

AR(1) モデルによる組合せ最適化問題の近傍に対する汎用的解析と応用

加地 太一
小樽商科大学

本論文では、近傍のコスト分布の特性を確率的に解析する。そのために、解空間における近傍点のランダムな評価値系列が AR(1) プロセスと呼ばれる特徴的な性質を有するという仮定を検証し、解空間および評価値系列の構造を統計的に明らかにする。この AR(1) プロセスから導き出した統計量を用い、さらに、解のコスト分布にガウス性が伴う仮定を利用して、近傍を確率的にモデル化し近傍の特性の解析を試みる。さらに、この解析によりアニーリング法のパラメータの一つを決定することが可能であることを示したい。

Analysis and Application using AR(1) Model for Neighborhood of Combinatorial Optimization Problems

Taichi Kaji
Otaru University of Commerce

In the present paper, we attempt to construct a model that enables theoretical probabilistic analysis of the neighborhood. Therefore, we confirm the hypothesis whereby the AR(1) process captures the statistics of walks on the solution spaces of the combinatorial optimization problem and estimate the characteristic quantity on the solution spaces. In addition, we formulate a probabilistic model that captures the feature of the neighborhood using the statistics from the AR(1) process under the hypothesis that the solution variables are jointly gaussian. And, we discuss a cooling schedule for initial value of the control parameter in simulated annealing using AR(1) model approach.

1 はじめに

メタヒューリスティックスの性能を分析する方法として、実験的解析が主流となっている。それには、よりリアルな情報を用いた解析を通してメタヒューリスティックスの性能を明らかにしていくことの現実的な方向性が読み取れる。しかし、実験的解析では実験環境などに多くの自由度を有するため、その基準が整わず一般性を導きにくいところがあるのも事実である。そこで、理論的解析を用いてより普遍的なメタヒューリスティックスの特性を明らかにしたいのが本論文の背景である。

そこで、本論文ではこの近傍の構造を確率的に解析して、かつ、その解析にあたっては汎用的な確率的解析モデルの構築を目指す。すなわち、組合せ最適化問題の解空間における近傍点のランダムな評価値系列が AR(1) プロセス (first order autoregressive process) で支配されるという仮定を用いて解空間および評価値系列の統計量を導き出す。この AR(1) プロセスから得られた統計量を用い、さらに、解コストの同時分布にガウス性が伴う仮定を利用して、汎用的な近傍モデルを構築する。特徴として、前述の AR(1) モデルから求められた統計情報がこの近傍モデルの上でもよい推定値の導出を可能とし、汎用的な近傍モデルの構築を可能としていることにある。さらに、ここで導出された推定値の一つがアニーリング法のパラメータの一つである初期温度推定に利用可能である応用例を示したい。

2 AR(1) プロセスと解空間の解析

近傍の確率的解析を行うため、解空間および評価値系列の構造を統計的に明らかにしたい。そのために、解空間における評価値系列の特性を表す各種の統計量を考察することが必要となってくる。そこで、本論文では解空間における近傍点のランダムな評価値系列が AR(1) プロセスと呼ばれる特徴的な性質を有するという仮定を検証し、必要な解空間および評価値系列の基本的統計量を AR(1) モデルを適用して導出していく。確率的な解析では通常、モデルを構築しやすいように、特定の問題、および特定の近傍などを設定して、このような統計量を導出する。しかし、ここで提唱する AR(1) モデルを用いることにより、多くの組合せ最適化問題、あるいは各種の近傍などに対応する汎用的な解析が可能となることが期待される。以下に、解空間の性質、AR(1) プロセスによるモデル化、そして、そこから導出される基本統計量について考えていく。

