解説 部分空間法の今昔（いまむかし） 上

# 歴史と技術的俯瞰：誕生から競合学習との出会いまで


黒沢由明

東芝ソリューション（株）
府中エンジニアリングセンター 要素技術開発部


## 部分空間法の誕生

世の中にコンピュータがほとんどないころ，大学のセンターや大きな研究所にあるとしても最高性能の大型機で，クロックが今のパソコンの数千分の一，1MHz にもいかないようなそんな機械をたくさんの研究者が奪い合うようにして使っていたころ，部分空間法は誕生した．今のようにコンピュータを湯水のごとく使っている時代ではなく，電子計算が貴重な時代のことである．

計算機の黎明期から当時の研究者の関心は人の心を機械で作れるかというところにあって，最初から AI の研究，パターン認識の研究は熱心に行われていた．当時の AI における主要研究テーマであったパターン認識の革新的な手法として部分空間法は提案され，1960 年代後半の登場から現在まで 40 年近く，姿を替え，形を替え，趣を変えてさまざまに応用されてきている．

この方式の誕生にあたっては 2 人の日本人研究者がかかわっている．そのことをまず紹介する．

パターン認識には入力データから複数の数値データを特徴として抽出し，これを並べてベクトルとする流儀がある．**図 -1** はその例で，切り出された 1 つ 1 つの文字の原パターン，すなわち文字のイメージデータから特徴抽出を行った例である．原パターンを拡大縮小して大きさを揃え，さらにボカしながら画素数を減らすことによって特徴パターンを生成する．このケースでは数十の画素それぞれに濃度値が得られるので，1 つのパターンが画素の数と同じ次元のベクトルになる．特徴パターンは特徴ベクトルとも呼ばれる．この例での特徴抽出方式は濃度特徴とも呼ばれる典型的な特徴抽出法の 1 つである．

この特徴ベクトルを認識対象とするが，その前に，この特徴ベクトルを線形に変換してより次元の低いベクトルに変換し，冗長な要素を除外しようとする技術がある．

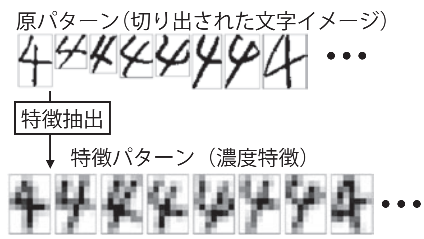


図 -1　文字の原パターンからの特徴抽出の例

特徴選択と言われる手法である．部分空間法ではその主要な要素として主成分分析が使われているが，この考え方は，まず 1963 年にこの特徴選択の手法として現れた．当時，電気試験所（ETL，後の電総研，現在の産総研）の飯島によって提案されたこの考え方[5]と同じ方式は，その後，ハワイ大の渡辺によっても 1965 年に SELFIC（Self-featuring Information Compression）として発表・提案された（文献出版は 1967 年）[1)～3)]．さらにこの考え方が拡張され，CLAFIC（Class Featuring Information Compression）として部分空間法が渡辺によって提案されることになる．

渡辺は物理学を専攻した研究者で，主に海外で活躍し，統計的な側面からパターン認識を研究して部分空間法の提案という大きな成果にたどり着いた．渡辺らの研究は理論だけにとどまらず，実際の文字パターン・データなどでの実証実験を行って有効性を確認したものである．研究室レベルの実験とは言え，当時の計算機環境を考えると相当な実証実験を行って生まれてきた研究成果なのである．

CLAFIC はパターン分布に関する統計的な考察を通して行われたもので，SELFIC とともに主成分分析に基づいている．どちらかと言えば，部分空間を使うというよ

りも，むしろ主成分分析に重きが置かれた提案である．アプローチが異なるものの，主成分分析に重きが置かれていることは次に述べる飯島の提案でもこのことは同様である．

飯島もCLAFICとは独立に同様な考え方を発展させていた[6]．国の大型プロジェクトの一環としてETLと東芝で共同開発していた高性能OCR開発の中心メンバの飯島は，その中核のパターン認識技術としてCLAFICとほぼ同じ概念の複合類似度法の開発を継続していた．この装置は1970年に完成して発表され，引き続き1971年に改良版がASPET/71（Analog Spatial Processor developed by Electro-technical laboratory and Toshiba）として開発された(**図-2**)．この装置はアナログ乗算器を並列に多数用いた大規模なもので，人間の脳神経回路網の1モデルとして開発された．当時，アナログ計算についてはその信頼性が疑問視されていたが，多数並列のアナログ回路を用いることの相互補償の効果によってこの問題が解決され，最終的に英数字活字認識を2,000字／秒という高速処理と高い認識精度で実現することができた．当時としては，これは冒険的な試みであったが複合類似度法の理論的な裏付けを基礎に成功を収めた．この秒2,000字というスペックをディジタル計算機で実現できるようになってきたのはこの4，5年のことであり，その処理速度の凄さも当時としては驚異的であった．

