

一般化はさみ将棋の EXPTIME 完全性

方波見 尚之[†] 築地 立家[†]
[†]東京電機大学 理工学研究科

はさみ将棋とは、自分の駒を用いて相手の駒をはさんでとる2人対戦型ゼロサムゲームであり、日本のはさみ将棋、タイの Mak-yak などが有名である。本稿では、盤面を $n \times n$ に拡張した一般化はさみ将棋の計算複雑さについて考察する。ここでは、縦、横方向に自由に動く駒に加えて、不動駒も使用するものとする。また、縦横方向に加えて斜め方向の取りも許すものとし、相手の駒を先に5個取った方が勝ちとする。このとき、任意に与えられた一般化はさみ将棋の盤面について、勝ち・負け・引き分けのいずれであるかを判定する問題が、EXPTIME 完全問題であることを証明する。

Generalized Hasami-Shogi is EXPTIME Complete

Naoyuki Katabami[†] Tatsue Tsukiji[†]
[†]Tokyo Denki University. The Science and Engineering graduate course

Hasami-Shogi is a two-person zero-sum board game where each player aims to take a number of the opponent's pieces at once by making a sandwich position; a sandwich position occurs when the player's two pieces sandwich a number of the opponent's pieces placed consecutively on a row, a column, or a diagonal squares. In this paper, we generalize it to the $n \times n$ board, on which each piece moves like the rook. In addition, we allow a number of the immobile piece to exist. The winner is the player who takes at least 5 opponent's pieces at first. Then, we prove that the problem of determining whether a given position of the generalized Hasami-Shogi is either a player's winning position, or an opponent's winning position, or a draw position, is EXPTIME Complete.

1. はじめに

はさみ将棋とは、自分の駒を用いて相手の駒をはさんでとる2人対戦型ゼロサムゲームである。世界にも、古代ギリシア以来、似たようなボードゲームがあり、日本のはさみ将棋、タイの Mak-yak などが存在する。対戦型ゼロサムゲームにおける計算複雑さとは、与えられた盤面から出発して、二人のプレイヤーが互いに最善手を指し続けたときに、勝ち、負け、引き分けの、どのケースに到達するか判定する問題を、コンピュータで処理するときの処理時間の理論的下限である。最も複雑な一般化ゲームとして、一般化囲碁[2]、一般化将棋[1]、一般化チェス[4]等が知られており、それらはいずれも、EXPTIME 完全(処理時間

の下限値が指数多項式的)であることが証明されている。

そこで、本稿では、一般化はさみ将棋が、EXPTIME 完全であることを証明する。そのために、分岐、合流、クロス、スイッチ、ターン開始部等のパーツを盤面上に作成し、それらを組み合わせることにより、既に知られている EXPTIME 完全ゲームである G_2 ゲーム[3]を、一般化はさみ将棋の盤面上で再現する。

2. 2人対戦型ゲームの計算複雑さ

2人対戦型ゼロサムゲームとは、参加者の得点と失点の総和(サム)が零(ゼロ)になる、「有利不利の総和が必ず一定になる」ゲームである。将棋、チェス、囲碁のような

純粋な対戦ゲームもこれに含まれる。ボードゲームの一般化とは、ルールを変えないまま、盤面を縦横方向に無限に拡大することである。ゲームの複雑さというのは、有限の盤面で考えるよりも無限の盤面に広げたほうがルールそのものが持つ難しさがはつきりわかることがある。つまり、ゲームを一般化することで、ルールが持つ本質的な難しさを把握することが可能となる。

本研究では、一般化はさみ将棋の EXPTIME 完全性の証明を行う。過去の結果として、一般化された囲碁、将棋、チェス、詰め将棋、チェッカーなどが、EXPTIME 完全であることが証明されている。これらの研究に先立ち、Stockmeyer と Chandra[3]は、人工的に作成された 8 個のゲーム $G_1 \sim G_8$ がすべて EXPTIME 完全であることを証明した。本稿では、 G_2 ゲームの EXPTIME 完全性を利用する。

