凸性を有する有向グラフ上の独立有向木族の特徴付け

András Frank[1]　藤重悟[2]　神山直之[3]　加藤直樹[3]

[1] Department of Operations Research, Eötvös Loránd University
frank@cs.elte.hu
[2] 京都大学数理解析研究所
fujishig@kurims.kyoto-u.ac.jp
[3] 京都大学大学院工学研究科建築学専攻
{is.kamiyama, naoki}@archi.kyoto-u.ac.jp

概要. 特別な点 $r \in V$ を持つ有向グラフ $D = (V, A)$ 上で，r を根とする辺素な有向木族やその点素版である独立有向木族を求める問題は，理論的にも応用的にも重要な問題であり広く研究されてきた．近年，Edmonds [1] によって示された辺素な有向木族に関する特徴付けが，神山等 [5] の結果を元に藤重 [2] によって拡張された．本論文では，Whitty [6] や Huck [4] によって与えられた独立有向木族に対する結果が，藤重 [2] による辺素な有向木族の特徴付けの拡張と同様に拡張できることを示す．

A Characterization of a Family of Independent Arborescences in a Directed Graph with Convex Sets

András Frank[1]　Satoru Fujishige[2]　Naoyuki Kamiyama[3]　Naoki Katoh[3]

[1] Department of Operations Research, Eötvös Loránd University
frank@cs.elte.hu
[2] Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University
fujishig@kurims.kyoto-u.ac.jp
[3] Department of Architecture and Architectural Engineering, Kyoto University
{is.kamiyama, naoki}@archi.kyoto-u.ac.jp

Abstract. The problem of finding arc-disjoint arborescences rooted at r or independent arborescences rooted at r which are a vertex-disjoint analogue of arc-disjoint arborescences in a directed graph $D = (V, A)$ with a specified vertex $r \in V$ is very important from not only the theoretical viewpoint but also the practical viewpoint. Recently, Fujishige [2] extended the characterization on arc-disjoint arborescences presented by Edmonds [1] based on the result of Kamiyama et al. [5]. In this paper, we prove that the results presented by Whitty [6] and Huck [4] on independent arborescences can be extended in the same manner as Fujishige's extension of Edmonds' theorem on arc-disjoint arborescences.

1 序論

本論文では，$D = (V, A)$ をループを持たない有向グラフであるとする．各 $a \in A$ に対して，$t(a)$ と $h(a)$ でそれぞれ a の始点と終点を表す．各 $v \in V$ に対して，$\delta_D(v)$ と $\varrho_D(v)$ でそれぞれ $t(a) = v$ と $h(a) = v$ を満たす辺 $a \in A$ の集合を表す．また，各 $v \in V$ に対して，$N_D^-(v)$ で $t(a) = w$ を満たす辺 $a \in \varrho_D(v)$ が存在する点 $w \in V$ の集合を表す．各 $B \subseteq A$ に対して，$D - B$ で D から B に含まれる全ての辺を取り除いて得られる有向グラフを表す．各 $W \subseteq V$ に対して，$D[W]$ で W に誘導される D の部分グラフを表す．

D の部分グラフ H に対して，$V(H)$ と $A(H)$ でそれぞれ H の点集合と辺集合を表す．有向道 P とは $t(a_i) = v_{i-1}$ と $h(a_i) = v_i$ を満たす点集合 $v_i \in V$ $(i \in \{0, \ldots, l\})$ と辺集合 $a_i \in A$ $(i \in \{1, \ldots, l\})$ からなる交互列 $v_0, a_1, v_1, \ldots, a_l, v_l$ である．本論文では，

異なる i と j に対して $v_i = v_j$ や $a_i = a_j$ となることを許す．点 v_0 と v_l をそれぞれ有向道 P の始点と終点と呼ぶ．始点 u と終点 v を持つ有向道を uv-道とも呼ぶ．本論文では，点 v も vv-道とみなす．また，有向道を D の部分グラフともみなす．点 $v \in V$ と $u \in V$ に対して，uv-道が存在するとき，v は u から到達可能であると言う．u_iv_i-道族 P_i $(i \in \{1,\ldots,k\})$ は，任意の異なる $i,j \in \{1,\ldots,k\}$ に対して $A(P_i) \cap A(P_j) = \varnothing$ と $V(P_i) \cap V(P_j) = (\{u_i\} \cap \{u_j\}) \cup (\{v_i\} \cap \{v_j\})$ が成り立つとき，開放的点素であるという．少なくとも一つの辺を含む有向道 P は，始点と終点が同じであるとき，有向閉路と呼ばれる．有向閉路を持たない有向グラフは非巡回的であると言う．

D の非巡回的部分グラフ T は，$|\varrho_T(r)| = 0$ を満たす $r \in V(T)$ が存在し，任意の $v \in V(T) - r$ に対して $|\varrho_T(v)| = 1$ が成り立つとき有向木と呼ばれる．ただし，集合 X と $\{x\}$ に対して，$X \setminus \{x\}$ を $X - x$ と省略して書く．また，T は r-有向木とも呼ばれる．つまり，r-有向木は全ての辺が r から遠ざかる方向に向きづけられた根付き木である．r-有向木 T と点 $v \in V(T)$ に対して，rTv を T 上の唯一の rv-道と定義する．r_i-有向木族 T_i $(i \in \{1,\ldots,k\})$ は任意の異なる $i,j \in \{1,\ldots,k\}$ と点 $v \in V(T_i) \cap V(T_j)$．に対して有向道 r_iT_iv と r_jT_jv が開放的点素であるとき独立であると呼ばれる．