なお，複合類似度法の特徴抽出では図-1で示したボカシを用いた濃度特徴が使われているが，これが開発された当時はボカシの重要性について，一般には気づかれていなかった．当時は，文字はできるだけ鮮明に観測したほうが良いとする考え方が主流で，ボカシは認識性能に悪影響があると考えられていた．これに対して，部分空間法誕生をさらにさかのぼる1959年に飯島によってボカシの基礎理論が発表された[4]．これは画像の観測理論を基礎とする理論体系で，画像処理分野で最近，重要な概念とされるようになってきたスケール・スペース[7]という考え方を含むものである．最近では特徴をボカす方式がパターン認識に多く使われるようになってきており，今ではその重要性がよく知られるところとなっている．

このように，1970年前後にハワイ大と日本で，2人の日本人研究者によって部分空間法の研究開発がなされていたのである．

## 部分空間法とは

部分空間法について説明する前にパターン認識について簡単に説明する．パターン認識では最初に入力データから特徴データを，普通は複数の数値データとして抽出する．これを特徴抽出と言い，次にこの特徴データに基づいて，これを認識対象のカテゴリ，数字の例で言えば「0」から「9」のカテゴリに分類する．この分類を行うための手段は「照合」，「マッチング」，あるいは単に「認識」など，さまざまに呼ばれ，この部分がパターン認識の中核となる．

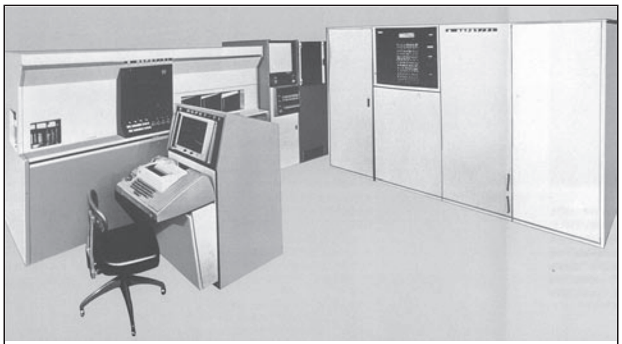

図-2　ASPET/71：1971年にETLと東芝によって開発された高性能OCR

この照合では，カテゴリごとに辞書と呼ばれるデータが準備され，これと特徴データが照合されて，最も良く照合できたものが答えとして出力される．このとき使われる辞書データは，あらかじめ答えの分かっているパターン，学習パターンと呼ばれるものから各カテゴリごとに作成される．

部分空間法では辞書は学習パターンに基づいて自動的に作成される．具体的には特徴データをベクトルと見立てたときにできる空間，すなわち，このベクトルの要素がn個であるとすればn次元空間の中に，その辞書は部分空間として設定される．この部分空間は，ある1つのカテゴリに対して1つ設定され，そのカテゴリの特徴ベクトルが数多く存在している部分を部分空間として設定する．入力パターンを認識するときには，その特徴ベクトルがどの部分空間により近いかで認識を行う．

部分空間法の定義を次に述べる．ここでは，パターン空間の次元，すなわち特徴ベクトルの要素の数を$N$として，その特徴ベクトルを$x$で表す．辞書として設定される部分空間を，その部分空間を張る正規直交ベクトルの組で表し，その正規直交ベクトルを$\varphi_i$と書く．部分空間の次元が$r$の時，$\varphi_i$の個数は$r$個である．この$\varphi_i$の組は各カテゴリごとに設定されるので，そのカテゴリの名前を$\alpha$とすれば，$\varphi_{\alpha i}$と書くべきだが煩雑になるので以下では$\alpha$は省略されている．入力パターンと辞書との近さの度合いは$x$の部分空間$\{\varphi_i \mid i=0,\ \dots, r-1\}$への射影の長さで定義される．この近さのことを類似度と呼び，$S$と書くことにする．これらの記号によって部分空間法の類似度は以下のように定義される．