G_2 ゲームとは、2 人対戦型ゼロサムゲームであり、その状態は、3 項組 $(\tau, I\text{-WIN}(X,Y), II\text{-WIN}(X,Y), \alpha)$ で表わされる。ここに、 $\tau \in \{I, II\}$ はターンプレイヤーの番号、 $\tau\text{-WIN}(X,Y)$ はターンプレイヤー τ の勝利条件となる 12DNF、 X と Y は互いに disjoint なブール変数の集合、 α は $X \cup Y$ への真偽値割り当てである。プレイヤー I (II) は自分のターンのときに $X(Y)$ の変数の真偽値を一つだけ変えるか、またはパスすることができる。相手プレイヤーのターンが終了した直後に、自分の勝利条件が真になれば、勝利する。

定理 1 (Stockmeyer and Chandra, 1979, [3])
 G_2 ゲームは EXPTIME 完全である。

例えば、下記の G_2 ゲームの具体例 ($A_i = B_i = 0, i = 4, \dots, 12$) において、 $\tau = I, \alpha(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = (0, 0, 1, 0)$ の状態で、プレイヤー I の勝利条件は偽であり、かつプレイヤー I がいかなる手を選択しても、II-WIN(X,Y) は真となってしまうため、この状態はプレイヤー II の勝利状態であるといえる。

I-WIN(X,Y) = $A_1 \vee A_2 \vee A_3$
 II-WIN(X,Y) = $B_1 \vee B_2 \vee B_3$
 $A_1 = X_1 \wedge X_2 \wedge Y_1 \wedge Y_2$
 $A_2 = \neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg Y_1 \wedge \neg Y_2$
 $A_3 = X_1 \wedge \neg X_2 \wedge Y_1$
 $B_1 = \neg X_1 \wedge Y_1 \wedge \neg Y_2$
 $B_2 = \neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg Y_1 \wedge Y_2$
 $B_3 = X_1 \wedge \neg X_2 \wedge Y_1 \wedge \neg Y_2$

3. 一般化はさみ将棋

本稿では、以下のルールの下で、一般化はさみ将棋の計算複雑さについて考察する。各駒は、他の駒とぶつからない限り、縦横方向に自由に動くことができる。さらに、不動駒も使用できるものとする。また、縦横方向に加えて、斜め方向でもはさめるものとし、相手の駒を先に 5 個取った方が勝ちとする。千日手ルールとして、味方の駒の配置が x 手以内に 4 回同じになった場合、そのプレイヤーは手を変えなければならないとする。ただし、 x は盤面のサイズに依存しない十分大きな定数であり、例えば $x = 100$ と想定しておけばよい。

現在、コンピュータ将棋プログラム「ボナンザ」などのソフトがあるが、それらが進化を続け、常に最適の手が打てるソフトができたと仮定して、これをプレイヤーとする。

4. 一般化はさみ将棋の EXPTIME 完全性

本節では、 G_2 ゲームを一般化はさみ将棋の盤面(すなわち状態)として完全に再現することにより、以下の定理を証明する。

定理 2 (本稿)
 一般化はさみ将棋は EXPTIME 完全である。

図 1 が G_2 ゲームを再現した一般化はさみ将棋の盤面である。以降、この盤面を G_2 盤面と呼び、それを構成する局所的な盤面を作成しながら、その役割について説明する。

