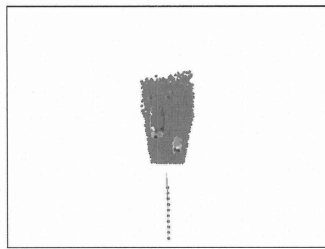


図 8: 図 6 から復元したシーンとカメラの軌跡

640×480 の画像を撮影した. また OpenCV のライブラリを用いて焦点距離を求めた.

7.1 基準となる平面が変化する場合

基準となる平面 (床) の前方に 9.41 度の傾斜のある板を置き, 撮影用の治具を用いて 100[mm] ずつ直進しながら撮影した 10 枚の画像を図 4 に示す. この実験では, 隣接するフレーム間の特徴点抽出並びに対応の決定は SIFT [10] を用い, 得られた対応から, RANSAC によりエビ極線拘束条件を満足しない対応を除去した.

この画像系列から, 隣合うフレーム間で, 基準と

表 1: 図 6 から得られた運動パラメータ

画像対	並進 [mm]			回転 [deg]	
	x	y	z	X 軸	Y 軸
(a)-(b)	-1.54	-0.02	99.98	0.04	-0.23
(b)-(c)	2.87	0.66	99.95	0.07	-0.20
(c)-(d)	-0.62	-5.84	99.82	-0.12	-0.40
(d)-(e)	-1.86	0.07	99.98	0.05	-0.19
(e)-(f)	2.00	2.97	99.93	0.03	-0.08
(f)-(g)	-0.04	-1.43	99.99	0.00	-0.38
(g)-(h)	-1.29	-3.21	99.94	-0.05	-0.13
(h)-(i)	-0.21	-2.76	99.96	-0.02	-0.25
(i)-(j)	-2.91	-8.53	99.59	-0.21	-0.16

なる平面のパラメータを求めた結果を図 5 に示す. このグラフでは, 基準となる床面の角度の変化の推移を表している. 途中の画像間では, 床面と傾斜板の両方が写っており, それらから基準となる平面の射影変換行列が計算されるため, 徐々に傾斜が増えるように推移していることがわかる. また, ほぼ傾斜した板のみが写っている画像 (i) と (j) 間では, 得られた面の角度が 10.70 度 (真値: 9.41 度) となった. ほぼ正しい値が得られているが, 誤差の原因と

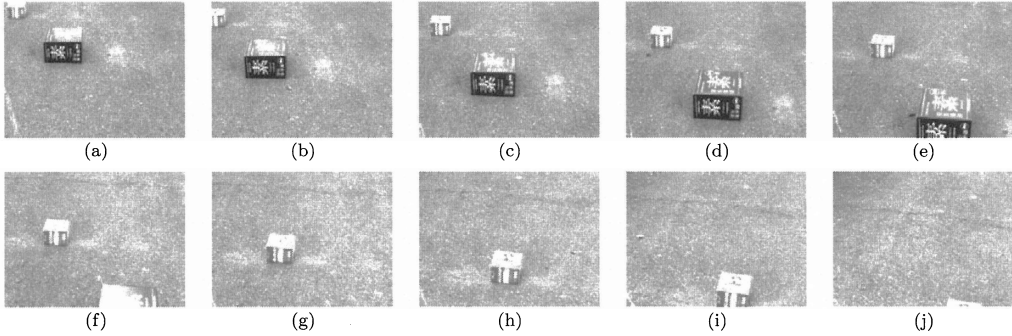


図 9: 左折. (a) から (j) の順に大きさ 100[mm] ずつ移動しながら撮影.

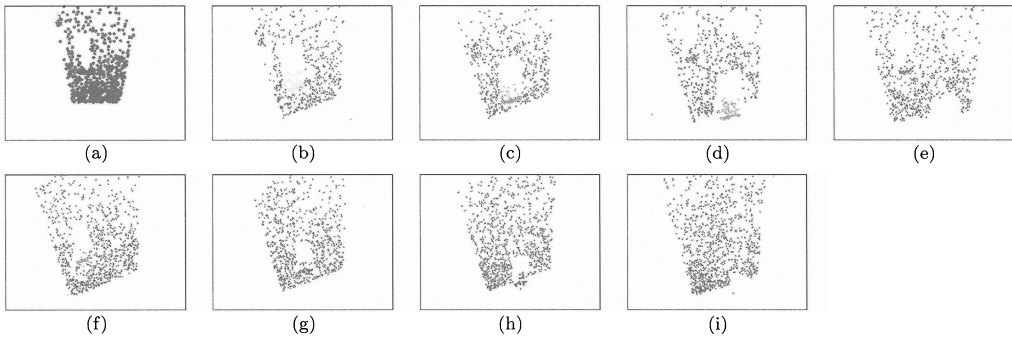


図 10: 図 9 に対する復元結果.