$$S=\sum_{i=0}^{r-1}(x,\varphi_i)^2. \tag{1}$$

辞書ベクトル$\varphi_i$の様子を具体的に**図-3**に示す．図-3

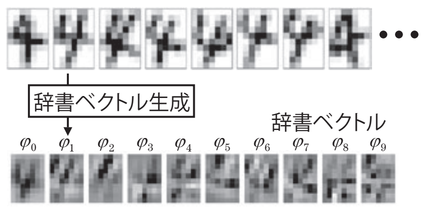


図 -3　辞書ベクトル生成の例

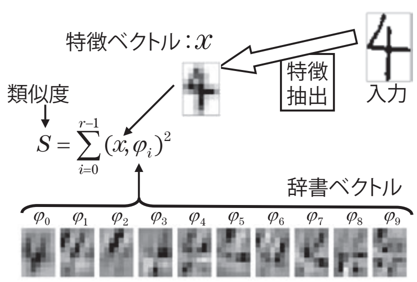


図 -4　類似度計算の例

の上段のパターンが辞書を作成するために使われる特徴ベクトルである．辞書の生成を学習とも呼ぶので，これらは学習パターンとも呼ばれる．あるカテゴリの学習パターンをすべて使って辞書ベクトルが作られる．この図の下段のパターンがそれで$\varphi_0$から$\varphi_9$まで10個の例を示している．この例は実際に数字「4」について主成分分析で求めた辞書パターンで，$\varphi_0$が平均パターンのような形になっているのが認められる．この図の辞書パターンでは白い部分はマイナス，黒い部分はプラス，灰色が0に対応している．そのつもりで見ると$\varphi_1$以降の辞書ベクトルについてはパターンの一部分を文字線に垂直な方向に微分したようなパターンになっていることが分かる．なお，ここでの微分とは簡単に言えば隣り合う画素の差分のことで，この差分値をあらたに画素値としたものが微分パターンである．

**図 -4** は実際の部分空間法の計算を視覚的に表したものである．入力パターンは特徴抽出されて特徴ベクトル$x$となり，これと辞書ベクトルとの内積$(x, \varphi_i)$が計算される．これが各辞書ベクトルごとに計算され，最終的に自乗和が類似度として計算される．

なお，式 (1) で$r=1$としたものは単純類似度と呼ばれる．

この式で辞書ベクトルはカテゴリごとに定義され，$S$もカテゴリごとに計算される．各カテゴリごとに計算された類似度について，最大類似度をとるカテゴリを認識結果とする．ここで$r$は$\{\varphi_i | i=0, \ldots, r-1\}$の張る部分空間の次元で，$N$と同様，次元と呼ばれるが，$N$と混同しやすいので注意が必要である．次元$N$はパターン空間全体の次元，$r$は部分空間の次元である．

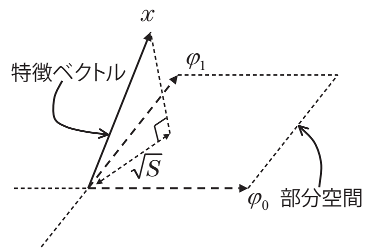


図 -5　類似度計算をパターン空間で見た例

ベクトル$\varphi_i$, $x$が正規化されていないときは，

$$S=\sum_{i=0}^{r-1}(x,\varphi_i)^2/\|x\|^2\|\varphi_i\|^2, \tag{2}$$

と書き，こちらの方が一般的である．なお，式の計算やコーディング時に，式(1)と式(2)を混同すると間違いが起きやすいので注意が必要である．

この方式はカテゴリを代表する辞書として辞書ベクトルが張る部分空間を設定し，入力パターンのこの部分空間への正射影の長さをもって類似度とする方式である．射影$P$を

$$P=\sum_{i=0}^{r-1}\varphi_i\varphi_i^T, \tag{3}$$

で定義すれば，内積を$(a, b)=a^Tb$と書くことにより，

$$S=x^TPx \tag{4}$$

とも記述できる．この方が，特徴ベクトルを部分空間に射影してその長さを測るという部分空間法の意味を理解しやすい．

**図 -5** は類似度計算をパターン空間で見た例を示している．この図で，$\varphi_0$，$\varphi_1$，は2つの正規直交な辞書ベクトルで，これらが張る空間が辞書としての部分空間である．こうすると式 (1) の意味は，入力された特徴ベクトル$x$のこの部分空間への射影の長さの自乗を類似度$S$としていることになる．なお，類似度として$\sqrt{S}$を用いることもある．