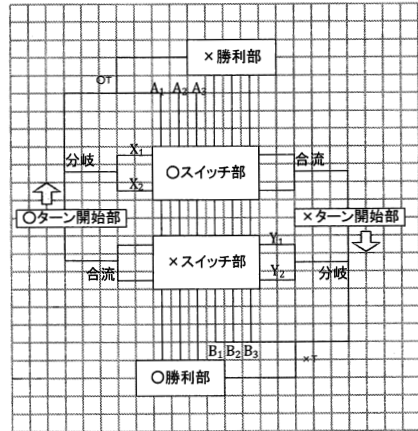


図 1. G_2 ゲームを再現したはさみ将棋の盤面

○(×)ターン時は、特定の○(×)駒が先に移動して、それを特定の×(○)駒が追いかける。以後、先に移動する駒を逃げ駒、追いかける駒を追い駒と呼ぶ。

通路と停止ポイント 逃げ駒と追い駒が通過できるマスと停止できるマスを限定するための基本的な構造。基本パーツと、それを盤面に適切に敷き詰めることによって生成される通路と停止ポイントについて説明する。基本パーツは、6×6の正方形に○×どちらか一方の駒を敷き詰め、その周囲を敵対する駒で囲んだ後に角の4駒を削り、削除した駒の隣にある2駒、計8駒を不動駒に置き換えることにより作成される。中に敷き詰められた駒は周りが変化しない限り動けない。周囲が○(×)側の駒であれば○(×)パーツと呼ぶ(図2)。○パーツと×パーツを、隣接するパーツ間に1マス分の空きが生じるように、チェッカー状に盤面に敷き詰める(図3)。このとき生じる空マス全体からなる領域を通路と呼び、どの駒にも隣接しない空マス(図3のAマス)を停止ポイントと呼ぶ。停止ポイント以外の空マスに止まると敗北する。また、上下または左右に隣接する2つの基本パーツを変形し繋ぐことで通路を封鎖できる(図4)。

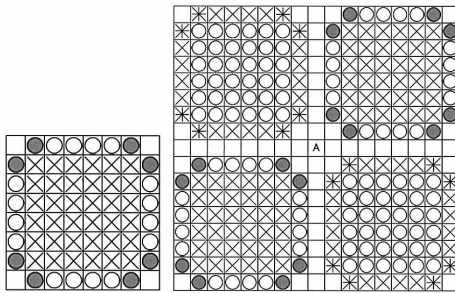


図2. ○パーツ 図3. 通路と停止ポイント

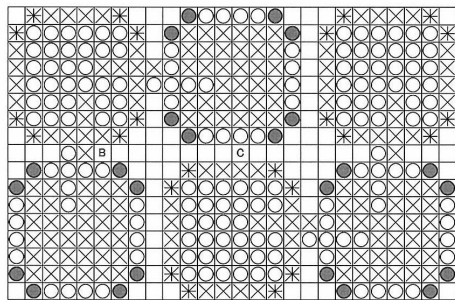


図4. 通路の封鎖

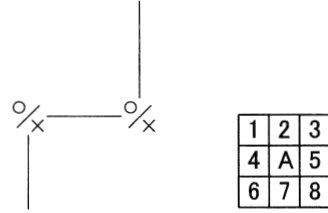


図5. 図4の簡略表記

1	2	3
4	A	5
6	7	8

図6. 方向の定義

(○/×:停止ポイント, 棒線:通路)

本稿中で使用する方向についての定義を述べる。図6のAから見て1:左上 2:上 3:右上 4:左 5:右 6:左下 7:下 8:右下 である。停止ポイント以外の空マス停止による敗北例を挙げる。図4で○がCに停止した場合、Cに隣接した左下、下、右下の3駒が取られる。その後、Cの2マス左、1マス下にある×が、取られた×があったいずれかの場所に移動して5個以上の○駒を取り、○側が敗北する。基本パーツとして存在する駒を通路に動かした場合も同様に、通路に停止させた側が敗北する。また、○がBに停止した場合、Bに隣接した左、左上、上の×駒が取られるが3駒しか取られていないのでゲームは終了しない。その後、Bの2マス左、1マス上にある×が、1マス右に移動することで、左上、右上、左下に連続して置かれている計7個の○駒を取り、○側が敗北する。

停止不可ポイント 特定のプレイヤーを素通りさせるための停止ポイント。どちらか一方のプレイヤーのみが利用できる停止ポイント、どちらのプレイヤーも利用できない停止ポイントを作成する。停止不可ポイントは停止不可パーツを作成することによって生成される。停止不可パーツは基本パーツを変形することで作成する。基本パーツで8×8の正方形から削除した4駒のうち、停止ポイントと隣接するマスに、囲んでいる側の不動駒を置き、それに隣接する3駒を囲んでいる側の通常駒に換えたものを停止不可パーツとする。○と×のどちらで囲んでいるかによって、このパーツを○(×)のみパーツと呼ぶ。停止ポイントを囲む4つの基本パーツのいずれかを○(×)のみパーツに置き換えると、×(○)が停止ポイントに止まれなくなる。また、4つの基本パーツの中の上下または左右に隣接する2つのパーツを停止不可パーツに置き換えることで、どちらのプレイヤーも停止ポイントに止まれなくなる。

