

# 直径 $d$ 部分グラフ最大化問題の計算複雑さ

三溝 和明<sup>†</sup>, 宮野 英次<sup>†</sup>, 朝廣 雄一<sup>††</sup>

<sup>†</sup> 九州工業大学大学院情報工学研究院

<sup>††</sup> 九州産業大学情報科学部

本稿では,  $n$  頂点の連結無向グラフ  $G$  と整数  $d$  が与えられたとき, 直径が  $d$  以下に限定され, 頂点数が最大となる  $G$  の部分グラフを見つけることを目的とする直径  $d$  部分グラフ最大化問題 (MAX  $d$ -DIAMETER) を考える.  $d = 1$  の場合は, 本問題は最大クリーク問題と同一の問題である. 本稿では, (i) 任意の  $\varepsilon > 0$  および  $d \geq 2$  について,  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$  でなければ, MAX  $d$ -DIAMETER に対して多項式時間で動作する  $O(n^{1-\varepsilon})$  近似アルゴリズムは存在しないこと, および (ii) 入力を弦グラフに制限した場合にも,  $d$  が偶数の場合には, MAX  $d$ -DIAMETER は  $\mathcal{NP}$  困難となることを示す. また, (iii)  $d$  が奇数の場合には, 弦グラフに対しても, MAX  $d$ -DIAMETER は  $\mathcal{P}$  となり, (iv) 弦グラフの部分クラスである区間グラフに対しては, MAX  $d$ -DIAMETER は  $\mathcal{P}$  となることを示す. さらに, (v)  $k \geq 2$  について,  $k$  部グラフに対して MAX  $d$ -DIAMETER は  $\mathcal{NP}$  困難となることを示す.

## Complexity of Max $d$ -Diameter Subgraph Problems

Kazuaki SAMIZO<sup>†</sup> Eiji MIYANO<sup>†</sup> Yuichi ASAHIRO<sup>††</sup>

<sup>†</sup> Department of Systems Design and Informatics, Kyushu Institute of Technology

<sup>††</sup> Department of Social Information Systems, Kyushu Sangyo University

The paper studies the maximum  $d$ -diameter subgraph problem (MAX  $d$ -DIAMETER for short) which is defined as follows: Given an  $n$ -vertex graph and a positive integer  $d$ , the goal is to find its largest subgraph of a fixed diameter  $d$ . If  $d = 1$ , the problem is identical to the maximum clique problem. In this paper, we prove that (i) for all  $\varepsilon > 0$  and  $d \geq 2$ , there is no polynomial time  $O(n^{1-\varepsilon})$  approximation algorithm for MAX  $d$ -DIAMETER unless  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ , and that (ii) for chordal graphs, MAX  $d$ -DIAMETER is still  $\mathcal{NP}$ -hard if  $d$  is even. We also prove, however, that (iii) if  $d$  is odd, then MAX  $d$ -DIAMETER can be solved in polynomial time even for chordal graphs, and that (iv) it is in  $\mathcal{P}$  for interval graphs, which is a subclass of chordal graphs. Furthermore, we show that (v) it is  $\mathcal{NP}$ -hard for  $k$ -partite graphs of  $k \geq 2$ .

### 1 はじめに

与えられたグラフの中からある性質を持った部分グラフを発見する問題が数多く提案されており, 組合せ最適化やグラフ最適化の中心的話題である. 最大クリーク問題 (MAX CLIQUE) も代表的な問題の一つであり, 多くの研究がある<sup>2)</sup>. 連結無向グラフ  $G = (V, E)$  の頂点数を  $n$ , 2 頂点  $u, v \in V$  間の無向辺を  $(u, v)$  と表す.  $u, v$  の最短経路の長さを  $dist_G(u, v)$  と表記し, グラフ  $G$  の直径を  $diam(G) = \max_{u, v \in V} dist_G(u, v)$  と定義する.  $G$  の中のクリーク  $C = (V^c, E^c)$  とは,  $V^c \subseteq V$ ,  $E^c \subseteq E$ , かつ  $E^c = V^c \times V^c$  を満たす部分グラフである. すなわち,  $diam(C) = 1$  となる. MAX

CLIQUE とは, 与えられたグラフの中から (頂点数が) 最大のクリークを発見する問題であり, 最も有名な  $\mathcal{NP}$  困難問題の一つである<sup>8)</sup>. 最も良い近似アルゴリズムの近似比は  $O(n(\log \log n)^2 / (\log n)^3)$  であるが<sup>3)</sup>,  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$  とすると, 任意の  $\varepsilon > 0$  について  $n^{1-\varepsilon}$  近似解を求めることは  $\mathcal{NP}$  困難であることが示されている<sup>7, 11)</sup>. しかし, 次数が固定されたグラフ, 平面グラフ, 弦グラフ (とその部分クラス) である場合には, 多項式時間で最大クリークを求めることが可能である<sup>5)</sup>.

本稿では, MAX CLIQUE を含んだより一般的な問題である直径  $d$  部分グラフ最大化問題 (MAX  $d$ -DIAMETER) を考える: グラフ  $G$  と正整数  $d$  が与

えられたとき、直径  $diam(G)$  が  $d$  以下に限定され、頂点数が最大となる  $G$  の部分グラフを発見することを目的とする。  $d = 1$  のとき、すなわち、MAX 1-DIAMETER は MAX CLIQUE と同一の問題である。最も一般的な場合には MAX CLIQUE を含むため、自明に  $\mathcal{NP}$  困難となる。しかし、直径  $d$  を固定した場合の計算複雑さはわからない。また、入力されるグラフクラスを限定した場合には困難性を保持するのか、それとも多項式時間のアルゴリズムが存在するかを調べる必要がある。