部分空間法の意味は，線形空間内のパターン分布の広がりを部分空間として捉え，この部分空間でパターンを代表させる考え方である．たとえば，単純類似度（部分空間法の1次元版）の考え方は，パターンの広がりとしては1次元の空間を考慮したものである．

パターンを線形空間の点であると考える限り，パターンがなすクラスタをどう区分けするかということが認識の問題として考えるべき課題となる．たとえば，ニューラルネットによる認識系でも，その認識系は結局，線形

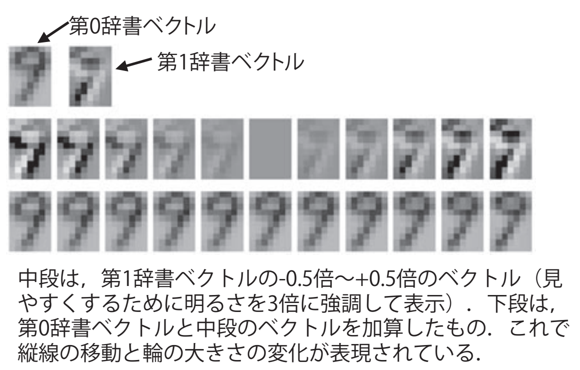


図-6　部分空間法でカバーされる文字変形の例

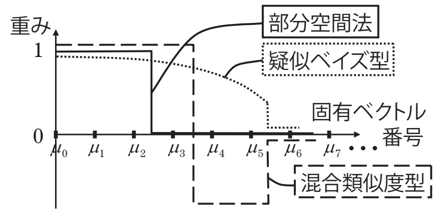


図-7　重み付き部分空間法での重みの例

空間の中を区切る超曲面を構成しており，ここでも，線形空間の中のベクトルの塊をどう分類していくか，区分けしていくかということが認識の基本になっている．このパターンの塊を表すものはより厳密には多様体なのであろうけれども，そこに至る前に部分空間として分析していく考え方は自然である．

**図-6** は部分空間で実際にカバーされる変形を具体例で見たものである．上段の左が第0辞書ベクトル，右が第1辞書ベクトルである．この2つのベクトルが張る2次元の部分空間が何を表しているかを見たのが下段のベクトルである．中段が第1辞書ベクトルを係数倍したもので，最も左のものが-0.5倍，右に0.1ずつ増やして，最も右が+0.5倍である（表示を見やすくするためにここだけ明るさを3倍に強調している）．このベクトルと第0辞書ベクトルを加算したもが下段のベクトルである．すなわち，これらのベクトルは2つの辞書ベクトルが張る2次元部分空間の中のベクトルであり，この部分空間が表現している文字変形を表している．この例を見ると，左のベクトルから右に向かって，数字「9」の縦棒の若干のずれ（左に0.5画素程度動いている）と，輪の部分の縮小変形が現れている．このことは第1辞書ベクトルのパターンにおいて，棒の部分と輪の部分が部分的な微分パターンになっていることに対応している．また，この図から，「9」の変形では縦棒の左ずれと輪の縮小が同期していることも分かる．このように部分空間法の世界では，パターンの変形は本体部分と部分的な微分パターンとの線形演算によって表現されるのである．

この空間を決める手法としては主成分分析が代表的な手法である．これは学習パターン集合に対して，その平均的な射影成分が最大となる部分空間を得るもので，部分空間法が考案された当初から導入されていた．

## 重み付き部分空間法

部分空間法の重要な拡張の方法の1つとして重み付き部分空間法がある．ここでは，それについて説明する．

重み付き部分空間法の定義は$\mu_i$を重みとして，

$$S=\sum_{i=0}^{r-1}\mu_i(x,\varphi_i)^2 \tag{5}$$

で定義する．この重みの与え方で認識系の性質が変わる．**図-7** に重みの例を示す．この図の横軸「固有ベクトル番号」は主成分分析で求めた固有ベクトルの番号であり，この番号は対応する固有値の大きいものから順に0オリジンの整数で付けられている．この図は例であるが，この例の部分空間法では，$\mu_2$までが重み1で，その次から後は0となる．一方，疑似ベイズ型と表記してある例では，重み1を起点として，$\mu_5$まで重みがダラダラと下がり，その次から後が0となる．