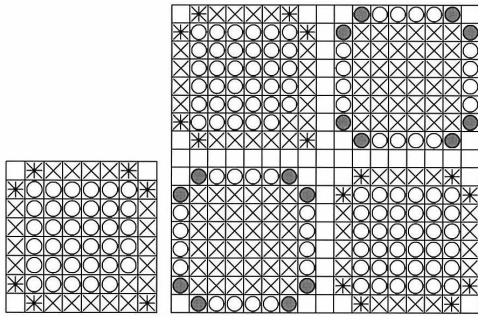


図 7. xのみパーツ 図 8. xのみ利用可能な停止ポイント

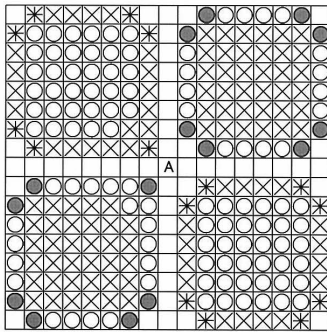


図 9. 停止不可パーツによる停止ポイントの素通り



図 10. 図 8 の簡略表記 図 11. 図 9 の簡略表記

停止不可ポイントの敗北例を挙げる。図 9 で○がAに停止した場合、左上に連続して置かれてある×を取る。その後、Aの2マス左、1マス上にある×が、1マス上に移動することで計 15 個の○を取り、○側が敗北する。

特殊な停止ポイント 停止ポイントから特定の方向に敵対する通常駒があったとき、その停止ポイントが利用できなくなる仕組みを作成する。○側の特殊な停止ポイントの例を図 12 で示す。左側に×の通常駒があったときに、○側が停止ポイントに停止することで、左側にある×の通常駒が停止ポイントの1マス左に停止し、×側が勝利する。このような特殊な停止ポイントによる敗北例をクリティカルケース(以後CC):Aと呼ぶ。

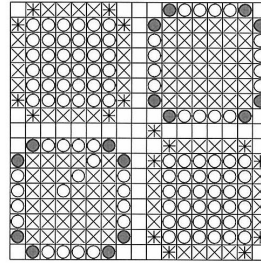
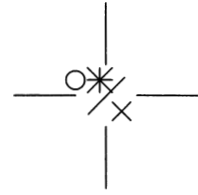


図 12. ○側の特殊な停止ポイント 図 13. 図 12 の簡略表記



追い駒タイマー 追い駒が逃げ駒を追わないとき、追い駒側を敗北させるための構造。図 14 における×側の敗北例を挙げる。次の手で逃げ駒○がBへ移動できるマスにいるとき、追い駒×がAへ移動できるマスにいないければ、○側が逃げ駒をBへ動かした後に、Dにある駒をCへ動かすことで、×側が敗北する。このような追い駒タイマーによる敗北例をCC:Bと呼ぶ。

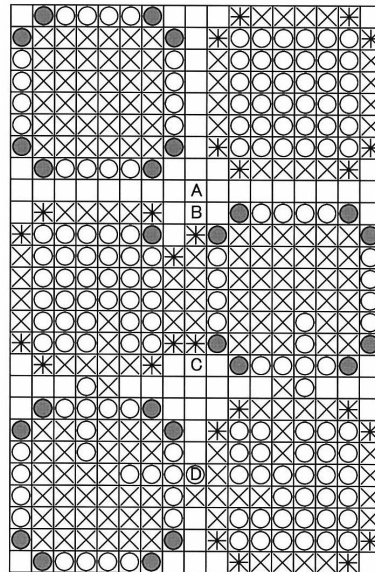


図 14. ターン時の追い駒タイマー

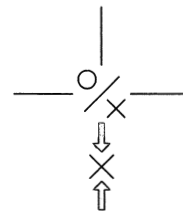


図 15. 図 14 の簡略表記

逃げ駒タイマー 勝利判定へと進んだ逃げ駒が特定の手数で勝利を納めない限り敗北させるための仕組み。追い駒が追い駒側の勝利部に到達できる道を用意することで作成する。図1に○(×)Tで示す。図1では○T部分から×勝利部に至る通路には曲がりが一つしか書かれていないが、実際は適当な距離がとってある。