本稿ではいくつかのグラフクラスに対する計算複雑さを調べる。主な結果は以下である。

- 任意の  $\varepsilon > 0$  および  $d \geq 2$  について、  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$  とすると、MAX  $d$ -DIAMETER に対して多項式時間で動作する  $O(n^{1-\varepsilon})$  近似アルゴリズムは存在しない。
- 奇数  $d \geq 3$  について、入力グラフ  $G$  が弦グラフのとき MAX  $d$ -DIAMETER に対して多項式時間で動作する最適アルゴリズムが存在する。
- 任意の  $\varepsilon > 0$  および偶数  $d \geq 2$  について、入力グラフ  $G$  を弦グラフに限定しても、  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$  とすると、MAX  $d$ -DIAMETER に対して多項式時間で動作する  $O(n^{1-\varepsilon})$  近似アルゴリズムは存在しない。
- 任意の  $\varepsilon > 0$  および偶数  $d \geq 3$  について、入力グラフ  $G$  を2部グラフに限定しても、  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$  とすると、MAX  $d$ -DIAMETER に対して多項式時間で動作する  $O(n^{1-\varepsilon})$  近似アルゴリズムは存在しない。

グラフクラスと直径  $d$  が小さいときの計算複雑さを Table 1 にまとめる。区間グラフは、各頂点が実数直線上の区間に対応し、区間が重なっているときに対応する頂点間に辺を加えたグラフである。スプリットグラフは最大クリークと独立頂点集合のみで構成されるグラフである。弦グラフは長さ 4 以上のサイクルを含まないグラフである。  $k$  部グラフは、頂点集合が  $k$  個に分割され、個々の頂点部分集合内には辺を持たないグラフである。文献<sup>1)</sup> では一般のグラフに対する  $\mathcal{NP}$  困難性が示されているが、グラフクラスに対する言及はまったく無い。また多くの証明部分で不正確な部分があることに注意する。また、文献<sup>1)</sup> では近似困難性について示されていないが、本稿では近似困難性も示す。

## 2 準備

### 2.1 諸定義

連結無向グラフ  $G = (V, E)$  について、  $G$  の頂点集合を  $V(G)$ 、辺集合を  $E(G)$  とする。また、単に、それぞれを  $V$  と  $E$  で表すこともある。本稿では頂点数を  $|V| = n$ 、辺数を  $|E| = m$  とする。長さ  $\ell$  の道  $P$  は頂点の列  $P = \langle v_0, v_1, \dots, v_\ell \rangle$  で表され、長さ  $\ell$  のサイクル  $C$  も同様に  $C = \langle v_1, v_2, \dots, v_\ell, v_1 \rangle$  と表される。本稿では単純なサイクル、すなわち、異なる  $i$  と  $j$  についてサイクル  $C$  に含まれる任意の 2 頂点が  $v_i \neq v_j$  となるサイクルのみを考える。また、  $P = \langle v_0, v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_\ell \rangle$  を 2 つの部分列  $P_1 = \langle v_0, v_1, \dots, v_i \rangle$  と  $P_2 = \langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_\ell \rangle$  の接続  $P = P_1 \circ P_2 = \langle v_0, v_1, \dots, v_i \rangle \circ \langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_\ell \rangle$  として表す。  $G$  の最大次数を  $deg_{\max}(G)$  とする。

2 つのグラフ  $G$  と  $G^s$  について、  $V(G^s) \subseteq V(G)$  かつ  $E(G^s) \subseteq E(G)$  が成り立つとき  $G^s$  を  $G$  の部分グラフと呼ぶ。  $G$  の部分グラフ  $G^s = (V^s, E^s)$  について、  $E^s = V^s \times V^s$  となるとき  $G^s$  および  $V^s$  をそれぞれクリークおよびクリーク集合と呼び、  $V^s \times V^s \cap E = \emptyset$  となるとき  $G^s$  および  $V^s$  をそれぞれ独立頂点グラフおよび独立頂点集合と呼ぶ。

**定義 1** グラフ  $G$  に含まれる 4 頂点以上からなるすべてのサイクルが必ず弦 (chord) を持つとき、  $G$  は弦グラフ (chordal graph) と呼ばれる。ここで、弦とはサイクルの頂点の中で隣接しない 2 頂点間に存在する辺のことである。 □

**定義 2** グラフ  $G = (V, E)$  の頂点集合  $V$  がクリーク集合  $V_1$  および独立頂点集合  $V_2$  に分割できるとき ( $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $V_1 \cup V_2 = V$ )、  $G$  はスプリットグラフ (split graph) と呼ばれる。 □

**事実 1** スプリットグラフは弦グラフの部分クラスである。

**定義 3** グラフ  $G = (V, E)$  に対して、実直線上の閉区間集合  $\mathcal{I}$  で以下を満たすものが存在するとき、  $G$  は区間グラフ (interval graph) と呼ばれる。

- $V$  と  $\mathcal{I}$  の間に 1 対 1 対応が存在する。
- 2 頂点  $u, v \in V$  に対して 2 つの閉区間  $I_u, I_v \in \mathcal{I}$  がそれぞれ対応するとする。  $I_u \cap I_v \neq \emptyset$  であるとき、かつそのときに限り、対応する  $u, v$  の間に辺  $(u, v) \in E$  が存在する。