疑似ベイズ型のように固有値番号が上がるに従って，重みが下がるというのは，固有値の小さい固有ベクトルの成分については，類似度に対する寄与度を下げるという考え方である．

また，この図で混合類似度型としているものについては，これは認識誤りしやすいカテゴリのパターンを代表する部分空間を，正解のカテゴリを代表する部分空間に直交するように作成して，その空間の正規直交基底も辞書ベクトルに加え，その空間への射影の長さを類似度から引くように設定したものである．この図では$\mu_3$までが1で，その次から$\mu_5$までマイナス，その次から後が0になるように設定されている．

なお，この混合類似度型の場合にはベクトルの番号の振り方は，必ずしも固有値の大きい順ではない．

また，この図の説明で用いた番号は便宜的に付けたもので，実際に使われているものではない．

重みを付けることで部分空間法は一層その能力を増すことができるが，一方で，どう重みを付けるかということが重要な課題となる．この重みの付け方で認識精度はかなり影響を受ける．なお，前述した複合類似度法は重み付き部分空間法の1つである．

## 部分空間法と投影距離法

部分空間法によく似た手法に投影距離法[8]がある．投影距離法については，ここではその説明を略するが，理論的にも実際的にも部分空間法と非常によく似た方式である．注意したいのは，この投影距離法を含め，広い意味で全体を部分空間法と呼ぶこともあるということである．もちろん狭い意味，すなわちCLAFICの意味で部分空間法の言葉を用いる場合も多い．言葉の定義が場合によって違うことがあるので注意したい．

投影距離法と狭義の部分空間法は似ているものの，方式を理解する上では，両方をはっきり区別しないと混乱する．投影距離法では平均ベクトルの終点を中心にパターン分布を考えるのに対して，狭義の部分空間法では座標系の原点が起点となっていて，平均ベクトルの終点は用いられていない．この2つは，ものの考え方が大きく異なるので，それらを混同すると，これらの方式を正しく理解できなくなる．以下，その点もふまえて説明していく．

なお，パターン認識の多くの問題では，特徴ベクトルの平均が0になるように前処理されることも多く，その場合には狭義の部分空間法と投影距離法は同じものとなる．

本稿では主に狭義の部分空間法（CLAFIC）について説明している．

## 一般の主成分分析（投影距離法における辞書作成法）

狭義の部分空間法はもちろん，広義の部分空間法でも辞書ベクトルの求め方が問題となるが，一般に部分空間法という言葉は主成分分析を用いて固有ベクトルを求め，これをもって辞書ベクトルとする手法のことを意味する場合が多い．

通常の主成分分析（Principal Component Analysis : PCA）とは平均ベクトルを中心にして分布の主成分を探す方式であり，投影距離法における辞書作成法なのだが，平均ベクトルを用いない狭義の部分空間法の辞書作成法とは若干異なる．

ここでは，狭義の部分空間法における辞書作成法を理解するために，まず通常の主成分分析について見ていく．以下，その考え方である．

学習対象ベクトルの1つ1つに名前を付けて，それを$\alpha$と書くこととし，学習ベクトルを$x_\alpha$と記述する．その平均ベクトルを$m$とする．このとき，$x_\alpha-m$のベクトル集合の方向を最もよく表す単位ベクトルを$\varphi$とする．ここで言う「ベクトル集合の方向を最もよく表す」という

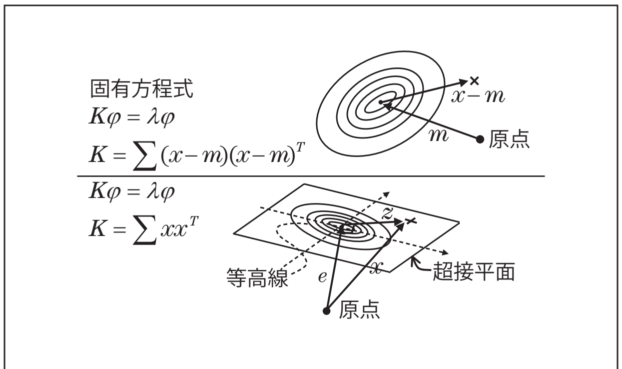


図-8　一般の主成分分析（上）と部分空間法の主成分分析（下）

ことを，数学的には「$x_\alpha-m$と$\varphi$の内積の自乗和が最大になること」と考えることにする．$\|\varphi\|=1$の条件が付くので，この条件を含めるために未定乗数$\lambda$を使って，以下のように評価式を設定する．この評価式の$J$を最大にする$\varphi$を求めるのが主成分分析である．