組合せ最適化問題のすべての実行可能解 x の集合を X としよう。そして、与えられた解からある基本操作で別の解を導出することを移動と呼ぶ。その移動によって得られる解集合 $N(x)$ を解 x の近傍として定義する。また、解 x に対しての評価値（コスト）を $f(x)$ で表すこととする。その写像 $f: X \rightarrow R$ を組合せ最適化問題の評価値ランドスケープ (fitness landscape) と呼ぶこととする。この評価値ランドスケープの特性を解析するために、まず、ランダムに選んだ点 (解) を出発点としてランダムに選ばれた近傍点 (近傍解) に移動し、この点 (解) から再びランダムに選ばれた近傍点 (近傍解) に移動することを繰り返し得られた評価値 (fitness) の系列を考える。そして、この系列が時系列モデルの一つのタイプである AR(1) プロセス [5][7]、すなわち 1 次の自己回帰モデルとしてモデル化することが可能と考える。Weinberger は、“AR(1) プロセスが、複雑な評価値ランドスケープのクラスをモデル化した N-K 問題 [7] や 組合せ最適化問題を含めて、ランドスケープの広いクラスの上でランダムウォークの統計をうまく捕らえるであろう”と述べており、組合せ最適化問題への適用が可能であることを示唆している [7]。そこで、その考え方を組合せ最適化問題の解空間の評価値ランドスケープに対して適用し、最適化問題に適用して生じる統計的性質から解析を試みるものである。

まず、組合せ最適化問題の評価値ランドスケープ上のランダムウォーク x_1, x_2, \dots, x_N は、AR(1) プロセスとして、次の再帰方程式で支配されたモデル化が可能と考えられる。

$$F_t = \mu + \rho(1)(F_{t-1} - \mu) + \Delta \quad (1)$$

ここで、 F_t は解 x_t のコストを確率変数と考えたものである。また、 t は評価値系列のステップを表す。この再帰的な性質が多くの組合せ最適化問題の解空間における近傍点のランダムな評価値系列に見られ、統計的な性質を導き出すことが可能であろう [3][7]。ただし、 Δ は平均 0、分散 σ_Δ^2 をもつ白色雑音で、 μ は解コストの期待値であり、 $\rho(1)$ は 1 ステップの自己相関関数である。今後便宜上、 $\rho(1)$ を ρ で表すこともある。

AR(1) プロセスの特徴として、 $\rho(r)$ を r ステップの自己相関関数とすれば、

$$\rho(r) = \rho(1)^{|r|}, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

の式のようにステップ数 r の増加によって自己相関関数の値は 0 への指数関数的な減衰性を示す。この性質が確認されたならば、解空間の評価値ランドスケープが AR(1) プロセスに従っていると判断できる。また、評価値系列が AR(1) プロセスであり、かつ $|\rho(1)| < 1$ ならば、そのプロセスは定常過程となることが知られている [5]。定常過程の定義から、

$$E[F_t] = \mu \quad \text{for all } t \quad (3)$$

$$E[(F_t - \mu)^2] = \sigma^2 \quad \text{for all } t \quad (4)$$

が成立する。ただし、 μ は解コストの平均（アンサンブル平均）であり、 σ^2 は解コストの分散である。また、評価値系列のサンプル平均は

$$\bar{F} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N F_t \quad (5)$$

で計算でき、定常過程において評価値系列のサンプル平均 \bar{F} が、アンサンブル平均 μ としてのバイアスのない見積もり（推定量）として扱えることが知られており [5]、サンプル平均をもってアンサンブル平均とする。

さらに、定常過程における自己共分散、自己相関関数の見積もり（推定量）は

$$\hat{R}(r) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-r} (F_t - \bar{F}) \cdot (F_{t+r} - \bar{F}) \quad (6)$$

$$\hat{\rho}(r) = \hat{R}(r) / \hat{R}(0) \quad (7)$$

を用いることがすすめられ、 N が大きければ真値に近い値を導くこととなる [5]。これらの見積もりによって、以後用いられる自己共分散値 $R(r)$ 、自己相関関数値 $\rho(r)$ が決定されるものとする。