Table 1  $d = 1, 2, \dots, 5$  の場合の計算複雑さ

直径 $d$	区間グラフ	スプリットグラフ	弦グラフ	2部グラフ	3部グラフ
1	$\mathcal{P}^{(5)}$	$\mathcal{P}^{(5)}$	$\mathcal{P}^{(5)}$	$\mathcal{P}^{(注5)}$	$\mathcal{P}^{(注5)}$
2	$\mathcal{P}$ (本稿)	$\mathcal{NP}$ 困難 <sup>1)</sup> (注1)	$\mathcal{NP}$ 困難 <sup>1)</sup> (注1)	$\mathcal{P}^{4, 6)}$	$\mathcal{NP}$ 困難 (本稿)
3	$\mathcal{P}$ (本稿)	$\mathcal{P}^{(注5)}$	$\mathcal{P}$ (本稿)	$\mathcal{NP}$ 困難 <sup>1)</sup> (注3)	$\mathcal{NP}$ 困難 <sup>1)</sup> (注3)
4	$\mathcal{P}$ (本稿)	–	$\mathcal{NP}$ 困難 <sup>1)</sup> (注2)	$\mathcal{NP}$ 困難 (本稿) <sup>(注4)</sup>	$\mathcal{NP}$ 困難 (本稿) <sup>(注4)</sup>
5	$\mathcal{P}$ (本稿)	–	$\mathcal{P}$ (本稿)	$\mathcal{NP}$ 困難 <sup>1)</sup> (注3)	$\mathcal{NP}$ 困難 <sup>1)</sup> (注3)

(注1) 文献<sup>1)</sup> で証明されているグラフがスプリットグラフであることから成り立つ. (注2) 文献<sup>1)</sup> で証明されているグラフが弦グラフであることから成り立つ. (注3) 文献<sup>1)</sup> で証明されているグラフが2部グラフであることから成り立つ. (注4) 文献<sup>1)</sup> の証明は不完全である. (注5) 2部および3部グラフの最大クリークの大きさは、それぞれ2以下および3以下であり、 $\mathcal{P}$  であることは自明である. また、任意のスプリットグラフの直径は3以下である.

この  $I$  を  $G$  の区間表現と呼ぶ. □

**事実 2** 区間グラフは弦グラフの部分クラスである.

**定義 4** グラフ  $G = (V, E)$  について、 $k$  個の頂点部分集合  $V_1, V_2, \dots, V_k$  を考える. ただし、任意の  $i \neq j$  について  $V_i \cap V_j = \emptyset$ , かつ  $V = \bigcup_{i=1}^k V_i$  とする. すべての  $V_i$  が独立頂点集合であるとき、 $G$  を  $k$  部グラフ ( $k$ -partite graph) と呼ぶ.

## 2.2 直径 $d$ 部分グラフ最大化問題

本稿では以下の最大化問題を考える:

**問題: 直径  $d$  部分グラフ最大化問題**

(MAX  $d$ -DIAMETER)

**入力:** 連結無向グラフ  $G = (V, E)$ , 整数  $d$  ( $1 \leq d \leq |V| - 1$ ).

**出力** 直径  $diam(G^s)$  が  $d$  以下であり、 $|V(G^s)|$  の値が最大となるような  $G$  の部分集合  $G^s$

直径  $d = 1$  の場合には最大クリーク問題 MAX CLIQUE と同一であり、MAX  $d$ -DIAMETER 問題は探索する部分グラフの直径を2以上へと一般化した問題である.

動作時間に関しては多項式時間で実行可能であるか、もしくは指数時間を必要としてしまうかもしれないが、MAX CLIQUE または MAX 1-DIAMETER に対して、頂点数が最大となるクリークを求めるアルゴリズム FIND<sub>1</sub> が設計できたとする. このとき

MAX  $d$ -DIAMETER に対しても最大部分グラフを求めるためのアルゴリズム FIND <sub>$d$</sub>  を設計することができる.

アルゴリズム FIND <sub>$d$</sub>

**入力:** 連結無向グラフ  $G = (V, E)$ , 整数  $d$

**出力** 直径  $diam(G^s)$  が  $d$  以下であり、 $|V(G^s)|$  の値が最大となるような  $G$  の部分集合  $G^s$

**ステップ 1.** 任意の2頂点  $u, v \in V$  の距離  $dist_G(u, v)$  を求める.

**ステップ 2.**  $dist_G(u, v) \leq d$  となるすべての2頂点  $u, v$  の間に辺  $(u, v)$  を付加することで  $G^+ = (V, E^+)$  を得る.

**ステップ 3.**  $G^+$  に対して FIND<sub>1</sub> を呼び出し、最大クリーク  $G^c = (V^c, E^c)$  を求め、 $G^s = (V^c, E \cap E^c)$  を出力する

以下では、多項式時間アルゴリズムの設計で FIND <sub>$d$</sub>  を利用する. 任意の入力グラフ  $G$  に対して、あるアルゴリズム ALG より得られる部分グラフの頂点数を  $ALG(G)$ , 最適アルゴリズム OPT に得られる部分グラフの頂点数を  $OPT(G)$  とする場合に、 $OPT(G)/ALG(G) \leq \sigma$  が成り立つとき、 $\sigma$  を近似比と呼び、アルゴリズム ALG は近似比  $\sigma$  を持つ近似アルゴリズムである、または単に  $\sigma$  近似アルゴリズムと呼ぶ. また  $\sigma$  近似アルゴリズムが存在するとき、問題は  $\sigma$  近似可能であると言う.

### 3 近似可能性と近似困難性

MAX  $d$ -DIAMETER の計算複雑さについては以下のことが知られている。

**事実 3** (i) MAX CLIQUE は  $\mathcal{NP}$  困難である<sup>4)</sup>。  
(ii)  $d \geq 2$  について MAX  $d$ -DIAMETER は  $\mathcal{NP}$  困難である<sup>1)</sup>。

近似可能性, 困難性については, MAX CLIQUE に対して次の結果が示されている<sup>3, 7, 11)</sup>。

**事実 4** (i) MAX CLIQUE に対して多項式時間で動作する  $O(n(\log \log n)^2/(\log n)^3)$  近似アルゴリズムが存在するが<sup>3)</sup>, (ii) 任意の  $\varepsilon > 0$  について,  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$  とすると, 多項式時間で動作する  $O(n^{1-\varepsilon})$  近似アルゴリズムは存在しない<sup>7, 11)</sup>。