ウィークポイント 相手プレイヤーのみが勝利できる停止ポイント。○側のウィークポイントAを図で示す。図16での×側の勝利例を挙げる。×駒をAに移動して左上と右下2つの駒を取った後、封鎖されている通路へ移動して3つの駒を取ることで計5つの駒を取り、×側がゲームに勝利する。

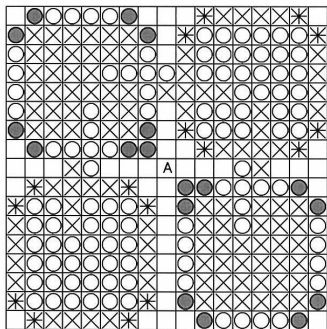


図16. ○側のウィークポイント(○敗北と簡略表記する)

分岐 逃げ駒が移動先を選択するための構造(図17)。停止ポイントCから、逃げ側の選択により、分岐先Aまたは分岐先Bの停止ポイントに進む。

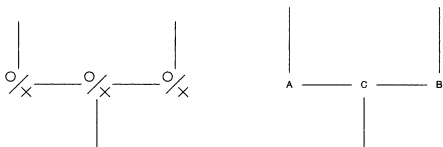


図17. 分岐の簡略表記

合流 異なるルートを合流させるための構造(図18)。合流元Aまたは合流元Bから停止ポイントCに進む。具体的には、○がAにあるとき、(指し手: 移動元→移動先で表記) ○: A→C、×: G→A、○: C→F、×: A→Cと

進み、合流する。また、○: A→Bと進んでも、×: G→A、○: B→C、×: A→D、○: C→F、×: D→Cと進み合流する。この合流は必然である。例えば、○: A→B、×: G→A、○: B→H、×: A→Cと進むと、×が○を追い越してしまうので、○が敗北してしまう(後述のグローバルな敗北例)。

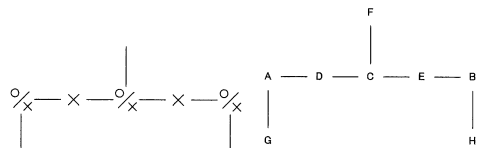


図18. ○ターン時の合流の簡略表記

スイッチ部 勝利判定に使用するスイッチのON/OFFを切り替えるための構造。○(×)スイッチは、○(×)ターン時に逃げ駒○(×)が選択してスイッチを切り替える。○側スイッチXの盤面を図で示す。

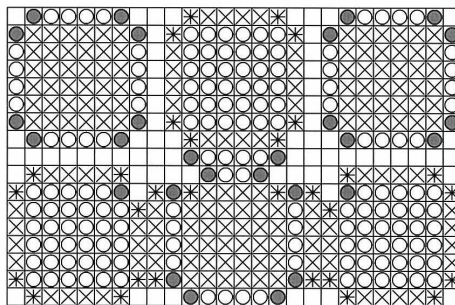


図19. ○側のスイッチX

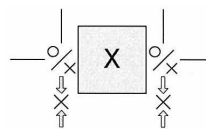


図20. 図19の簡略表記

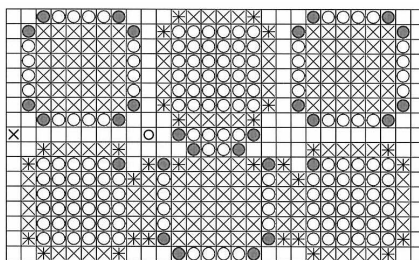


図21. スwitchの切り替え(ON)

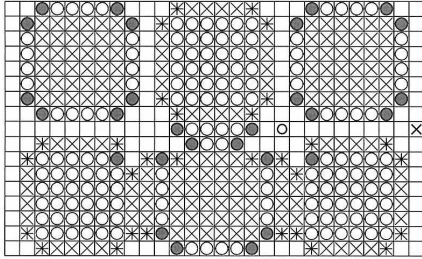


図 22. スイッチの切り替え (OFF)

図 21 (22)では、スイッチ盤面の左(右)側の停止ポイントに○と×の1組が配置されており、その停止ポイントを配置候補と呼ぶ。また、図 21 (22)の状態を ON (OFF) 状態と呼ぶ。盤面を移動する駒が配置候補に到達したときに、もう一方の配置候補に置かれた駒が移動を開始することで、スイッチの ON/OFF の切り替えを行う。