また、導出された 1 ステップの自己相関関数 ρ の値は解 x_0 のコストとその近傍解コストの相関係数と同値である。解 x_0 の任意の 2 つの近傍解コストの間の相関係数 ν は、近傍解同士の共通する属性の比率が高いことから、近似的に ρ に近い定数と仮定する。このように、AR(1) プロセスの考えに基づき解空間および評価値系列の特徴的な統計量が推定可能となり、以後で述べる推定値の基本統計量として活用できうるものとする。

ここで、問題は実際に AR(1) プロセスであるかということに帰着される。AR(1) プロセスの特徴的な性質として指数的な減衰性を示す (2) 式となる顕著な特性がある。この指数的な減衰性を確認して、評価値ランドスケープ上の評価値系列が AR(1) プロセスに従う必要条件を確かめてモデルとして採用できるかを確認したい。図 1 はその一例として頂点数 100 の TSP での 2-opt[8] のケースを示した。また、破線が理論的な自己相関関数を示し、実線がサンプルに基づいた自己相関関数を示す。結果として、指数関数的な減衰性が認められその空間は AR(1) プロセスに従っているといつてよいであろう。

3 近傍構造の解析

AR(1) モデルから得られる統計量に基づき、複雑な近傍を表すモデルを構築する。そのモデルを構築するにあたり、解コストの同時分布にガウス性が伴う仮定を利用する。多くの組合せ最適化問題においてその解空間にガウス性が見られることが知られてもおり [7]。この仮定に基づき作られた近傍のモデルが確率的に表現される。

モデル構築のために、まず任意の解を x_0 として、解 x_0 に対する近傍解の集合を $\{x_1, x_2, \dots, x_b\}$ と考える。 b は近傍解の個数である。本節では F_0 を解 x_0 のコストの確率変数とすると、その近傍解コストの確率変数は F_1, \dots, F_b であり、それぞれがとる値は c_0, c_1, \dots, c_b で表す。ここで、任意の解 x_0 がコスト c_0 を持つときの解 x_0 の近傍の構造を確率的に考察する。すなわち、 $F_0 = c_0$ が与えられた条件のもとで、 (F_1, \dots, F_b) の条件付多変量分布の確率密度関数 $h(c_1, \dots, c_b | c_0)$ を導出することによりその近傍の構造を明らかにしたい。このとき、 $\mathbf{X} = (F_1, \dots, F_b, F_0)$ の同時確率分布が多変量正規分布を示す ($\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{b+1}(\mathbf{m}, \Sigma)$) と仮定したならば、 $h(c_1, \dots, c_b | c_0)$ は多変量正規分布 $\mathcal{N}_b(\mathbf{m}', \Sigma')$ となることが言われている [6]。この平均ベクトル \mathbf{m}' と共分散行列 Σ' を導き、分布の構造を特定する。そのために、同時確率分布 $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{b+1}(\mathbf{m}, \Sigma)$ のモデルを詳細にしておく必要がある。まず、