Edmonds [1] は辺素な有向木に関して以下の定理を証明した．根 $r \in V$ が与えられたとき，k 個の辺素な全ての点を張る有向木が存在する必要十分条件は，全ての $v \in V$ に対して k 本の辺素な rv-道が存在することである．近年，神山等 [5] は以下のような Edmonds の定理の拡張を与えた．有限添字集合 I と各 $i \in I$ に対して根 $r_i \in V$ が与えられているとする．ただし，異なった $i,j \in I$ に対して $r_i = r_j$ となることを認める．また，各 $i \in I$ に対して V_i を r_i から到達可能な V の点の集合であるとする．このとき，神山等 [5] は $V(T_i) = V_i$ を満たす辺素な r_i-有向木族 T_i $(i \in I)$ が存在する必要十分条件は，各 $v \in V$ に対して辺な r_iv-道族 P_i ($v \in V_i$ を満たす $i \in I$) が存在することであることを示した．さらに藤重 [2] は神山等 [5] の結果を到達可能性の代わりに凸性という概念を導入することによりさらに拡張した．部分集合 $W \subseteq V$ は，任意の W 内の二点間の有向道の途中の点が全て W に含まれるとき凸であると言う．藤重 [2] は神山等 [5] の結果が，V_i を根 r_i を含む凸集合 U_i に置き換えても成り立つことを示した．正確には，$r_i \in U_i$ を満たす凸集合族 $U_i \subseteq V$ $(i \in I)$ が与えられたとき，各 $v \in V$ に対して，$I(v) = \{i \in I : v \in U_i\}$ と定義する．このとき，藤重 [2] は $V(T_i) = U_i$ を満たす辺素な r_i-有向木族 T_i $(i \in I)$ が存在する必要十分条件が，各 $v \in V$ に対して辺素な r_iv-道族 P_i $(i \in I(v))$ が存在することであることを示した．

Edmonds の定理において，明らかな必要条件が十分条件にもなっている．この定理の点素版として，以下のような予想が自然と導かれる．根 $r \in V$ が与えられたとき，k 個の独立な全ての点を張る r-有向木が存在する必要十分条件は，各 $v \in V$ に対して k 個の開放的点素な rv-道が存在することである．Whitty [6] はこの予想を $k \leq 2$ の場合に対して肯定的に解決し，また Huck [3] は $k \geq 3$ の場合に対して反例を提示した．さらに，Huck [4] は，もし入力のグラフが非巡回的であるならばこの予想は正しいことを証明した．本論文ではこの予想の以下のような一般化を考える．

言明 1. 有向グラフ $D = (V, A)$，有限添字集合 I，根集合 $r_i \in V$ $(i \in I)$，$r_i \in U_i$ を満たす凸集合族 $U_i \subseteq V$ $(i \in I)$ が与えらたとき，以下の (a) と (b) は等価である．

(a) $V(T_i) = U_i$ を満たす独立 r_i-有向木族 T_i $(i \in I)$ が存在する．

(b) 各 $v \in V$ に対して開放的点素な r_iv-道族 P_i $(i \in I(v))$ が存在する．

言明 1 は，複数の根が存在する点と有向木が全ての点を張っていない点で，上記の予想の一般化となっている．ただし，Huck [3] の結果より言明 1 は $|I(v)| \geq 3$ を満たす $v \in V$ が存在する場合は，たとえ r_i $(i \in I)$ が全て同じであっても，一般に正しくないことに注意する．本論文では，この言明 1 に関して以下の三つの定理を証明する．

定理 2. もし r_i $(i \in I)$ が全て同じで（r は唯一の根とする）各 $v \in V - r$ に対して $|I(v)| \leq 2$ が成り立つとき，言明 1 は正しい．

もし $|I| = 2$ が成り立つならば，各 $v \in V$ に対して $|I(v)| \leq 2$ が自動的に成り立つ．よって，定理 2 は，各有向木が全ての点を張っていない点で Whitty [6] の結果の一般化となっている．以下の定理も同様の点で Huck [4] の結果の一般化となっている．

定理 3. もし r_i $(i \in I)$ が全て同じで D が非巡回的であるならば，言明 1 は正しい．

最後に，複数の根が存在するという点で，真の拡張となっている以下の定理を証明する．

定理 4. もし D が非巡回的であり各 $v \in V$ に対して $|I(v)| \leq 2$ が成り立つならば，言明 1 は正しい．

また，我々の証明は構成的であるため，同時に独立有向木族を求める多項式時間アルゴリズムも与える．

2 定理 2 の証明

2.1 証明

(a)⇒(b) は自明であるため，(b)⇒(a) を証明する．r_i $(i \in I)$ が全て同じであるため，r で唯一の根を表す．もし $|I| = 1$ が成り立つならば，凸集合の定義より (b)⇒(a) は自明であるため，$|I| \geq 2$ が成り立つと仮定する．

(b) が成り立つと仮定する．$\mathcal{W}$ を U_i $(i \in I)$ の異なった二つの凸集合の共通部分で，$\{r\}$ ではないものの族とする．任意の U_i は r を含んでいるため，異なった二つの凸集合の共通部分は常に r を含むことに注意する．各 $v \in V$ に対して $|I(v)| \leq 2$ が成り立つため，以下の事実が得られる．

A1. 各 $W \in \mathcal{W}$ に対して，$W = U_i \cap U_j$ を満たす $i, j \in I$ が一意的に決まる．

A2. 各異なった $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$ に対して，$W_1 \cap W_2 = \{r\}$ が成り立つ．

条件 A1 より，もし $W \in \mathcal{W}$ が U_i と U_j の共通部分であるとき，$I(W) = \{i, j\}$ と記す．

凸集合の定義より，各 $W \in \mathcal{W}$ と $v \in W$ に対して，全ての rv-道の途中の点は W に含まれる．つまり (b) より，各 $W \in \mathcal{W}$ と $v \in W$ に対して $D[W]$ に含まれる二つの開放的点素な rv-道が存在する．よって，Whitty [6] の結果より，各 $W \in \mathcal{W}$ に対して $D[W]$ の中に二つの全ての点を張る独立 r-有向木 T_i^W $(i \in I(W))$ が存在する．ただし，条件 A2 より有向木族 T_i^W $(W \in \mathcal{W},\ i \in I(W))$ は独立であることに注意する．