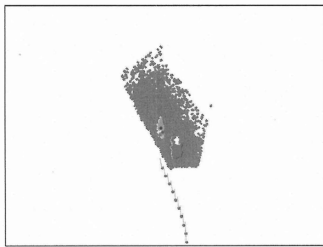


図 11: 図 9 から復元したシーンとカメラの軌跡

しては、カメラの焦点距離のキャリブレーション誤差や運動パラメータの推定誤差の影響などが考えられる。

7.2 連続した移動に対する実験

基準となる平面（道路面）上に障害物に見立てた 2 つの箱を置き、100[mm] ずつ直進しながら撮影した 10 枚の画像を図 6 に示す。この実験においても、隣接するフレーム間での特徴点抽出並びに対応の決定は SIFT[10] を用い、得られた対応から、RANSAC によりエッジ極線拘束条件を満足しない対応を除去している。

表 2: 図 9 から得られた運動パラメータ

画像対	並進 [mm]			回転 [deg]	
	x, y, z			(X 軸, Y 軸)	
(a)-(b)	6.74	-16.62	199.19	-0.94	-0.17
(b)-(c)	-8.96	-47.84	193.98	2.71	0.00
(c)-(d)	-9.10	-52.05	192.89	2.36	0.23
(d)-(e)	-9.15	-57.44	191.35	2.41	-0.45
(e)-(f)	-5.64	-75.48	185.12	-0.48	-0.16
(f)-(g)	-9.49	-65.37	188.77	2.44	-0.14
(g)-(h)	-17.93	-77.57	183.46	2.31	-0.20
(h)-(i)	-17.21	-87.38	179.07	2.36	-0.01
(i)-(j)	-13.49	-78.18	183.58	2.75	0.17

この実験では、各画像間での移動量 100[mm] を用いて、平面パラメータと運動パラメータの両方を推定している。画像 (a) と (b) を用いて平面パラメータを推定した結果を表 3 に、各フレーム間で推定された運動パラメータを表 1 に示す。なお表 1 においては、わかりやすいように移動量を道路面と平行な座標系に直している。見てわかる通り、この実験ではカメラの運動がほぼ正しく推定できていることがわかる。また、それぞれの隣接する画像対で復元した

形状を図7に示す。この図ではグルーピングにより検出した個々の障害物を色により示している。見てわかる通り、ほぼ正しくグルーピングされていることがわかる。これらの復元点をまとめて、同時にカメラの移動軌跡を合せてプロットした図を図8に示す。図中の下の点がカメラの位置を表し、線分がカメラの向きを表している。この例において、初期カメラ位置からの手前の物体までの距離は1600[mm]、奥の物体までの距離は2000[mm]であったのに対し、復元したシーン形状からはそれぞれ1580.09[mm]、2070.35[mm]であり、ほぼ正しい位置で検出されていることがわかる。

次に、左折しながら撮影した場合の画像を図9に示す。この画像から得られた初期位置における平面パラメータを表3に、各フレーム間での移動を表2に示す。また、それぞれの隣接する画像対で復元した形状を図10に示す。この例においても、ほぼ正しくグルーピングされていることがわかる。カメラの移動軌跡を合せてプロットしたものが図11であり、この例では、初期カメラ位置からの手前の物体までの距離は2100[mm]、奥の物体までの距離は2900[mm]であったのに対し、復元したシーン形状からはそれぞれ2054.23[mm]、2823.32[mm]であり、同様にほぼ正しい位置で検出できている。