$$J=\sum_\alpha(x_\alpha-m,\varphi)^2-\lambda(\|\varphi\|^2-1). \tag{6}$$

この解は，

$$K=\sum_\alpha(x_\alpha-m)(x_\alpha-m)^T, \tag{7}$$

と置いて，

$$K\varphi=\lambda\varphi, \tag{8}$$

の固有値問題を解いて得られる固有ベクトルとなる．すなわち$\varphi$は共分散行列$K$の固有ベクトルとなる．固有ベクトルは次元数分，存在するので，それを$\varphi_i$と記述する．なお，この$\varphi_i$はそれぞれ直交する．**図-8**の上段にその様子を図示した．ここでは多次元空間内に超楕円体の分布を仮定しており，その中心へのベクトル$m$を起点に$x-m$の分布がガウス分布になっている．3次元で言えばラグビーボールのような分布である．

## 狭義の部分空間法における辞書作成法

狭義の部分空間法における辞書作成法は一般の主成分分析とは異なり，以下のようなものである．なおこの手法も主成分分析と呼ばれることが多い．

$P$を部分空間への射影とし，正規直交ベクトル$\varphi_i$を用いて$P$を，

$$P=\sum_{i=0}^{r-1}\varphi_i\varphi_i{}^T, \tag{9}$$

と表したとき，

$$J=\sum_\alpha x_\alpha{}^T P x_\alpha=\sum_\alpha\sum_{i=0}^{r-1}(x_\alpha,\varphi_i)^2, \tag{10}$$

を最大化する$P$を求めることである．未定乗数項を導入した次の式が評価式である．

$$J = \sum_{\alpha} \sum_{i=0}^{r-1} \{(x_\alpha, \varphi_i)^2 - \lambda_i (\| \varphi_i \|^2 - 1)\}. \tag{11}$$

これの解は，

$$K = \sum_{\alpha} x_\alpha x_\alpha{}^T, \tag{12}$$

を用いた固有方程式で，式 (8) と同じである．似ているけれども同じではない．式 (7) に慣れている人のために式(12)の意味を以下に考察する．

狭義の部分空間法では入力パターンはノルムが 1 に固定されているのと等価であるから，パターンは超球面上に分布していると考えてよい．ここでは簡単のためにこれを近似的に，超球面ではなく単位ベクトル $e$ に直交し，球面に接する超接平面上に分布しているとして議論を進める．図 -8 下段にその様子を示す．

原点から超接平面に対して垂直な単位ベクトルを $e$ として，$e$ の終点を中心としてパターンがガウス分布で分布しているとする．これは傘のような形で，$e$ が柄，分布が傘の部分である．本来は傘の部分は球面だが，ここではそれを近似的にフラットにしているのである．

このような形で分布している場合，$e$ の終点を原点とする超接平面内だけで考えれば，分布は通常のガウス分布となるので，その範囲内で一般の主成分分析を適用できる．この場合，平均ベクトルは 0，すなわち $m = 0$ であり，また学習ベクトルは $z_\alpha$ なので，式 (7) の $(x_\alpha - m)$ に $(z_\alpha - 0)$ を代入して，次の式が得られる．

$$K = \sum_{\alpha} z_\alpha z_\alpha{}^T. \tag{13}$$

これは式(12)の $x$ を $z$ に置き換えた形である．一般の主成分分析の立場に立てば，「本来，式 (13) でやるべきところを式 (12) を使ってよいのであろうか？」という疑問を持つ人もいるかもしれない．両者が同じことは，ほとんど明らかなこととして疑問に思わない人もいるかもしれない．結論は，両者同じなので特に問題はないのだが，この 2 つのケースを時々混同してしまうことがある．場合によっては，その混同が問題を引き起こすことがあるので注意が必要である．