ここで，各 $i \in I$ に対して，D_i を $|I(v)| \geq 2$ を満たす点 $v \in U_i$ の集合を新しい点 u_i に縮約することによって $D[U_i]$ から得られる有向グラフであるとする．(b) より各 $v \in V$ に対して D 上には rv-道が存在する．さらに，U_i $(i \in I)$ は凸集合族であるので，各 $i \in I$ と $v \in U_i$ に対して，rv-道の途中の点は全て U_i に含まれる．つまり，各 $i \in I$ と $v \in U_i$ に対して，$D[U_i]$ の中に rv-道が存在する．よって，$|I(r)| \geq 2$ が成り立ちかつ D_i の定義より，各 $i \in I$ と $|I(v)| = 1$ を満たす $v \in U_i$ に対して，$u_i v$-道が D_i の中に存在する．以上の議論より，D_i の中に全ての点を張る u_i-有向木 $\hat{T}_i$ が存在する．また，各 $i \in I$ に対して T_i^W $(i \in I(W)$ を満たす $W \in \mathcal{W})$ と $\hat{T}_i$ を合わせることにより，$V(T_i) = U_i$ を満たす独立 r-有向木族 T_i $(i \in I)$ が得られることは明らか．よって定理は証明された．

2.2 計算時間

定理 2 より，以下の定理のように $V(T_i) = U_i$ を満たす独立 r-有向木族 T_i $(i \in I)$ が存在するかを判定し，もし存在するならばそれらを見つけることが多項式時間できることがわかる（証明は省略）．ただし，以下の定理では各 $i \in I$ に対して $|U_i| \geq 2$ が成り立つと仮定する．この仮定より，以下のようにして $|I| \leq |A|$ と仮定することができることがわかる．各 $i \in I$ に対して $|U_i| \geq 2$ が成り立つため，$V(T_i) = U_i$ を満たす各 r-有向木 T_i は少なくとも一つの辺を含んでいる．さらに，独立有向木族はその定理より辺素である．よって，もし $|I| > |A|$ が成り立つとすると，$V(T_i) = U_i$ を満たす独立 r-有向木族 T_i $(i \in I)$ は存在しえない．また，加えて D は弱連結，つまり $|V| \leq |A|$ を満たすとする．

定理 5. 根 $r \in V$ を持つ有向グラフ $D = (V, A)$，有限添字集合 I，$r \in U_i$ を満たす凸集合族 $U_i \subseteq V$ $(i \in I)$ が与えられているとする．また，各 $v \in V - r$ に対して $|I(v)| \leq 2$ が成り立つとする．このとき，$O(|V|^3 + |A|)$ 時間で，$V(T_i) = U_i$ を満たす独立 r-有向木族 T_i $(i \in I)$ が存在するかを判定し，もし存在するならばそれらを見つけることができる．

3 定理 3 の証明

3.1 証明

(a)⇒(b) が成り立つことは自明であるので，(b)⇒(a) を証明する．我々の証明は Huck [4] の証明

を基にしている．また，定理 2 の証明と同様に，唯一の根を r で表す．

(b) が成り立つと仮定する．まず，以下の条件が満たされるとき (b)⇒(a) が成り立つことを証明すれば十分であることを証明する．

B1. 各 $v \in V$ に対して $I(v) \neq \varnothing$ が成り立つ．
B2. $\delta_D(r)$ に含まれない平行辺は存在しない．

$I(v) \neq \varnothing$ を満たす各 $v \in V$ に対して，凸集合の定義より任意の rv-道は $I(w) = \varnothing$ を満たす $w \in V$ を含まない．よって，たとえ $I(v) = \varnothing$ を満たす $v \in V$ を取り除いたとしても，(b) は成り立つ．このことより条件 B1 が導かれる．また，条件 B2 は開放的点素性の定義より導かれる．

もし各 $v \in V - r$ に対して $|I(v)|$ 個の開放的辺素な rv-道が存在するならば，開放的点素性の定義より $|\varrho_D(v)| \geq |I(v)|$ が成り立つ．よって，定理は以下の補題から導かれる．

補題 6. 根 $r \in V$ を持つ非巡回的有向グラフ $D = (V, A)$，有限添字集合 I，$r \in U_i$ を満たす凸集合族 $U_i \subseteq V$ $(i \in I)$ が与えられているとする．さらに，条件 B1 と B2 が成り立つとする．このとき，もし各 $v \in V - r$ に対して $|\varrho_D(v)| \geq |I(v)|$ が成り立つならば，$V(T_i) = U_i$ を満たす独立 r-有向木族 T_i $(i \in I)$ が存在する．

証明. $|I|$ に関する帰納法で証明する．まず $|I| = 1$ の場合を考える．この場合，条件 B1 を仮定しているため，全ての点を張る r-有向木が存在することを示せばよい．各 $v \in V - r$ に対して $|\varrho_D(v)| \geq 1$ が成り立ち，D は非巡回的であるので，任意の点 $v \in V$ は r から到達可能である．これは，全ての点を張る r-有向木が存在することを示している．

$|I| = n - 1 \geq 1$ の場合に補題が成り立つと仮定し，$|I| = n$ の場合を考えよう．D が非巡回的であるので，$w \in N_D^-(v)$ を満たす各 $v, w \in V - r$ に対して $\pi(v) < \pi(w)$ が成り立つ順序 $\pi \colon V - r \to \{1, \dots, |V| - 1\}$ が存在することが知られている．このような順序 π は D における $V - r$ のトポロジカル順序と呼ばれる．D における $V - r$ のトポロジカル順序 π に対して，$\pi^{\leftarrow} \colon V - r \to \{1, \dots, |V| - 1\}$ を各 $v \in V - r$ に対して $\pi^{\leftarrow}(v) = |V| - \pi(v)$ と定義する．

r-有向木 T は，もし $\pi^{\leftarrow}$ が $D - A(T)$ における $V - r$ のトポロジカル順序であるような，部分グラフ $(V, A(T))$ における $V - r$ のトポロジカル順序 π が存在するとき適格であると言う．