FIND<sub>1</sub> として上の近似アルゴリズムを利用して,  $d \geq 2$  についても同様の近似比を得ることができる。

**系 1** MAX  $d$ -DIAMETER に対して多項式時間で動作する  $O(n(\log \log n)^2/(\log n)^3)$  近似アルゴリズムが存在する。

$d = 2$  の場合には, 入力グラフ  $G$  の頂点の中で最大次数  $\deg_{\max}(G)$  を持つ頂点とその隣接頂点の  $\deg_{\max}(G) + 1$  頂点からなる部分グラフを選ぶアルゴリズム DegreeMax を考えることができる。頂点数  $n$  に対して比較的  $\deg_{\max}(G)$  が大きいグラフに対しては有効であるが, 次のような都合の悪いグラフが存在するため, DegreeMax の近似比は  $\deg_{\max}(G)$  程度まで大きくなってしまふ。

**事実 5** 直径  $\text{diam}(G) = 2$ , かつ最大次数  $\deg_{\max}(G)$  であるときに, 頂点数  $\deg_{\max}(G)^2 + 1$  となるグラフ  $G$  が存在する<sup>9)</sup>。

本稿では,  $d \geq 2$  に対する近似困難性を示す。

**定理 1** 任意の  $\varepsilon > 0$  および  $d \geq 2$  について,  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$  とすると, MAX  $d$ -DIAMETER に対して多項式時間で動作する  $O(n^{1-\varepsilon})$  近似アルゴリズムは存在しない。

**証明.** ここでは MAX 2-DIAMETER の近似困難性を MAX CLIQUE からの多項式帰着により行う。すなわち, MAX CLIQUE の入力グラフ  $G_1 = (V_1, E_1)$  からグラフ  $G_2 = (V_2, E_2)$  を構成する (Fig. 1 参照)。MAX 1-DIAMETER のグラフ  $G_1$  の最適解の頂点数

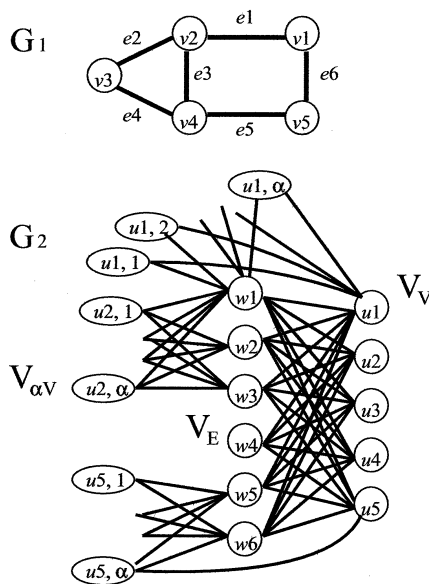


Fig. 1 グラフ  $G_1$  からの帰着グラフ  $G_2$

を  $OPT_1(G_1)$  で表し, MAX 2-DIAMETER のグラフ  $G_2$  の最適解の頂点数を  $OPT_2(G_2)$  で表す。

$G_1$  の頂点集合を  $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 辺集合を  $E_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  としたとき, 帰着グラフ  $G_2$  を構成する。  $V_2$  は更に3つの頂点集合  $V_V, V_E, V_{\alpha V}$  からなり,  $V_2 = V_V \cup V_E \cup V_{\alpha V}$  である。まず  $V_1$  の  $n$  頂点に対応して  $V_V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  とする。また,  $E_1$  の  $m$  辺に対応して  $V_E = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  とする。  $V_{\alpha V}$  は  $\alpha \times n$  頂点を含み,  $V_{\alpha V} = \{u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,\alpha}, u_{2,1}, u_{2,2}, \dots, u_{n,\alpha}\}$  とする。  $E_2$  も3つの辺集合  $E_{\text{complete}}, E_V, E_{\alpha E}$  からなり,  $E_2 = E_{\text{complete}} \cup E_V \cup E_{\alpha E}$  である。まず,  $E_{\text{complete}} = \{(u_i, w_j) | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$  により  $V_V$  と  $V_E$  の各頂点間を辺で結ぶ。また,  $E_V = \{(u_i, u_{i,j}) | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \alpha\}$  により  $V_V$  の各頂点と  $V_{\alpha V}$  の各頂点の間を辺で結ぶ。  $V_{\alpha V}$  と  $V_E$  の間には,  $E_{\alpha E} = \{(w_\ell, u_{i,h}), (w_\ell, u_{j,h}) | e_\ell = (u_i, u_j) \in E_1, 1 \leq \ell \leq m, 1 \leq h \leq \alpha\}$  を付加する。ここで,  $\alpha$  は  $n$  の多項式の範囲で十分に大きなもの, 例えば,  $\alpha = n^4$  とする。

以下では (1) もし  $OPT_1(G_1) = \max$  であるとする,  $OPT_2(G_2) \geq \alpha \times \max + n + m$  を満たし, (2) ある定数  $c$  に対して, もし  $OPT_1(G_1) \leq c \times n^{\varepsilon-1} \times \max$  であるとする,  $OPT_2(G_2) \leq c \times \alpha \times n^{\varepsilon-1} \times \max +$



$n + m$  を満たすことを示す。

(1) 最大クリークの大きさが  $OPT_1(G_1) = \max$  であるとし、その頂点集合を  $V^c$  とする。  $V^c$  に含まれる頂点  $v_i$  に対応して、  $V_{\alpha V}$  の頂点集合  $u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,\alpha}$  を選ぶ。  $|V^c| = \max$  であるので、全体で  $\alpha \times \max$  個を選び、これらの頂点集合を  $V_{\alpha V}^c$  とする。 また、  $V_V$  と  $V_E$  の  $n + m$  個の頂点全てを選ぶ。 これら  $\alpha \times \max + n + m$  個の頂点集合から誘導される部分グラフ  $G^c$  を考える。