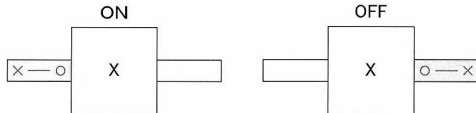


図 23. スイッチの ON/OFF

この際、1組の○と×を特定の並びでスイッチに隣接させるために、どちらの配置候補にも○が存在しない場合、○側に制約を付けた(C C : Cで記述)。また、配置候補に存在する○に対して、特定の並びで×が置かれない場合、C C : Bにより×が負けるようにスイッチを作成した。

スイッチ接続 スイッチ部に対して進入と退出を行うための構造(図 24)。

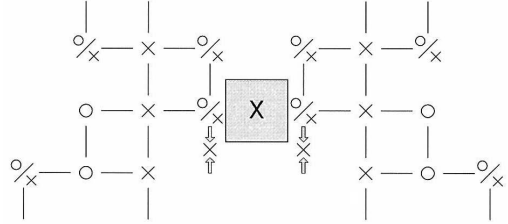


図 24. スイッチ部(進入と退出)

逃げ駒と追い駒は、下側から進入する。スイッチと接触した後は上側から退出する。実際に○側スイッチを切り替える手順を図 25 を用いて説明する。スイッチが OFF のとき、g には○が、f には×が配置されている。I に逃げ駒○、M に追い駒×が置かれたとき、○ : I → J、× : M → I、○ : J → E、× : I → K、○ : E → G、× : K → F、によりスイッチ部へ進入する。このとき、○側の選択により、○ : g → d、× : f → g、○ : d → b、× : g → d、○ : b → a、× : d → b、と進めば、スイッチを切り替えて退出できる。また、○ : G → D、× : F → G、○ : D → B、× : G → D、○ : B → A、× : D → B、と進めば、スイッチを切り替えずに退出できる。ところで、スイッチは ON/OFF いずれか一方の状態でなければならない。ゲームの進行中に、この状態を崩した側の敗北例を以下に示す。仮に、図 26 で、G (g) に○があり F (f) に×がなかった場合、D (d) に○があり F (f) か G (g) に×がなかった場合は、配置候補の 1マス下に置かれた○に対して、組となる×が対処できないため C C : B により×側が敗北する。よって、○が配置候補にいるときは、その組となる×もいなければならない。

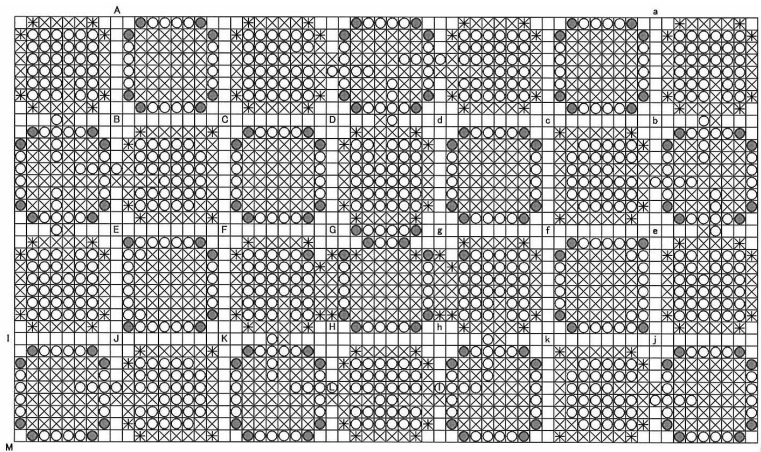


図 25. ○側スイッチの切り替え

また、○がGまたはEにないときに、gにある○を動かした場合、○：g→d、×：f→g、○：d→b、×：g→gの1マス左。次の指し手で、×：Eの4マス左→Gの1マス右とすることで○側が敗北する。スイッチ部への進入中に○がE、×がKにいるときも、○：g→d、×：f→g、○：d→b、×：K→F、○：b→d、×：F→Gと進行し、その後、○：E→Jならば、×：G→Iマス右、○：任意、×：g→gの1マス左とし、○：d→b、ならば、×：g→gの1マス左、○：任意、×：G→Gの1マス右、とすることで○側が敗北する。このように、スイッチ部に侵入した○が配置候補に到達する前に、反対側の配置候補の○を動かしてしまうことで○側が敗北する例をCC：Cとする。