命題 7. 根 $r \in V$ を持つ非巡回的有向グラフ $D = (V, A)$，有限添字集合 I，$r \in U_i$ を満たす凸集合族 $U_i \subseteq V$ $(i \in I)$ が与えられているとする．さらに，条件 B1 と B2 が成り立つとする．このとき，もし各 $v \in V - r$ に対して $|\varrho_D(v)| \geq |I(v)|$ が成り立つならば，ある $p \in I$ に対して $V(T_p) = U_p$ を満たす適格な r-有向木 T_p が存在する．

証明. $|V|$ に関する帰納法で証明する．$|V| = 1$ の場合は明らかに命題は成り立つ．$|V| = m{-}1 \geq 1$ の場合に命題が成り立つと仮定して，$|V| = m$ の場合を考える．D は非巡回的であるので $\delta_D(\hat{v}) = \varnothing$ を満たす $\hat{v} \in V$ が存在する．また，D は非巡回的であり各 $v \in V{-}r$ に対して $|\varrho_D(v)| \geq 1$ が成り立つため，任意の $v \in V{-}r$ は r から到達可能である．よって，$|V| \geq 2$ より $\hat{v} \neq r$ が成り立つ．$\hat{D} = (\hat{V}, \hat{A})$ を，D から $\hat{v}$ と $\varrho_D(\hat{v})$ に含まれる全ての辺を取り除いて得られる有向グラフであるとする．各 $i \in I$ に対して $\hat{U}_i = U_i - \hat{v}$ と定義すると，明らかに $\hat{U}_i$ $(i \in I)$ は凸集合族となる．各 $v \in \hat{V}$ に対して $\hat{I}(v) = \{i \in I \colon v \in \hat{U}_i\}$ とすると，$I(v) = \hat{I}(v)$ が成り立つ．さらに，各 $v \in \hat{V}$ に対して $\delta_D(\hat{v}) = \varnothing$ より $\varrho_D(v) = \varrho_{\hat{D}}(v)$ が成り立つため、$|\varrho_D(v)| \geq |I(v)|$ より各 $v \in \hat{V} - r$ に対して $|\varrho_{\hat{D}}(v)| \geq |\hat{I}(v)|$ が成り立つ．よって帰納法の仮定より，ある $p \in I$ に対して $\hat{V}(\hat{T}_p) = \hat{U}_p$ を満たす適格な r-有向木 $\hat{T}_p$ が存在する．$\hat{\pi}$ を，$\hat{\pi}^{\leftarrow}$ が $\hat{D} - \hat{A}(\hat{T}_p)$ における $\hat{V} - r$ のトポロジカル順序となるような，部分グラフ $(\hat{V}, \hat{A}(\hat{T}_p))$ における $\hat{V} - r$ のトポロジカル順序であるとする．また，便宜上 $\hat{\pi}(r) = |V| - 1$ とする．

ここからは，$\hat{T}_p$ から $V(T_p) = U_p$ を満たす適格な r-有向木 T_p を構成することができることを示す．もし $\hat{v}$ が U_p に含まれていなければ，$U_p = \hat{U}_p$ が成り立つため，$T_p = \hat{T}_p$ とすることにより $V(T_p) = U_p$ を満たす r-有向木 T_p が得られる．さらに，$\pi \colon V - r \to \{1, \dots, |V| {-} 1\}$ を，$\pi(\hat{v}) = |V| {-} 1$ そして各 $v \in \hat{V}$ に対しては $\pi(v) = \hat{\pi}(v)$ と定義する．すると，帰納法の仮定より π と $\pi^{\leftarrow}$ はそれぞれ部分グラフ $(V, A(T_p))$ と $D - A(T_p)$ における $V - r$ のトポロジカル順序となっている．

もし $\hat{v}$ が U_p に属しているならば，$\hat{v}$ を $t(\hat{a}), h(\hat{a}) \in U_p$ を満たす適当な辺 $\hat{a}$ と共に $\hat{T}_p$ に加えなければなら

ない．$v_{\max}$ を以下の集合に含まれる唯一の点とする．

$$\arg\max\{\hat{\pi}(v)\colon v \in N_D^-(\hat{v})\}. \tag{1}$$

ただし，$|\varrho_D(\hat{v})| \geq 1$ より，このような $v_{\max}$ が常に存在することに注意する．$\hat{a}$ を $h(\hat{a}) = \hat{v}$ と $t(\hat{a}) = v_{\max}$ を満たす辺とする．各 $v \in V - r$ に対して $|\varrho_D(v)| \geq 1$ が成り立ちかつ D は非巡回的であるので，D において全ての点 $v \in V$ は r から到達可能である．よって，$v_{\max}$ を含む $r\hat{v}$-道が存在し，凸集合の定義より $v_{\max}$ は U_p つまり $\hat{U}_p$ に含まれる．このことより，$\hat{a}$ を $\hat{T}_p$ に加えることにより $V(T_p) = U_p$ を満たす r-有向木 T_p を得ることができる．残された議論は，$\pi^{\leftarrow}$ が $D - A(T_p)$ における $V - r$ のトポロジカル順序になるような，部分グラフ $(V, A(T_p))$ における $V - r$ のトポロジカル順序 π が存在することの証明である．まず，$\pi\colon V - r \to \{1, \ldots, |V| - 1\}$ を以下のように定義する．

$$\pi(v) = \begin{cases} \hat{\pi}(v_{\max}), & \text{if } v = \hat{v}, \\ \hat{\pi}(v), & \text{if } \hat{\pi}(v) < \hat{\pi}(v_{\max}), \\ \hat{\pi}(v) + 1, & \text{if } \hat{\pi}(v) \geq \hat{\pi}(v_{\max}). \end{cases} \tag{2}$$