部分グラフ  $G^c$  の直径が 2 以下であることを示す。 (i) 2 頂点  $u \in V_V$  と  $v \in V_V$  は、任意の頂点  $w \in V_E$  を経由することができ  $dist_{G^c}(u, v) = 2$  である。 (ii) 2 頂点  $u \in V_E$  と  $v \in V_E$  は、任意の頂点  $w \in V_V$  を経由することができ  $dist_{G^c}(u, v) = 2$  である。 (iii) 頂点  $u \in V_{\alpha V}^c$  は  $V_E$  に隣接する頂点  $w \in V_E$  を少なくとも 1 つは持ち、  $w$  は  $V_V$  の任意の頂点  $v \in V_V$  との間に辺を持つため  $dist_{G^c}(u, v) = 2$  である。 (iv) 頂点  $u \in V_{\alpha V}^c$  は  $V_V$  に隣接する頂点  $w \in V_V$  を少なくとも 1 つは持ち、  $w$  は  $V_E$  の任意の頂点  $v \in V_E$  との間に辺を持つため  $dist_{G^c}(u, v) = 2$  である。 (v) 2 頂点  $u_{\ell,i}, u_{\ell,j} \in V_{\alpha V}^c$  は  $V_E$  内に共通の隣接頂点を持つため、  $dist_{G^c}(u_{\ell,i}, u_{\ell,j}) = 2$  である。 2 頂点  $u_{i,p}, u_{j,q} \in V_{\alpha V}^c$  は、グラフ  $G$  のクリークに対応しているため、辺  $(v_i, v_j)$  に対応した頂点を隣接頂点として  $V_E$  内に持つため、  $dist_{G^c}(u_{i,p}, u_{j,q}) = 2$  である。 以上より、直径が 2 以下となる。

(2) ある定数  $c$  に対して、もし  $OPT_1(G_1) \leq c \times n^{\varepsilon-1} \times \max$  であるとする、  $OPT_2(G_2) \leq c \times \alpha \times n^{\varepsilon-1} \times \max + n + m$  を満たすことを示す。 上で示したように  $V_V$  の各頂点からはすべての他の頂点に距離 2 で到達することができる。 また、  $V_E$  の各頂点からも同様である。 よって、  $|V_V| + |V_E| = n + m$  個を選ぶことはできる。  $OPT_1(G_1) \leq c \times n^{\varepsilon-1} \times \max$  であるので、それら最大クリーク集合  $V^c$  に対応する頂点を選ぶと高々  $c \times \alpha \times n^{\varepsilon-1} \times \max$  個の頂点しか得られない。 仮に  $V^c$  に含まれない頂点に対応する頂点  $u_{i,j}$  を  $V_{\alpha V}$  から選んだ場合を考える。 このとき  $G_2$  の構成より  $u_{i,j}$  から  $V_E$  の頂点を經由して距離 2 で到達できない頂点が必ず存在する (そうでなければ最大クリーク集合に含まれているはずである)。 よって直径が 2 以下となる部分グラフとして、高々  $c \times \alpha \times n^{\varepsilon-1} \times \max + n + m$  個の頂点しか選ぶことができない。

以上の (1), (2) から、  $\alpha$  の値を十分に大きく選ぶことにより、  $O(n^{1-\varepsilon})$  の近似困難性が得られる。 □

## 4 弦グラフ

一般のグラフに対しては計算困難であることを示したが、入力グラフが制限された場合は多項式時間アルゴリズムを設計することが可能かもしれない。 また、整数  $d$  の値が小さい場合には、直感的には、ある  $d$  に対して  $\mathcal{NP}$  困難であると  $d + 1$  も同じく  $\mathcal{NP}$  困難となると予想できる。 しかし、興味深い結果として、入力を弦グラフに限定した場合には、  $d$  が偶数のときは計算困難性を保持し、奇数のときは  $\mathcal{P}$  になることを示すことができる。

### 4.1 $d$ が奇数のとき

**定理 2** 奇数  $d \geq 1$  について、入力グラフ  $G$  が弦グラフに限定された場合は、  $\text{MAX } d\text{-DIAMETER}$  は  $\mathcal{P}$  である。

**証明.**  $G$  が弦グラフであるときには  $\text{MAX CLIQUE}$  に対して多項式時間アルゴリズムが存在することから<sup>5)</sup>、  $d = 1$  のときには  $\mathcal{P}$  に入る。

この多項式時間アルゴリズムを上で述べた  $\text{FIND}_1$  とする。  $d \geq 3$  の場合、アルゴリズム  $\text{FIND}_d$  のステップ 1 およびステップ 2 を弦グラフ  $G$  に適用した後に得られるグラフ  $G^+$  が弦グラフであるとする。 ステップ 3 で  $\text{FIND}_1$  を呼び出したとき多項式時間で  $\text{MAX } d\text{-DIAMETER}$  の最適解を出力する。 本証明では、実際に  $G^+$  が弦グラフのままであることを示す。 すなわち、  $G^+$  に 4 本の辺からなる新しいサイクル  $C$  が含まれた場合には、必ず  $C$  の弦も同時に付加されることを示す。

(1) まず  $C$  の 4 本のすべての辺が  $\text{FIND}_d$  により付加された辺の場合を考える。 ここで、それら 4 本の辺はすべて距離が正確に  $d$  であるような 2 頂点間に追加された辺であるとする。 Fig. 2 の点線で示された 4 辺  $(v_0, v_d)$ ,  $(v_d, v_{2d})$ ,  $(v_{2d}, v_{3d})$ ,  $(v_{3d}, v_d)$  が付加されたとする。 また、  $\{v_0, v_1, \dots, v_{4d-1}\}$  からなる (誘導) グラフ  $G$  は弦グラフであると仮定する。