8. おわりに

本論文では、基準となる実平面と複数の仮想平面に対する射影変換行列を用いた単眼移動カメラの画像からの3次元シーンの復元方法を提案した。ここでは、基準となる実平面は床面や道路面などとし、それと等間隔で、高さのみ異なる平行な仮想平面群を考慮することにより、復元された点は、カメラからの3次元位置だけでなく、その基準面からの高さの情報も直接持つことができる。これにより、移動ロボットなどに必要な障害物などの情報を直接得ることができる。また、基準となる平面の情報が未知であり、かつカメラの移動の大きさのみ既知である場合においても、それらのパラメータを推定する方法を用いることで、復元可能であることを示した。そして、実画像を用いた実験により、提案法の有効性を確認した。

謝辞

貴重なご意見を頂いた岡山大学の金谷健一教授に感謝いたします。

表 3: 初期位置における平面のパラメータ

実験	平面の法線ベクトル	距離
図 6	$(-0.856747, -0.0191318, 0.515383)^T$	1011.18
図 9	$(-0.870537, 0.0118501, 0.49196)^T$	1024.46

参考文献

- [1] M. A. Fischler, R. C. Bolles, Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography, *Comm. ACM*, **24-6**, 381-395, 1981.
- [2] C. Harris, M. Stephens, A combined corner and edge detector, *Proc. 4th Alvey Vision Conf.*, August 1988, Manchester, pp. 147-151.
- [3] R. Hartley, A. Zisserman, *Multiple View Geometry*, Cambridge University Press, 2000.
- [4] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K. 1993.
- [5] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, 1996.
- [6] 金谷健一, これなら分かる最適化数学 — 基礎原理から計算手法まで —, 共立出版, 2005.
- [7] 金澤 靖, 金谷健一, 大域的な整合性を保証するロバストな画像の対応づけ, 情処学論: コンピュータビジョンとイメージメディア, vol.44, no.Sig 17 (CVIM8), pp.70-77, Dec. 2003.
- [8] 金澤 靖, 金谷健一, コンピュータビジョンのための画像の特徴点の抽出, 信学誌, vol.87, no.12, pp.1043-1048, Dec. 2004.
- [9] 片平 聡, 高橋 靖, 並木信夫, 柴田英司, ステレオ画像認識運転支援システムのハードウェア開発について, 第14回画像センシングシンポジウム, 2008年6月, 横浜, pp.IN2-15-1-IN2-15-5.
- [10] D.G. Lowe, Distinctive image features from scale-invariant keypoint, *Int. J. Comput. Vision*, **60-2**, 91-110, 2004.
- [11] 岡田 隆三, 谷口 恭弘, 小野口 一則, 仮想平面追跡法を用いた単眼車載カメラによる障害物検知, 信学技報, PRMU2001-89, pp.29-36, Sept. 2001.
- [12] 岡田 隆三, 古川 賢司, 谷口 恭弘, 小野口 一則, 複視と消失線に基づく車載単眼障害物検出, 信学論 D-II, vol.J87-D-II, no.12, pp.2165-2175, Dec. 2004.
- [13] 斎藤 徹, 森光 登, 関口 幸弘, 丸山 匡, 加藤 寛基, 松浦 宗徳, 柴田 英司, ステレオ画像認識運転支援システムのソフトウェア開発について, 第14回画像センシングシンポジウム, 2008年6月, 横浜, pp.IN2-14-1-IN2-14-4.
- [14] 関 晃仁, 奥富 正敏, 道路面情報に基づくステレオ動画像を用いた車両の前方環境認識, 情処論: CVIM, vol.1, no.1, pp.1-9, June 2008.
- [15] 武田 佐知男, 金谷 健一, くりこみ法による平面の3次元運動解析, 情処研報, 94-CV-90, pp.41-48, Sept. 1994.
- [16] 山口 晃一郎, 加藤 武男, 二宮 芳樹, 車載単眼カメラによる車両前方の障害物検出, 情処研報, 2005-CVIM-151, pp.69-76, Nov. 2005.