帰納法の仮定より，π は明らかに部分グラフ $(V, A(T_p))$ における $V - r$ のトポロジカル順序となっている．よって，$\pi^{\leftarrow}$ が $D - A(T_p)$ における $V - r$ のトポロジカル順序となっていることを証明すればよい．このためには，$t(a), h(a) \in V - r$ と $\pi(h(a)) < \pi(t(a))$ を満たす $D - A(T_p)$ の辺 a が存在しないことを示せばよい．このような辺 a を違反していると呼ぶ．もし違反している辺が存在するならば，$\hat{\pi}^{\leftarrow}$ は $\hat{D} - \hat{A}(\hat{T}_p)$ における $\hat{V} - r$ のトポロジカル順序であるので，その終点は $\hat{v}$ であり，さらに (1) と (2) より，その始点は $v_{\max}$ となる．しかし，もし $v_{\max} = r$ ならば，違反している辺の終点は $V - r$ に含まれていなければならないので，違反している辺は存在しない．また，$v_{\max} \neq r$ の場合は，条件 B2 より $\hat{a}$ は $v_{\max}$ から $\hat{v}$ への唯一の辺である．つまり，もし違反する辺が存在するならば，それは $\hat{a}$ でなければならない．しかし，$\hat{a}$ は T_p に含まれているため，これは違反している辺の定義に矛盾する．よって，違反している辺は存在しないので，証明が完了する．□

では，補題 6 の証明を続けよう．命題 7 よりある $p \in I$ に対して $V(T_p) = U_p$ を満たす r-有向木 T_p が存在する．$\tilde{I} = I - p$，そして各 $v \in V$ に対して $\tilde{I}(v) = \{i \in \tilde{I}\colon v \in U_i\}$ と定義する．そして，$\tilde{D}$ を $D - A(T_p)$ から $\tilde{I}(v) = \varnothing$ を満たす $v \in V$ を取り除いて得られる有向グラフであるとする．このとき，各 $v \in V - r$ に対して $|\varrho_{\tilde{D}}(v)| \geq |\tilde{I}(v)|$ が成り立つ（証明は省略）．よって，帰納法の仮定より $V(T_i) = U_i$ を満たす独立 r-有向木族 T_i $(i \in \tilde{I} = I - p)$ が存在する．残された議論は，T_i $(i \in I)$ が独立であることの証明である．T_i $(i \in I - p)$ は帰納法の仮定より独立であるので，各 $i \in I - p$ に対して T_p と T_i が独立であることを示せばよい．このためには，各 $v \in V(T_p) \cap V(T_i)$ に対して，rT_pv と rT_iv が開放的点素であることを証明すればよい．T_p と T_i は明らかに辺素であるので，rT_pv と rT_iv の開放的点素性を考える．π を $\pi^{\leftarrow}$ が $D - A(T_p)$ における $V - r$ のトポロジカル順序であるような部分グラフ $(V, A(T_p))$ における $V - r$ のトポロジカル順序であるとする．このとき、rT_pv の途中の点 w は $\pi(v) < \pi(w)$ を満たすが，$\pi^{\leftarrow}$ が $D - A(T_p)$ における $V - r$ のトポロジカル順序であるので，rT_iv の途中の点 w は $\pi(v) > \pi(w)$ を満たす．よって，rT_pv と rT_iv が開放的点素であることが示された．□

3.2 計算時間

定理 3 より，以下の定理が得られる（証明は省略）．定理 2 の場合と同様に，各 $i \in I$ に対して $|U_i| \geq 2$ が成り立つことと，D が弱連結であることを仮定する．

定理 8. 根 $r \in V$ を持つ非巡回的有向グラフ $D = (V, A)$，有限添字集合 I，$r \in U_i$ を満たす凸集合族 $U_i \subseteq V$ $(i \in I)$ が与えられているとする．このとき，$O(|I||A|)$ 時間で，$V(T_i) = U_i$ を満たす独立 r-有向木族 T_i $(i \in I)$ が存在するかを判定し，もし存在するならば見つけることができる．

4 定理 4

4.1 証明

(a)⇒(b) が成り立つことは明らかであるので，(b)⇒(a) を証明する．証明の枠組みは定理 3 と同様であるが，定理 3 の証明で用いた適格な有向木の拡張など非自明な議論を必要とする．

まず，以下の条件が成り立っている場合に対して (b)⇒(a) が成り立つことを証明すれば十分であることを示す．

C1. 各 $a \in A$ に対して，$t(a)$ はある $i \in I(h(a))$ を満たす U_i に含まれる．
C2. A に含まれるすべての平行辺の始点は R に含まれる．ただし，R は $v = r_i$ と $v = r_j$ を満たす異なった $i, j \in I$ が存在する点 $v \in V$ の集合であるとする．

各 $v \in V$ と $i \in I(v)$ に対して，任意の $r_i v$-道は，凸集合の定義より $t(a)$ と $h(a)$ が U_i に含まれる $a \in A$ によって構成されている．よって，たとえ $t(a)$ が全ての $i \in I(h(a))$ に対して U_i に含まれていないような $a \in A$ を取り除いても (b) は成り立つ．このことより条件 C1 は導かれる．また，条件 C2 は開放的点素性の定義より導かれる．

もし (b) が成り立つならば，以下の条件が成り立つ．ただし，各 $v \in V$ に対して $I^-(v) = \{i \in I(v) \colon v \neq r_i\}$ とする．

D1. 各 $v \in V$ に対して $|\varrho_D(v)| \geq |I^-(v)|$ が成り立つ．
D2. 各 $v \in V$ と $i \in I^-(v)$ に対して，$t(a) \in U_i$ を満たす $a \in \varrho_D(v)$ が存在する．