スイッチ連結 スイッチ連結(図26,27)は、複数のスイッチを同時に切り替えるために、ひとつのスイッチが切り替わると、それに隣接するスイッチを強制的に切り替える仕組みである。Nに○、Oに×置かれており、反対側の配置候補に移動駒が到達したときに、○：N→I、×：O→N、○：I→K、×：N→I、○：K→A、×：I→M、○：A→C、×：M→Bと進むと、左下のスイッチ切り替えが右上に伝播する。構成の対称性から、逆方向の伝播も発生する。

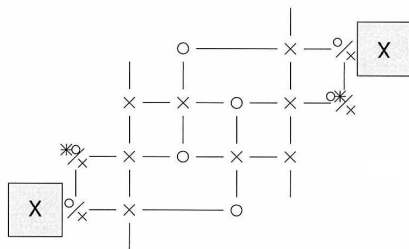


図 26. スイッチ連結

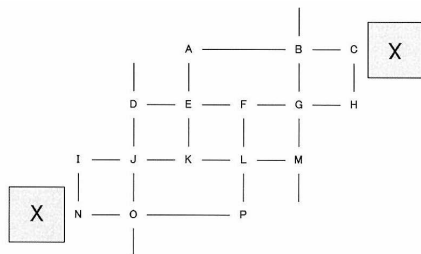


図 27. スイッチ連結部

図 27 の左下のスイッチに移動駒が到達して、かつ○がNから移動を始めたときに、スイッチ切り替えの伝播が必ず起きることを説明するために、敗北例を挙げる。

×側の敗北例 ○がN、×がOにいるとき、○：N→Iに対して×：O→Nとしなかった場合、○：N→Nの1マス下とすることでCC：Bにより×側が敗北する。○がCにあり×がBにいなかった場合も同様に×側が敗北する。

○側の敗北例 ○：N→I、×：O→N、○：I→K、×：N→I、○：K→A、×：I→M、○：A→K、×：M→L、○：K→I、×：M→Iの1マス右と進んだ場合、CC：Aにより○側が敗北する。

ターン開始部 ターンの交代を行うための構造(図28)。

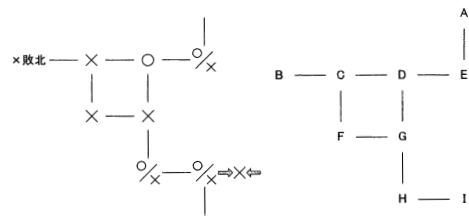


図 28. ○ターン開始部の簡略表記

逃げ駒×がHに、追い駒○がIにあるとき、×：H→G、○：I→H、×：G→F、○：H→D、×：F→C、○：D→E、×：C→B、○：E→A、×：B→Eと進んで、○ターン開始部への進入、逃げ駒と追い駒の入れ替え、○ターン開始部からの退出が行われる。また、○：H→Dや○：D→Eに対して、×側が入れ替え手順(×：F→Cや×：C→B)を放棄すると、○：D or E→Bとなり、ウィークポイントにより×側が敗北する。このようなターン開始部にあるウィークポイントによる敗北例をCC：Dとする。

勝利部 勝利部は、逃げ駒が勝利条件を満たしたときに勝利するための構造である。条件を満たさずに勝利判定に進むと、追い駒タイマーにより逃げ駒側が敗北する。敵対する駒側のウィークポイントを複数用いて作成する。

勝利判定 勝利判定はスイッチ部と勝利部から構成される(図29)。スイッチXの左側灰色部分の通路を→X通路、

右側灰色部分の通路をX通路と呼ぶ。スイッチXがOFF(ON)のときは、 $\neg X$ (X)通路は通れるが、 X ($\neg X$)通路は配置候補に置かれた \times によって塞がれる。また、連結しているスイッチはすべて同じON/OFF状態をとるので、これらの通路の集合を、変数Xに対応した通路群とよぶ。