$$\mathbf{X}_1 = (F_1, \dots, F_b)^t, \quad \mathbf{X}_2 = (F_0) \quad (8)$$

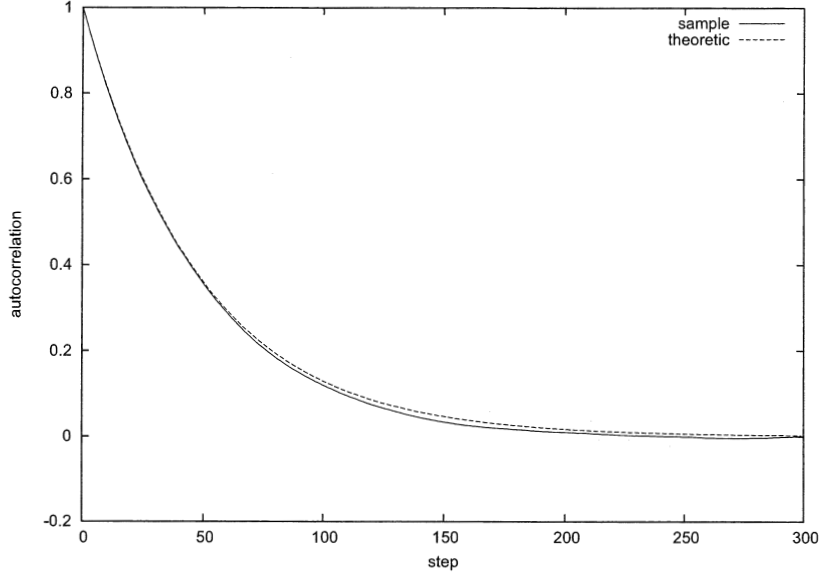


図 1: 2-opt 近傍による頂点数 100 の自己相関関数の振る舞い

とおく。そして、それに対応する平均ベクトルの各要素を

$$\mathbf{m}_1 = (m_1, \dots, m_b)^t, \quad \mathbf{m}_2 = (m_0) \quad (9)$$

とする。また、 Σ_{11} を F_i , $i = 1, \dots, b$ と F_j , $j = 1, \dots, b$ に対する共分散行列とし、その各要素を r_{ij} , $i, j = 1, \dots, b$ と記す。 $\Sigma_{22} = (r_{00})$ は F_0 の分散とする。そして、 Σ_{12} と $\Sigma_{21} = (r_{i0})$ は F_0 と F_i , $i = 1, \dots, b$ との共分散を表すものとする。このように定義すると、同時確率分布 $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{b+1}(\mathbf{m}, \Sigma)$ のモデルの各要素である \mathbf{X} , \mathbf{m} , Σ は

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (10)$$

とした分割形式で表される。

また、ここで必要とされる各要素の値は、AR(1) モデルの特性から導き出した基礎的な統計量を用いて決定することが可能である。これらの値を用いて有効な推定が可能であるかを検証したい。前述したように組合せ最適化問題の評価値ランドスケープが AR(1) プロセスであるところから、(3) 式から (7) 式によって導き出された統計量、すなわち近傍解コストの相関係数値 ρ 、および、近似的に ρ に近い定数と仮定した近傍解コスト同士の間の相関係数値 ν などにより、

$$m_i = \mu, \quad i = 0, 1, \dots, b \quad (11)$$

$$r_{ii} = \sigma^2, \quad i = 0, 1, \dots, b \quad (12)$$

$$r_{i0}, r_{0i} = \rho\sigma^2, \quad i = 1, \dots, b \quad (13)$$

$$r_{ij} = \nu\sigma^2, \quad i \neq j, i, j = 1, \dots, b \quad (14)$$

として、 $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{b+1}(\mathbf{m}, \Sigma)$ のモデルを完成することができる。

そこで、 $h(c_1, \dots, c_b | c_0)$ の分布を導出し近傍の確率分布を特定したい。前述した $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{b+1}(\mathbf{m}, \Sigma)$ の仮定のもと、 \mathbf{X}_2 の要素が $F_0 = c_0$ として与えられた \mathbf{X}_1 の条件付分布 $\mathcal{N}_b(\mathbf{m}', \Sigma')$ の \mathbf{m}' と Σ' は

$$\mathbf{m}' = \mathbf{m}_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (c_0 - \mathbf{m}_2) = (m'_i), \quad (15)$$

$$\Sigma' = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} = (r'_{ij}) \quad (16)$$

となることが知られている [6]。すでに AR(1) モデルから得られた基本統計量により、上式の各要素の値は導くことが可能である。近傍の多変量正規分布の各々の確率変数の期待値は $m'_i = m'_i = \mu + \rho(c_0 - \mu)$; $i = 1, \dots, b$ となり、各々の分散は $r'_{ii} = \sigma^2(1 - \rho^2)$; $i = 1, \dots, b$ として必要な統計量が導出可能となる。