条件 D1 は開放的点素性の定義より導かれる．各 $v \in V$ と $i \in I^-(v)$ に対して，$h(a) = v$ を満たす $r_i v$-道 P_i の辺 a の始点は，凸集合の定義より U_i に含まれる．このことより，条件 D2 は導かれる．

ここからは，条件 C1，C2，D1，D2 が成り立つとき，$V(T_i) = U_i$ を満たす独立 r_i-有向木族 T_i $(i \in I)$ が存在することを示す．このために，まず実行可能順序と適格有向木を定義する．適格有向木の定義は定理 3 の証明で用いたものの一般化となっている．

定義 9 (実行可能順序)**.** 各 $p \in I$ に対して X_i $(i \in I - p)$ を以下のように定義する．

$$X_i = \begin{cases} U_i \cap U_p, & \text{if } r_i \neq r_p, \\ (U_i \cap U_p) - r_p, & \text{if } r_i = r_p. \end{cases}$$

そして，r_p-有向木 T_p が与えられたとき，各 $i \in I - p$ に対して $\pi_i \colon X_i \to \{1, \ldots, |X_i|\}$ を，もし π_i が部分グラフ $(X_i, A(T_p[X_i]))$ における X_i のトポロジカル順序であり，$\pi_i^{\leftarrow}$ が $D[X_i] - A(T_p[X_i])$ における X_i のトポロジカル順序であるとき，D における (T_p, X_i)-実行可能順序と呼ぶ．

定義 10 (適格有向木)**.** 各 $p \in I$ に対して，r_p-有向木 T_p は，T_p が以下の条件を満たすとき，適格であると言う．

E1. 各 $v \in V$ と $i \neq p$ を満たす $i \in I^-(v)$ に対して，$t(a) \in U_i$ を満たす $a \in \varrho_{D-A(T_p)}(v)$ が存在する．
E2. 各 $i \in I - p$ に対して，(T_p, X_i)-実行可能順序 π_i が存在する．

命題 11. 非巡回的有向グラフ $D = (V, A)$，有限添字集合 I，根集合 $r_i \in V$ $(i \in I)$，$r_i \in U_i$ を満たす凸集合族 $U_i \subseteq V$ $(i \in I)$ が与えられているとする．さらに，条件 C1 と C2，そして各 $v \in V$ に対して $|I(v)| \leq 2$ が成り立つとする．このとき，もし条件 D1 と D2 が成り立つならば，ある $p \in I$ に対して $V(T_p) = U_p$ を満たす r_p-有向木 T_p が存在する．

証明. $|V|$ に関する帰納法で証明する．$|V| = 1$ の場合は命題は明らかに成り立つ．$|V| = m - 1 \geq 1$ のとき命題が成り立つと仮定して，$|V| = m$ の場合を考える．また，一般性を失うことなく各 $i \in I$ に対して $|U_i| \geq 2$ が成り立つと仮定する．D は非巡回的であるので，$\delta_D(\hat{v}) = \varnothing$ を満たす $\hat{v} \in V$ が存在する．条件 D2 と D が非巡回的であることより，任意の $i \in I$ と $v \in U_i$ に対して，$D[U_i]$ において v は r_i から到達可能である．よって，各 $i \in I$ に対して $|U_i| \geq 2$ が成り立つため，$\hat{v} \neq r_i$ が導かれる．ここで，$\hat{D}$，$\hat{U}$ $(i \in I)$，そして各 $v \in \hat{V}$ に対して $\hat{I}(v)$ を命題 7 の証明と同様に定義する．各 $v \in \hat{V}$ に対して，$\hat{I}^-(v) = \{i \in \hat{I}(v) \colon r_i \neq v\}$ とすると，各 $v \in \hat{V}$ に対して明らかに $I(v) = \hat{I}(v)$ と $I^-(v) = \hat{I}^-(v)$ が成り立つ．さらに，$\delta_D(\hat{v}) = \varnothing$ より，各 $v \in \hat{V}$ に対して $\varrho_D(v) = \varrho_{\hat{D}}(v)$ が成り立つ．よって，条件 D1 と D2 が D と U_i $(i \in I)$ に対して成り立つことより，$\hat{D}$ と $\hat{U}_i$ $(i \in I)$ に対して条件 D1 と D2 が成り立つ．以上の議論と帰納法の仮定より，ある $p \in I$ に対して $\hat{V}(\hat{T}_p) = \hat{U}_p$ を満たす適格な r_p-有向木 $\hat{T}_p$ が存在する．凸集合族 $\hat{U}_i$ $(i \in I)$ に対して $\hat{X}_i$ $(i \in I - p)$ を，U_i $(i \in I)$ に対する X_i $(i \in I - p)$ と同様に定義し，各 $i \in I - p$ に対して $\hat{\pi}_i$ を $\hat{D}$ における $(\hat{T}_p, \hat{X}_i)$-実行可能順序とする．

ここからは，$\hat{T}_p$ から $V(T_p) = U_p$ を満たす適格な r_p-有向木 T_p が構成できることを示す．証明は，$\hat{v} \in U_p$ が成り立つかどうかで分けられる．ただし，