(1-1) 2 つの道  $P_0 = \langle v_0, v_1, \dots, v_d \rangle$  と  $P_2 = \langle v_{2d}, v_{2d+1}, \dots, v_{3d} \rangle$  について、例えば、  $G$  は  $P_0$  上の頂点  $v_i$  と  $P_2$  上の頂点  $v_{3d-i-1}$  の間に辺を持っていたとすると、  $\langle v_0, \dots, v_i, v_{3d-i-1}, \dots, v_{2d} \rangle$  の長さは  $d$  となり 2 頂点  $v_0$  と  $v_{2d}$  の間に辺が追加されるため、新しく追加されたサイクル  $C = \langle v_0, v_d, v_{2d}, v_{3d}, v_0 \rangle$  は、同時に、弦  $(v_0, v_{2d})$  を持つことになり、弦グラフの条件を崩さない。 縦方向の 2 つの道  $P_1 = \langle v_d, \dots, v_{2d} \rangle$  と  $P_3 = \langle v_{3d}, \dots, v_0 \rangle$  上の 2 頂点間についても同様のことが言える。

(1-2) 元のグラフ  $G$  が上下の2つの道  $P_0$  と  $P_2$  上の2頂点に, "斜め" の辺を持っている場合には新しいグラフ  $G^+$  も弦グラフになるので, ここでは,  $G$  は, 辺  $(v_2, v_{3d-2})$  のような垂直方向の辺, または,  $(v_{4d-2}, v_{d+2})$  のような水平方向の辺しか含まないと仮定する.  $G$  が弦グラフであることから,  $P_0$  上の頂点と  $P_1$  上の頂点,  $P_1$  上の頂点と  $P_2$  上の頂点,  $P_2$  上の頂点と  $P_3$  上の頂点,  $P_3$  上の頂点と  $P_0$  上の頂点の間に少なくとも辺が存在する. また, これらの4辺でサイクル  $C$  を成すことができる. ここで,  $P_0$  の頂点を  $u_0$  (Fig. 2 では  $v_2$ ),  $P_1$  の頂点を  $u_1$ ,  $P_2$  の頂点を  $u_2$ ,  $P_3$  上の点を  $u_3$  とする. サイクル  $C = \langle u_0, u_1, u_2, u_3, u_0 \rangle$  の弦は垂直, または水平方向の辺である必要があるため,  $dist_G(v_0, u_0) = dist_G(v_{3d}, u_2)$  または  $dist_G(v_d, u_1) = dist_G(v_0, u_3)$  が成り立っている. また,  $d$  は仮定より奇数であるため, 例えば,  $P_0$  について,  $dist_G(v_0, u_0) \leq (d-1)/2$  もしくは  $dist_G(u_0, v_d) \leq (d-1)/2$  が成り立っている.  $P_1, P_2, P_3$  についても同様である. ここで対角の頂点に向かう以下の4本の道を考える:

- $Q_1 = \langle v_0, \dots, u_0 \rangle \circ \langle u_0, u_1 \rangle \circ \langle u_1, \dots, v_{2d} \rangle$
- $Q_2 = \langle v_d, \dots, u_1 \rangle \circ \langle u_1, u_2 \rangle \circ \langle u_2, \dots, v_{3d} \rangle$
- $Q_3 = \langle v_{2d}, \dots, u_2 \rangle \circ \langle u_2, u_3 \rangle \circ \langle u_3, \dots, v_0 \rangle$
- $Q_4 = \langle v_{3d}, \dots, u_3 \rangle \circ \langle u_3, u_0 \rangle \circ \langle u_0, \dots, v_d \rangle$

$Q_1, \dots, Q_4$  の中には, 長さが  $(d-1)/2$  以下となる部分道を2つ含む道が必ず存在し, 全体の長さが  $d$  以下となる道が少なくとも1つは存在する. すなわち,  $(v_0, v_{2d})$  または  $(v_d, v_{3d})$  が必ず  $FIND_d$  のステップ2により付加されるため, サイクル  $C = \langle v_0, v_d, v_{2d}, v_{3d}, v_0 \rangle$  は弦を必ず持つことになる.

(2) サイクル  $C$  が  $G$  に含まれていた1本の辺と, 新しく付加された3本の辺からなる場合を考える (Fig. 3). この場合も上と同様に上の道  $P_0$  の頂点  $v_i$  から, 例えば, 下の道  $P_2$  の頂点  $v_{3d-i+1}$  に辺が存在していたとすると,  $dist_G(v_d, v_{3d}) \leq d$  となり  $C$  の弦も同時に付加されるため弦グラフの条件を満たす. また,  $P_0$  の頂点から右側の  $P_1$  の頂点に辺が存在する場合や,  $P_1$  から  $P_2$  に辺がある場合にも,  $dist_G(v_0, v_{2d}) \leq d$  もしくは  $dist_G(v_d, v_{3d}) \leq d$  が成り立つため,  $C$  に弦が追加される.

(3) サイクル  $C$  が  $G$  に含まれていた2本の辺と, 新しく付加された2本の辺からなる場合, (4)  $G$  に含まれていた3本の辺と, 新しく付加された1本の

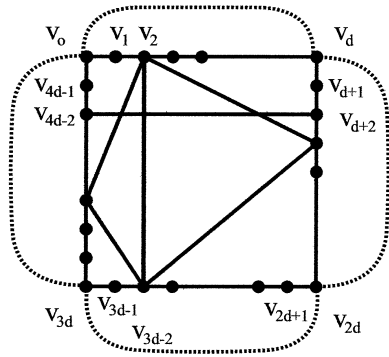


Fig. 2 実線からなるグラフに点線を付加

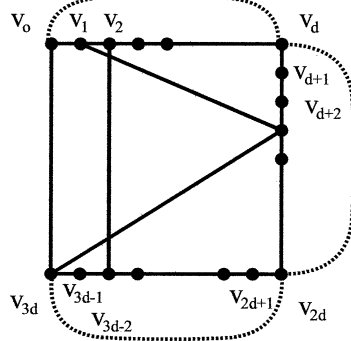


Fig. 3 実線からなるグラフに点線を付加

辺からなる場合についても同じ議論により, 同時に弦が追加されることを示すことができる.