A カメラの運動の推定

移動前後の画像間の対応から得られた最も大きな領域を占める平面に対する射影変換行列を H_d とする. このように画像から計算された射影変換行列 H_d は, 定数倍の不定性を持つことから, 一般に $\|H_d\|=1$ として求めることが多い¹. したがって, この射影変換行列 H_d は

$$H_d = s'R^T (dI - tn^T) \quad (12)$$

と表せる. 両辺を d で割って, $s = s'd$, $\nu = n/d$ と置けば, 次のように書き直せる.

$$H_d = sR^T (I - t\nu^T) \quad (13)$$

この式 (13) を整理して回転行列 R を消去すると

$$\frac{1}{s^2} H_d^T H_d + (\nu t^T + t\nu^T) - \|t\|^2 \nu\nu^T = I \quad (14)$$

となり, まとめると, 次の非線形連立方程式が得られる.

$$F_i(\mathbf{u}) = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (15)$$

ただし,

$$t = (t_1, t_2, t_3)^T, \quad \mathbf{u} = (\xi, t_1, t_2, t_3)^T$$

であり,

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{u}) = \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_1 \xi + 2\nu_1 t_1 - \nu_1^2 (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) - 1 \\ F_2(\mathbf{u}) = \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_2 \xi + \nu_2 t_1 + \nu_1 t_2 - \nu_1 \nu_2 (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) \\ F_3(\mathbf{u}) = \mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_3 \xi + \nu_3 t_1 + \nu_1 t_3 - \nu_1 \nu_3 (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) \\ F_4(\mathbf{u}) = \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_2 \xi + 2\nu_2 t_2 - \nu_2^2 (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) - 1 \\ F_5(\mathbf{u}) = \mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_3 \xi + \nu_3 t_2 + \nu_2 t_3 - \nu_2 \nu_3 (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) \\ F_6(\mathbf{u}) = \mathbf{h}_3^T \mathbf{h}_3 \xi + 2\nu_3 t_3 - \nu_3^2 (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) - 1 \end{cases} \quad (16)$$

$$H_d = (\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \mathbf{h}_3), \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T, \quad \xi = 1/s^2 \quad (17)$$

と置いた.

これらをガウスニュートン法などにより解き, 得られた解 $\hat{\mathbf{u}}$ を用いれば, カメラの移動 (並進) の推定値 $\hat{t} = (\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3)^T$ を求めることができる.

また, 式 (13) を変形すると

$$\mathbf{R} = \frac{1}{s} (I - t\nu^T)^{-T} H_d^T \quad (18)$$

となり, これにより推定した行列を $\tilde{\mathbf{R}}$ とする. 一般に観測データに誤差があると, 計算した $\tilde{\mathbf{R}}$ は回

転行列にはならない. そこで, 得られた行列 $\tilde{\mathbf{R}}$ を特異値分解し, その結果を

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{V} \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \mathbf{U}^T \quad (19)$$

とする. ここで \mathbf{V}, \mathbf{U} は直交行列であり, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ とする. また $\text{diag}(a, b, c)$ は, a, b, c をその順に対角要素に持つ対角行列を表す. 回転行列 \mathbf{R} の推定値 $\hat{\mathbf{R}}$ は, 次式による最小二乗法で求めることができる [4].

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{V} \text{diag}(1, 1, \det(\mathbf{V}\mathbf{U}^T)) \mathbf{U}^T \quad (20)$$

ここで, $\det(\mathbf{A})$ は行列 \mathbf{A} に対する行列式を表す.

B 基準平面パラメータの推定

前節とは逆に, カメラの運動 $\{\mathbf{R}, t\}$ が既知で, 基準平面のパラメータ $\{n, d\}$ が未知である場合を考える. このとき, $\nu (=n/d)$ を考えると, 画像間対応から計算した基準平面に対する射影変換行列 H_d と, カメラの運動パラメータ $\{\mathbf{R}, t\}$, 基準平面のパラメータ ν には式 (13) の関係があり, それを変形すると次式を得る.

$$I - \frac{1}{s} \mathbf{R} H_d = t\nu^T \quad (21)$$

そして, 両辺に左から t^T を掛ければ

$$t^T \left(I - \frac{1}{s} \mathbf{R} H_d \right) = t^T t\nu^T = \|t\|^2 \nu^T \quad (22)$$

となり, これを整理すれば, 基準平面のパラメータの推定値 $\hat{\nu}$ は次式で計算できる.

$$\hat{\nu} = \frac{1}{\|t\|^2} \left(I - \frac{1}{s} H_d^T \mathbf{R}^T \right) t \quad (23)$$

¹行列 \mathbf{A} に対する $\|\mathbf{A}\|$ はフロベニウスノルム $\sqrt{\sum_{ij} A_{ij}^2}$ と定義する.