ここでは $\hat{v} \in U_p$ かつ $|I(\hat{v})| = 2$ 場合のみを扱い，他の場合に関しては省略する．

$I(\hat{v}) = \{p, q\}$ が成り立つと仮定する．まず，$t(\hat{a}) \notin U_q$ を満たす $\hat{a} \in \varrho_D(\hat{v})$ が存在する場合を考えよう．条件 C1 より $t(\hat{a}) \in U_p$ が成り立つため，$\hat{a}$ を $\hat{T}_p$ に加えることにより $V(T_p) = U_p$ を満たす r_p-有向木 T_p を得ることができる．さらに，条件 D2 より $t(\tilde{a}) \in U_q$ を満たす $\tilde{a} \in \varrho_D(\hat{v})$ が存在する．$t(\hat{a}) \notin U_q$ より $\hat{a} \neq \tilde{a}$ が成り立つ．よって，$\tilde{a} \in \varrho_D(\hat{v}) - \hat{a}$ が成り立つ．さらに，$\varrho_D(\hat{v})$ の辺のうち $\hat{a}$ のみが $A(T_p)$ に含まれるため，$\varrho_D(\hat{v}) - \hat{a} = \varrho_{D-A(T_p)}(\hat{v})$，つまり $\tilde{a} \in \varrho_{D-A(T_p)}(\hat{v})$ が成り立つ．以上の議論より，$\{i \in I^-(\hat{v}) : i \neq p\} = \{q\}$ より条件 E1 が $\hat{v}$ に対して成り立つ．このことより，T_p が条件 E1 を満たすことが帰納法の仮定より導かれる．次に，条件 E2 を考えよう．任意の $i \in I \backslash \{p, q\}$ に対して $\hat{v} \notin X_i$ が成り立つため，各 $i \in I \backslash \{p, q\}$ に対して $\pi_i = \hat{\pi}_i$ とすることにより (T_p, X_i)-実行可能順序 π_i が得られる．では，X_q に関する順序を考えよう．まず，π_q を $\pi_q(\hat{v}) = |X_q|$，そして各 $v \in \hat{X}_q$ に対して $\pi_q(v) = \hat{\pi}_q(v)$ と定義しよう．このとき，$\delta_D(\hat{v}) = \varnothing$，$\pi_q(\hat{v}) = |X_q|$，そして帰納法の仮定より，$\pi_q^{\leftarrow}$ は $D[X_q] - A(T_p[X_q])$ における X_q のトポロジカル順序になっている．もし，π_q が部分グラフ $(X_q, A(T_p[X_q]))$ における X_q のトポロジカル順序でなければ，$\pi_q(t(\tilde{a})) < \pi_q(h(\tilde{a}))$ を満たす $\tilde{a} \in A(T_p[X_q])$ が存在する．もしこのような $\tilde{a}$ が存在するならば，帰納法の仮定より $h(\tilde{a})$ は $\hat{v}$ でなければならない．よって，$\varrho_D(\hat{v})$ の辺の中で $\hat{a}$ のみが T_p に含まれているので $\tilde{a} = \hat{a}$ が成り立つ．しかし，$t(\hat{a}) \notin U_q$ より $\hat{a} \notin A(T_p[X_q])$ が導かれる．これは $\tilde{a} \in A(T_p[X_q])$ に矛盾する．

では，最後に任意の $a \in \varrho_D(\hat{v})$ に対して $t(a) \in U_q$ が成り立つ場合を考えよう．条件 D2 より，$I(t(a)) = \{p, q\}$ を満たす $a \in \varrho_D(\hat{v})$ が少なくとも一つは存在する．さらに，条件 D1 より以下の (i) と (ii) のうち少なくとも一つが成り立つ．

(i) $I(t(a)) = I(t(b)) = \{p, q\}$ を満たす $a, b \in \varrho_D(\hat{v})$ が存在する．

(ii) $t(a) \notin U_p$ を満たす $a \in \varrho_D(\hat{v})$ が存在する．

よって，たとえ $I(t(a)) = \{p, q\}$ を満たす $a \in \varrho_D(\hat{v})$ を $\hat{T}_q$ に加えたとしても，$\hat{v}$ に対して条件 E1 が成り立ち，このことと帰納法の仮定より，得られた有向木族は条件 E1 を満たす．以上の議論より，条件 E2 が満たされるように，$I(t(a)) = \{p, q\}$ を満たす $a \in \varrho_D(\hat{v})$ をどのように選べばよいかを考えればよい．任意の $i \in I \setminus \{p, q\}$ に対して，$\hat{v} \notin X_i$ が成り立つため，どの $a \in \varrho_D(\hat{v})$ を $\hat{T}_p$ へ加えても，各 $i \in I \setminus \{p, q\}$ に対しては，$\pi_i = \hat{\pi}_i$ とすることにより，(T_p, X_i)-実行可能順序 π_i を得ることができる．では，X_q に対する順序を考えよう．定理 3 の証明と同様のアイデアを用いる．以下の議論では，$r_p = r_q$ が成り立つときは，便宜上 $\hat{\pi}_q(r_p) = |X_q|$ とする．$v_{\max}$ を以下の集合に含まれる唯一の点とする．

$$\arg\max\{\hat{\pi}_q(v) : v \in N_D^-(\hat{v}) \cap U_p\}. \qquad (3)$$

そして，$\hat{a}$ を $h(\hat{a}) = \hat{v}$ と $t(\hat{a}) = v_{\max}$ を満たす辺とする．すると，$\hat{a}$ を $\hat{T}_p$ に加えることにより $V(T_p) = U_p$ を満たす r_p-有向木 T_p を得ることができる．さらに，$\pi_q : X_q \to \{1, \ldots, |X_q|\}$ を以下のように定義する．

$$\pi_q(v) = \begin{cases} \hat{\pi}_q(v_{\max}), & \text{if } v = \hat{v}, \\ \hat{\pi}_q(v), & \text{if } \hat{\pi}_q(v) < \hat{\pi}_q(v_{\max}), \\ \hat{\pi}_q(v) + 1, & \text{if } \hat{\pi}_q(v) \geq \hat{\pi}_q(v_{\max}). \end{cases} \qquad (4)$$

このとき，条件 C2，(3)，(4) より，D における π_q は (T_p, X_q)-実行可能順序であることを，命題 7 における証明と同様の方法で示すことができる．□