ここではサイクル  $C$  の長さを4としているが5以上の場合もほぼ同様の議論により証明することができる. また, 距離が正確に  $d$  であるような2頂点間に追加された辺のみを考えていたが, 距離が  $d-1$  以下の2頂点間に追加された辺についてはより簡単に証明することができる (詳細は省略).

以上から,  $FIND_d$  は直径  $diam(G^*) \leq d$  であり, 頂点数が最大となる部分集合  $G^*$  を多項式時間で見つけることができ, 本定理が成り立つ.  $\square$

#### 4.2 $d$ が偶数のとき

$d$  が偶数のときには辺を追加した後のグラフを  $G^+$  としたとき弦グラフとはならない例が存在する. 例として,  $d=2$  のとき, Fig. 4(a) の実線を辺とするグラフを考える. アルゴリズム  $FIND_2$  のステップ2において  $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1)$  (とそれ以外の辺) が追加される. Fig. 4(a) では, これ

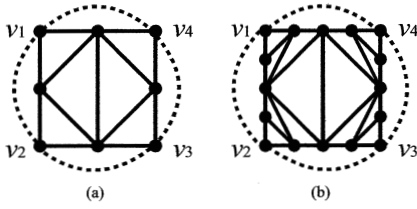


Fig. 4 (a)  $d = 2$ , (b)  $d = 4$

ら4本の辺を点線で表す。これら4辺によりサイクル  $C = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 \rangle$  が含まれるようになるが、 $\text{dist}(v_1, v_3) = 3$  および  $\text{dist}(v_2, v_4) = 3$  であるため  $C$  は弦を持たず、弦グラフではなくなってしまう。 $d = 4$  の場合は Fig. 4(b) のように同じく点線で表された辺が付加され弦グラフではなくなる。さらにはそれ以上の偶数の場合も同様のことが言える。

辺追加後のグラフ  $G^+$  が弦グラフで無いため、 $\text{FIND}_d$  が多項式時間で  $G^+$  の最大クリークを見つけることができるか保証がない。実際に、 $d$  が偶数のときには以下の困難性が証明できる。

**定理 3** 任意の  $\varepsilon$  および偶数  $d \geq 2$  について、入力グラフ  $G$  を弦グラフに限定したとしても  $\text{MAX } d\text{-DIAMETER}$  に対して多項式時間で動作する  $O(n^{1-\varepsilon})$  近似アルゴリズムは存在しない。

**証明.**  $\text{MAX } 2\text{-DIAMETER}$  の近似困難性を  $\text{MAX CLIQUE}$  からの多項式帰着により行う。すなわち、 $\text{MAX CLIQUE}$  の入力グラフ  $G_1 = (V_1, E_1)$  からグラフ  $G_2 = (V_2, E_2)$  を構成する。基本的なアイデアは定理 1 と同じであるので構成のみを述べる。

$G_1$  の頂点集合を  $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 、辺集合を  $E_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  としたとき、帰着グラフ  $G_2$  を構成する。 $V_2$  は更に 2 つの頂点集合  $V_E$  および  $V_{\alpha V}$  からなり、 $V_2 = V_E \cup V_{\alpha V}$  である。まず、 $E_1$  の  $m$  辺に対応して  $V_E = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  とする。 $V_{\alpha V}$  は  $\alpha \times n$  頂点を含み、 $V_{\alpha V} = \{u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,\alpha}, u_{2,1}, u_{2,2}, \dots, u_{n,\alpha}\}$  とする。 $E_2$  も 2 つの辺集合  $E_E$  および  $E_{\alpha E}$  からなり、 $E_2 = E_E \cup E_{\alpha E}$  である。 $E_E = \{(w_i, w_j) | 1 \leq i, j \leq m, i \neq j\}$  により  $V_E$  により誘導される部分グラフを完全グラフとする。 $V_{\alpha V}$  と  $V_E$  の間には、 $E_{\alpha E} = \{(w_\ell, u_{i,h}), (w_\ell, u_{j,h}) | e_\ell = (u_i, u_j) \in E_1, 1 \leq \ell \leq m, 1 \leq h \leq \alpha\}$  を付加する。ここで、 $\alpha$  は  $n$  の多項式の範囲で十分に大きなものとする。

定理 1 の証明と同様に、(1) もし  $\text{OPT}_1(G_1) =$

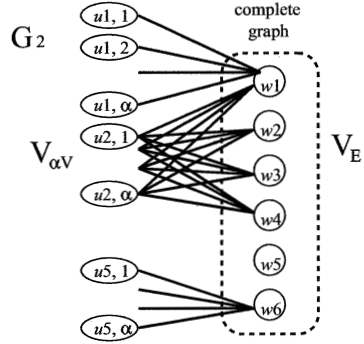


Fig. 5 Fig. 1 のグラフ  $G_1$  からの帰着グラフ  $G_2$

$\text{max}$  であるとする、 $\text{OPT}_2(G_2) \geq \alpha \times \text{max} + m$  を満たし、(2) ある定数  $c$  に対して、もし  $\text{OPT}_1(G_1) \leq c \times n^{\varepsilon-1} \times \text{max}$  であるとする、 $\text{OPT}_2(G_2) \leq c \times \alpha \times n^{\varepsilon-1} \times \text{max} + m$  を満たすことを示すことができる。詳細は省略。□

定理 3 の証明で帰着したグラフ  $G_2$  はスプリットグラフであるため、次の系を得ることができる。

**系 2** 任意の  $\varepsilon$  について、 $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$  とすると、入力グラフ  $G$  をスプリットグラフに限っても  $\text{MAX } 2\text{-DIAMETER}$  に対して多項式時間で動作する  $O(n^{1-\varepsilon})$  近似アルゴリズムは存在しない。□