次に、近傍の構成を示す値として、解 x_0 のコストを c_0 とした場合、解 x_0 の近傍解コストの最小値を AR(1) モデルの情報に基づき推定したい。この値を求めるために重要な確率として以下のステップ確率がある [2]。

$$g(c_0, c) = Pr\{\forall i \in \{1, \dots, b\} F_i > c \mid F_0 = c_0\} \quad (17)$$

これは解 x_0 がコスト c_0 を持つとき、その近傍解のすべてがコスト c より大である確率を示す。さらに、このステップ確率を用いて、コスト c_0 の解からその近傍解コストの最小値であるコスト c の解へ移動する確率密度が

$$P(c_0, c) = \frac{-\frac{\partial}{\partial c} g(c_0, c)}{1 - g(c_0, c_0)} \quad (18)$$

の式で導出される [2]。

問題はステップ確率 (17) 式を導出することに帰着される。この値を求めることにより、(18) 式が求まることとなる。そのステップ確率は先に求めた AR(1) モデルからの基本統計量を用いて導出した近傍の確率密度関数 $h(c_1, \dots, c_b | c_0)$ に対して

$$g(c_0, c) = \int_c^\infty \cdots \int_c^\infty h(c_1, \dots, c_b | c_0) dc_1 \cdots dc_b \quad (19)$$

のように求めることができる。これによって特定の問題、特定の近傍に限定することなくステップ確率が計算される。 $h(c_1, \dots, c_b | c_0)$ は多変量正規分布 $\mathcal{N}_b(\mathbf{m}', \Sigma')$ に対応する。しかし、(19) 式の多重積分の計算は数値計算的にも容易でない。そこで、多次元変数を単一化して一重積分に単純化したステップ確率の導出を示しておく。まず、Tong の定理 (Theorem 3.3.3) [6] を用いることにより、近傍を表す b 変数確率ベクトル $\mathbf{X}_1 = (F_1, \dots, F_b) \sim \mathcal{N}_b(\mathbf{m}', \Sigma')$ を独立した $b+1$ 変数標準正規分布を表わす確率ベクトル $\mathbf{Y} = (y_0, y_1, \dots, y_b) \sim \mathcal{N}_{b+1}(\mathbf{0}, I_{b+1})$ で構成できる。すなわち、 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{C}\mathbf{Y} + \mathbf{m}'$ で変換できる。ただし、 \mathbf{C} は $b \times (b+1)$ の行列

$$\mathbf{C} = \alpha \begin{bmatrix} \beta & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \beta & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

であり、ここで、

$$\alpha = \sigma \sqrt{1 - \nu} \quad (21)$$

$$\beta = \sqrt{(\nu - \rho^2)/(1 - \nu)} \quad (22)$$

表 1: 頂点数 100 の 2-opt 近傍に対するデータ

f(x)	SampAve	TheoAve	SampSTD	TheoSTD	SampMin	TheoMin
-0.67	-0.65	-0.65	0.62	0.63	-2.86	-2.27
-10.80	-10.59	-10.59	0.63	0.63	-12.54	-12.21
-25.14	-24.63	-24.64	0.62	0.63	-26.47	-26.24
-45.32	-44.39	-44.41	0.56	0.63	-46.07	-46.01
-64.95	-63.63	-63.65	0.49	0.63	-65.17	-65.25

であるものとする. この $X_1 = CY + m'$ と Y の独立した標準正規分布性からステップ確率 (19) 式を

$$g(c_0, c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}(c - m')\right)\right)^b ds \quad (23)$$

と導出することができる. また, (18) 式は

$$P(c_0, c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 - g(c_0, c_0))} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \cdot \frac{b}{\sigma\sqrt{(2 - 2\nu)\pi}} \left(\frac{\operatorname{erfc}(u)}{2}\right)^{b-1} e^{-u^2} ds \quad (24)$$

と計算される. ただし,

$$u = -s\sqrt{\frac{\nu - \rho^2}{2 - 2\nu}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2 - 2\nu}}(c - \rho c_0 + (\rho - 1)\mu) \quad (25)$$

である [4].