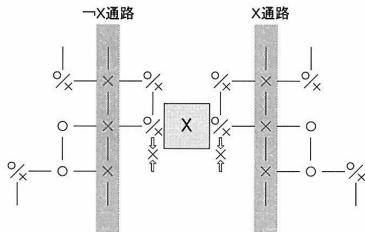


図 29. 勝利判定に使用する通路

グローバルな敗北例

これまで挙げた局所盤面では説明できなかった敗北例を、図1で説明する。逃げ駒 \circ が \circ ターン開始部直後の分岐で \circ スイッチ部に進んだときに、追い駒 \times が \circ Tを通して(先に述べたように、図1の \circ T部分は、実際は適当な距離がとってある。他の場所についても同様である) \times 勝利部へ移動して勝利しようとしても、 \circ の方が先に \circ スイッチ部に設置されている追い駒タイマーに到着するので、 $C:C:B$ により \times 側が敗北する。また、逃げ駒 \circ が \times ターン開始部に入る直前の合流地点で追い駒 \times に追い越された場合、 \times が \times ターン開始部にある \circ 側のウィークポイントに到着することで、 $C:C:D$ により \circ 側が敗北する。

G_2 ゲームのシミュレーション(定理2の証明)

以下に述べるはさみ将棋の初期盤面からゲームをスタートすれば、 G_2 ゲームのインスタンス $(\tau, I-WIN(X,Y), II-WIN(X,Y), \alpha)$ をシミュレートできる。 G_2 ゲームの勝利条件である $\circ(\times)-WIN(X,Y)$ の各項に対応した $\circ(\times)$ 勝利判定通路を作成する。すなわち、その項の中に変数X(否定変数 $\neg X$)があればX通路群の中のひとつのX通路($\neg X$)を通り、かつ異なる項は異なる通路を使用するように作成する。そして、 G_2 ゲームの真偽値割り当て α と各変数Xについて、 α のXへの割り当てが真(偽)ならば、連結スイッチXをON(OFF)状態にして、プレイヤー番号 τ が $\circ(\times)$ ならば、 $\circ(\times)$ のターン部のEに $\circ(\times)$ を、Bに $\times(\circ)$ を配置して、 $\circ(\times)$ が先手ではさみ将棋ゲームを開始

すればよい。

このとき、プレイヤー $\circ(\times)$ は自分のターンのときに \circ スイッチ部に進んで1つ変数を選択し、そのスイッチ群の状態を切り替えるか、または状態を一切切り替えることなくパスすることができる。さらに、プレイヤー $\times(\circ)$ のターンが終了した直後に、 $\circ(\times)$ の勝利判定通路のいずれかが勝利部に至るまでブロックされることなく通れるようになっていれば、その通路を進んで $\circ(\times)$ が勝利する。このとき、先に述べた構成から、 $\circ(\times)$ 勝利判定通路のいずれかが通れるようになることと、 $\circ(\times)-WIN(X,Y)$ が真になることは同値である。よって、先に述べたとおりの初期状態からはさみ将棋ゲームを開始すれば、その結果(\circ 側勝利、 \times 側勝利、引き分けのいずれか)と、 G_2 ゲームを3項組 $(\tau, I-WIN(X,Y), II-WIN(X,Y), \alpha)$ から始めた結果は一致する。以上により、 G_2 ゲームの勝利判定問題を、はさみ将棋の小判定問題に帰着することができた。よって、定理1により、はさみ将棋の勝利判定問題は、EXPTIME 完全である。

5. まとめ

本稿では、一般化はさみ将棋の盤面で G_2 ゲームを再現することにより、一般化はさみ将棋問題が EXPTIME 完全問題であることを証明した。ただし、本稿では不動駒を使用し、斜め取りを許した。今後の課題として、これらのルールの内のひとつもしくは両方を取り除いたときにも、一般化はさみ将棋が EXPTIME 完全となるかどうか検討したい。

6. 参考文献

- [1]安達博行、亀川裕之、岩田茂樹、 $n \times n$ 盤面上の将棋の指数時間完全性について、信学論、volume J70-D(10), pages 1843-1852, 1987.
- [2] J. Robson, The Complexity of Go, Proc. IFIP (International Federation of Information, pages 413—417, 1983.
- [3] L. J. Stockmeyer and A. K. Chandra, Provably difficult combinatorial games, SIAM Journal on Computing, volume 8(2), pages 151—174, 1979.
- [4] Storer, On the Complexity of Chess, Journal of Computer and System Sciences, volume 27, 1983.