## 5 区間グラフ

**定理 4**  $d \geq 1$  について、入力グラフ  $G$  が区間グラフのとき  $\text{MAX } d\text{-DIAMETER}$  は  $\mathcal{P}$  である。

**証明.** 区間グラフは弦グラフの部分クラスであり、 $G$  が弦グラフであるときには  $\text{MAX CLIQUE}$  に対して多項式時間アルゴリズムが存在することから<sup>5)</sup>、 $d = 1$  のときには  $\mathcal{P}$  に入る。 $d \geq 2$  の場合については、定理 2 と同様に、アルゴリズム  $\text{FIND}_d$  のステップ 2 適用後に得られるグラフ  $G^+$  が区間グラフであることを示す。ここで  $d = 2$  とする。

グラフ  $G = (\{v_0, v_1, v_2\}, \{(v_0, v_1), (v_0, v_2)\})$  とその区間表現を考える。 $v_0, v_1, v_2$  に対応する閉区間を  $I_0 = [\ell_0, r_0]$ 、 $I_1 = [\ell_1, r_1]$ 、 $I_2 = [\ell_2, r_2]$  とする。ここで、 $\ell_0 < r_0$ 、 $\ell_1 < r_1$ 、 $\ell_2 < r_2$ 、 $\ell_0 \leq r_1$ 、 $\ell_2 \leq r_0$  となる (Fig.6 参照)。 $\text{FIND}_2$  のステップ 2 で、距離 2 の頂点間に辺を追加するとき、区間表現では  $\ell_0 \leq \ell_2 \leq r_1 \leq r_0$  とすることに対応す

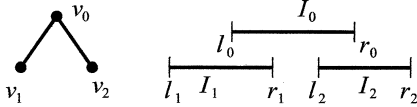


Fig. 6 3頂点グラフと区間表現

る。この辺追加操作に対応した閉区間の変更は  $I_0 = [l_0, r_0]$  の区間のみで起きる。  $I_0$  に含まれる区間に対応する頂点  $u$  があった場合に、  $dist_G(v_0, u) = 1$ ,  $dist_G(v_1, u) \leq 2$ ,  $dist_G(v_2, u) \leq 2$  であるので、  $FIND_2$  のステップ 2 で、  $(v_1, u)$  および  $(v_2, u)$  も付加される。辺追加後のグラフ  $G^+$  も区間表現として表現可能であり、区間グラフのままである。 □

## 6 $k$ 部グラフ

### 6.1 MAX CLIQUE, $d = 1$

まず  $d = 1$ , すなわち最大クリーク問題については以下のことが成り立つ。

**事実 6** 入力グラフ  $G$  が  $k$  部グラフに限っても MAX CLIQUE は  $\mathcal{NP}$  困難である<sup>10)</sup>。

しかし、  $k$  が定数の場合には最大クリークの頂点数は高々  $k$  であるため MAX CLIQUE は明らかに  $\mathcal{P}$  に入る。

### 6.2 MAX $d$ -DIAMETER, $d \geq 2$

2部グラフ上の完全2部グラフ最大化問題が  $\mathcal{P}$  であることから以下を示すことができる<sup>4, 6)</sup>。

**事実 7** 入力グラフ  $G$  が2部グラフのとき MAX 2-DIAMETER は  $\mathcal{P}$  である。

一方、  $k \geq 3$  について MAX 2-DIAMETER の  $\mathcal{NP}$  困難性、さらには近似困難性を示すことができる。

**定理 5** 任意の  $\varepsilon > 0$  および  $k \geq 3$  について、  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$  とすると、入力グラフ  $G$  が  $k$  部グラフに限っても MAX 2-DIAMETER に対して多項式時間で動作する  $O(n^{1-\varepsilon})$  近似アルゴリズムは存在しない。

**証明.** 定理 1 の証明で帰着したグラフ  $G_2$  は3部グラフになっていることから本定理が成り立つ。 □

直径  $d \geq 3$  については2部グラフにおいても困難性を示すことができる(証明は省略)。

**定理 6** 任意の  $\varepsilon > 0$ ,  $k \geq 2$  および  $d \geq 3$  について、入力グラフ  $G$  が  $k$  部グラフに限っても MAX  $d$ -DIAMETER に対して多項式時間で動作する  $O(n^{1-\varepsilon})$  近似アルゴリズムは存在しない。 □

## 謝辞

本研究の一部は、文部科学省科学研究費補助金 18700015, 20500017 の研究助成によるものである。

## 参考文献

- 1) B. Balasundaram, S. Butenko, and S. Trukhanov. Novel approaches for analyzing biological networks. *Journal of Combinatorial Optimization*, 10, pp.23–39, 2005.
- 2) I.M. Bomze, M. Budinich, P.M. Pardalos, and M. Pelillo. The maximum clique problem. *Handbook of Combinatorial Optimization*, Kluwer Academic, pp.1–74, 1999.
- 3) U. Feige. Approximating maximum clique by removing subgraphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 18, pp.219–225, 2004.
- 4) M.R. Garey, and D.S. Johnson. *Computers and Intractability*, 1979.
- 5) F. Gavril. Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cliques, and maximum independent set of a chordal graph. *SIAM Journal on Computing*, 1 (2), pp.180–187, 1972.
- 6) A. Goerdts and A. Lanka. An approximation hardness result for bipartite clique. *Electronic Colloquium on Computational Complexity*, Report No.48, 2004.
- 7) J. Håstad. Clique is hard to approximate within  $n^{1-\varepsilon}$ . *Acta Mathematica*, 182 (1), pp.105–142, 1999.
- 8) R.M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations*, pp.85–103, 1972.
- 9) M. Miller and J. Siran. Moore graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem. *Elect. J. Combinatorics*, DS14, 2005.
- 10) B.S.W. Schröder. Algorithms for the fixed point property. *Theoretical Computer Science*, 217, pp.301–358, 1999.
- 11) D. Zuckerman. Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number. *Theory of Computing*, 3, pp.103–128, 2007.