最後に AR(1) モデルの特性から導き出した各種の推定値の実験的検証の一例を示しておく. 具体的には近傍のコスト分布の特性を示すモーメントの値, また, 近傍解コストの最小値の推定値である. 実験対象は解のコストが平均 0.0, 分散 10.0 となる頂点数 100 の問題を利用する. その期待値, 標準偏差, 最小値の理論的推定値と実際にサンプルから計測した実験的な値を表 1 に示しておく. 順に解 x のコスト, 解 x に対しての近傍解コストの実験的期待値, 理論的期待値, 実験的標準偏差, 理論的標準偏差, 実験的最小値, 理論的最小値の値が記されている. また, その他の事例においても同様な傾向が示されていることは付記しておく. 以上より, 組み合わせ最適化問題においてその解空間における評価値ランドスケープの構造が AR(1) プロセスとしてモデル化することが有効であり, そこから見積もられた値を用いて推定した近傍解コストの統計的データ, および最小値の推定のモデルの有効性が示されるものである.

4 近傍構造解析の応用例

本節では AR(1) モデルによる近傍構造の解析によって得られた統計量を用いた応用例の一つを示したい. その応用例の一つとして, アニーリング法における初期温度の決定に関して検討を試みる. アニーリング法の初期温度は通常, 事前の数値実験によって受理率 $\chi(c)$ が 0.8 から 1 に近い値になるような温度に設定する. 受理率 $\chi(c)$ とは, 温度 c で疑似平衡に達するまでの反復での近傍移動に関して

$$\chi(c) = \frac{\text{温度 } c \text{ で受理された移動}}{\text{温度 } c \text{ で提案された移動}} \quad (26)$$

と定義される。

それに対して、初期温度などを含めたパラメータに関する理論的な検討がいくつか知られている。初期温度に関しては、受率率を

$$\chi \approx \frac{m_1 + m_2 \cdot \exp\left(\frac{-\overline{\Delta f}^{(+)}}{c}\right)}{m_1 + m_2} \quad (27)$$

と近似すると、温度は

$$c = \frac{\overline{\Delta f}^{(+)}}{\ln\left(\frac{m_2}{m_2\chi - m_1(1-\chi)}\right)} \quad (28)$$

と求めることが可能となる [1]。ここで、 χ は希望する受率率の値である。また、現在の解を i としその近傍解を j とすると、 m_1 は $f(j) \leq f(i)$ となるような近傍の提案数であり、 m_2 は $f(j) > f(i)$ となる近傍の提案数を示している。あるいは m_1, m_2 はその提案数の比とみても一般性は失われない。さらに、 $\overline{\Delta f}^{(+)}$ は $f(j) > f(i)$ である m_2 個の近傍 j に対する $f(j) - f(i)$ の値の平均値を表している。ここで、この指定する受率率 χ となる初期温度を導出するためには、 $m_1, m_2, \overline{\Delta f}^{(+)}$ が必要な値となる。これらの値を本論文で提案する AR(1) モデルによる近傍構造の解析から導出し、有効な初期温度が推定可能であることを検討したい。アニーリング法における出発解を x_0 とすると、 x_0 の近傍解は先の議論より確率密度関数が

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}}} e^{-\frac{(x-\hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}} \quad (29)$$