では，定理 4 を示す．この定理は以下の補題により導かれる．

補題 12. 非巡回的有向グラフ $D = (V, A)$，有限添字集合 I，根集合 $r_i \in V$ $(i \in I)$，$r_i \in U_i$ を満たす凸集合族 $U_i \subseteq V$ $(i \in I)$ が与えられているとする．さらに，条件 C1 と C2，そして各 $v \in V$ に対して $|I(v)| \leq 2$ が成り立つとする．このとき，もし条件 D1 と D2 が成り立つならば，$V(T_i) = U_i$ を満たす独立 r_i-有向木族 T_i $(i \in I)$ が存在する．

証明. $|I|$ に関する帰納法で証明する．まず，$|I| = 1$ の場合，つまり一つの根 $r \in V$ と $r \in U$ を満たす凸集合 $U \subseteq V$ が存在する場合を考える．この場合，$V(T) = U$ を満たす r-有向木 T が存在することを示せばよい．条件 D2 より，各 $v \in U - r$ に対して $|\varrho_{D[U]}(v)| \geq 1$ が成り立つ．よって、D は非巡回的であるので，任意の $v \in U$ は $D[U]$ において r から到達可能である．このことより，$V(T) = U$ を満たす r-有向木 T が存在することがわかる．

$|I| = n - 1 \geq 1$ の場合に補題が成り立つと仮定して，$|I| = n$ の場合を考えよう．命題 11 より，ある

$p \in I$ に対して $V(T_p) = U_p$ を満たす適格な r_p-有向木 T_p が存在する．$\tilde{I} = I - p$ とし，各 $v \in V$ に対して $\tilde{I}(v)$ と $\tilde{I}^-(v)$ を $I(v)$ と $I^-(v)$ と同様に定義する．$\tilde{R}$ を，$r_i = v$ と $r_j = v$ を満たす異なる $i, j \in \tilde{I}$ が存在する点 $v \in V$ の集合と定義する．さらに，$\tilde{D}$ を $D - A(T_p)$ に対して以下の手続きを適用したものとする．

1. まず，$t(a)$ が $i \in \tilde{I}(h(a))$ を満たすどの U_i にも含まれていない $D - A(T_p)$ の辺を取り除く．
2. そして，もし始点が $\tilde{R}$ に含まれない平行辺が存在するなら取り除く．

つまり，$\tilde{D}$ は $D - A(T_p)$ を $\tilde{I}$ に対して条件 C1 と C2 が成り立つように変形したものである．証明は省略するが，この $\tilde{D}$ が $\tilde{I}$ に対して条件 D1 と D2 を満たすことを示すことができる．すると，帰納法の仮定より、$V(T_i) = U_i$ を満たす独立 r_i-有向木族 T_i $(i \in I - p)$ が存在する．T_i $(i \in I)$ が独立であることを示すためには，各 $i \in I - p$ と $v \in V(T_p) \cap V(T_i)$ に対して $r_p T_p v$ と $r_i T_i v$ が開放的点素であることを示せばよい．π_i を (T_p, X_i)-実行可能順序としたとき，もし $r_p T_p v$ と $r_i T_i v$ が開放的点素ではないとすると，$X_i - v$ の点で交差する．しかし，$V(r_p T_p v)$ に属する X_i の点は凸集合の定義より，v を終点とする $r_p T_p v$ の部分道となって．よって，π_i は部分グラフ $(X_i, A(T_p[X_i]))$ における X_i のトポロジカル順序であるので，$V(r_p T_p v)$ に属する各 $w \in X_i - v$ に対して $\pi_i(v) < \pi_i(w)$ が成り立つ．同様にして，$V(r_p T_p v)$ に属する各 $w \in X_i - v$ に対して $\pi_i(v) > \pi_i(w)$ が成り立つことがわかる．以上より，$r_p T_p v$ と $r_i T_i v$ は開放的点素であることが示される． □

4.2 計算時間

定理 4 より，以下の定理が導かれる．以下の定理においては，各 $i \in I$ に対して $|U_i| \geq 2$ が成り立つことと，D が弱連結であること仮定する．

定理 13. 非巡回的有向グラフ $D = (V, A)$，有限添字集合 I，根集合 $r_i \in V$ $(i \in I)$，$r_i \in U_i$ を満たす凸集合族 $U_i \subseteq V$ $(i \in I)$ が与えられているとする．また，各 $v \in V$ に対して $|I(v)| \leq 2$ が成り立つとする．このとき，$O(|I||A|)$ 時間で，$V(T_i) = U_i$ を満たす独立 r_i-有向木族 T_i $(i \in I)$ が存在するかを判定し，もし存在するならば見つけることができる．

5 結論

本論文では，Whitty [6] や Huck [4] によって与えられた独立有向木族に対するいくつかの結果が，藤重 [2] による辺素な有向木族の特徴付けの拡張と同様に拡張できることを示した．しかしながら幾つかの場合に関しては，拡張の可能性が未解決であるため，それらを解決することが次の課題である．

謝辞. 本論文の一部は，日本学術振興会科学研究費補助金，日本学術振興会科学研究費補助金特別研究員奨励費の研究助成によるものである．

参考文献

[1] J. Edmonds. Edge-disjoint branchings. In R. Rustin, editor, *Combinatorial Algorithms*, pages 91–96. Academic Press, 1973.

[2] S. Fujishige. A note on disjoint arborescences. *Combinatorica.* to appear.

[3] A. Huck. Disproof of a conjecture about independent branchings in k-connected directed graphs. *J. Graph Theory*, 20:235–239, 1995.

[4] A. Huck. Independent branchings in acyclic digraphs. *Discrete Mathematics*, 199:245–249, 1999.

[5] N. Kamiyama, N. Katoh, and A. Takizawa. Arc-disjoint in-trees in directed graphs. *Combinatorica.* to appear. Preliminary version has appeared in *Proceedings of the nineteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA2008)*, pages 518–526, 2008.

[6] R. W. Whitty. Vertex-disjoint paths and edge-disjoint branchings in directed graphs. *J. Graph Theory*, 11:349–358, 1987.