となる正規分布に従ったコストをもつ解への移動となる。ただし、 $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$ は

$$\hat{\mu} = \mu + \rho(f(x_0) - \mu) \quad (30)$$

$$\hat{\sigma} = \sigma^2(1 - \rho^2) \quad (31)$$

として前述の議論より導出可能である。したがって、この分布を解の候補と見立てることにより、この移動 m_1, m_2 の比は

$$m_1 = \int_{-\infty}^{f(x_0)} \phi(x) dx \quad (32)$$

$$m_2 = \int_{f(x_0)}^{\infty} \phi(x) dx \quad (33)$$

と導かれる。また、 $\overline{\Delta f}^{(+)}$ はこの確率密度関数を用いて、

$$\overline{\Delta f}^{(+)} = \int_{f(x_0)}^{\infty} (x - f(x_0))\phi(x)/m_2 dx \quad (34)$$

と計算可能である。以上、AR(1) モデルからの解析によって得られた値により、(28) 式を導くことが可能となる。

さらに、この AR(1) モデルによる近傍構造の解析を用いたい初期温度のスケジューリングが有効であることを表 2 に示しておきたい。この実験は頂点数 100 のランダムグラフに対する TSP の事例に対して、提案するスケジューリングの有効性を示したものである。指定する温度に対しスケジューリングされた温度、そしてその温度に対して反復を行った場合の実際の受率率が表 2 では示されている。高い温度のときはほぼ要求する受率率が示されており、温度が低くなると実際の受率率は多少低い傾向にあることが見受けられる。しかし、十分実用に堪える結果であると判断できる。

表 2: 近傍構造解析による初期温度スケジュール

指定した受理率	推定初期温度	実験受理率
0.95	325.5	0.949
0.90	163.0	0.898
0.85	101.7	0.834
0.80	70.1	0.774
0.75	57.8	0.721
0.70	47.5	0.671

5 おわりに

本論文では、近傍の分布の特性を確率的に解析するために、評価値ランドスケープの構造を統計的に明らかにした。解空間、近傍点の特性を示す各種の統計量を導出するために、評価値ランドスケープ上の評価値系列が AR(1) プロセスと呼ばれる特徴的な性質を有するという仮定を検証し、そこから必要な統計量を導き出した。さらに、AR(1) プロセスから導き出した統計量と、解空間にガウス性を伴う仮定を用いて近傍の構造を確率的にモデル化し、近傍の特性の解析を検討した。また、この解析を利用することにより、アニーリング法における初期温度のスケジュールリングの応用について示したものである。結果として、組合せ最適化問題の解空間では AR(1) の特徴的な性質を有し、理論的な推定値も実際の値に近似した傾向となり、モデルの汎用的有効性が示された。また、その推定量を用いたアニーリング法のパラメータスケジュールリングにおいても利用可能性が示されたものである。

参考文献

- [1] E. Aarts and J. Korst: *Simulated Annealing and Boltzmann Machines* (John Wiley & Sons, 1989).
- [2] H.M.M. Eikelder, M.G.A. Verhoeven, T.W.M. Vossen and E.H.L. Aarts: A probabilistic analysis of local search. In I.H. Osman, and J.P. Kelly (eds.): *Meta-Heuristics: Theory & Applications* (Kluwer, 1996), 605–618.
- [3] T. Kaji: Probabilistic analysis of local search using AR(1) model in the graph partitioning problem. *Proc. of the Fifth Metaheuristics International Conference*, Paper ID **38** (2003).
- [4] 加地太一: AR(1) モデルによる組合せ最適化問題の近傍に対する解析. 日本 OR 学会論文誌, **51**, 112-135(2008).
- [5] M.B. Priestley: *Spectral Analysis and Time Series* (Academic Press, 1981).
- [6] Y.L. Tong: *The Multivariate Normal Distribution* (Springer-Verlag, 1990).
- [7] E. Weinberger: Correlated and uncorrelated fitness landscapes and how to tell the difference. *Biological Cybernetics*, **63**, 325–336(1990).
- [8] 柳浦睦憲, 茨木俊秀: 組合せ最適化 (朝倉書店, 2001).