簡単な計算から，式(13)の固有ベクトルと平均ベクトル $e$ は式(12)の固有ベクトルとなることが分かる．また対応する固有値も等しいので，実質的に式(13)と式(12)は同じと考えてよいのである．

式 (7) は共分散行列，式 (12) は相関行列，能率行列，モーメント行列と呼ばれるものであるが，混同して共分散行列と呼ぶことも多い．

## 競合学習で部分空間を求める

ここでは，まず代表的な競合学習の LVQ（Learning Vector Quantization）からスタートして，最後に部分空間の学習法について述べることとする．kohonen によって提案された LVQ は以下のような学習の枠組みである．

入力パターンを $x$，辞書ベクトルを $m$，相違度 $D$ を，

$$D = \| x - m \|^2, \tag{14}$$

として，次の式で $m$ を更新していく．

$$m = m \pm \alpha(x - m), \ (+ : correct, - : error). \tag{15}$$

なお，この式での ± は，認識結果が $correct$ か $error$ かで符号を変えることを意味している．

LVQ はパターン認識分野で使われる競合学習のベーシックな手法の 1 つであり，しばしばニューラルネットの仲間とされて，そう呼ばれることが多い．なお，競合学習とは徐々に辞書パラメータを変えていく学習手法のことで，正解パターンとエラーパターンの両方を用いて学習を行う手法のことである．

一方，確率降下法はさまざまな認識系に適用できる有力手段の 1 つで，これもやはり競合学習に属する考え方である．実は LVQ の手法はユークリッド距離による識別系に確率降下法を適用したものなのである．そこで，次に確率降下法を単純類似度に適用してみる．

$$S = (x, \varphi)^2 / \| x \|^2 \| \varphi \|^2, \tag{16}$$

で，類似度を定義すると，$\varphi$ の更新式は以下のようになる．

$$\varphi = \varphi \pm \alpha(x, \varphi)\{x - (x, \varphi)\varphi\}. \tag{17}$$

この式は複雑なので，正規化の項を無視した形で確率降下法を適用すると，更新式はもっと単純化される．

$$S = (x, \ \varphi)^2 \tag{18}$$

を類似度とし，更新式は以下のようになる．

$$\varphi = \varphi \pm \alpha(x, \ \varphi)x. \tag{19}$$

ここでは，$x, \varphi$ は正規化されていることが前提となっているので，実は，その条件を入れずに確率降下法を適用した式(19)は誤りである．したがって，この場合，更新式に何らかの形で正規化の条件を入れなければならない．一番，単純な方法は更新するたびに $\varphi$ を正規化する手段である．式(17)の代わりに，そういう手段をとることが可能である．そもそも，式(17)といえども，計算誤差が累積する可能性が高いので，更新後の正規化は必要となる．

次に，この話を部分空間法に拡張する．式 (1) で類似度を定義すると，$\varphi_i$ の更新式は式(19)と同じになる．しかし，このとき $\varphi_i$ の正規直交性は保証されていない

ので，正規直交性の条件を含めて式（1）に確率降下法を適用しないといけない．しかしながら，この計算はかなり複雑になるので，単純類似度のケースで説明したのと同じように各更新ごとに $\varphi_i$ の正規直交化を行う方法がある．その方法としてシュミットの直交化を使ったものは kohonen によって提案された LSM（Learning Subspace Method）と同じである．

このLSMに似た方式にOjaによって提案されたALSM（Averaged LSM）がある．これは，式（12）の相関行列 $K$ に対して，

$$K = K \pm \alpha x x^T, \tag{20}$$

で更新を行う方式である．これは，1980年に東芝の前田（賢一）が特許として提案した方式（学習型複合類似度法）と同じものである．

このように，部分空間法は競合学習の世界でも活躍をしている．競合学習はニューラルネットの世界の典型的な手法であり，その意味ではまったくポリシーの異なる世界の2つの流れが合流し，このような手法が生まれてきたともいえる．

## 部分空間法の今後

ここまで部分空間法の応用として重み付き部分空間法，競合学習への適用について述べたが，このほかにもベイズ識別との関係の考察，顔画像への応用，混合類似度法，固有空間法[9]，相互部分空間法[10]，カーネル非線形部分空間法[11]など数多くの話題がある．部分空間法のオリジナルの考え方そのものは40年近くの時を経た現在では，さすがにその認識能力が高いとは言えない．しかしながら，部分空間法の考え方をベースにしたさまざまな新しいアイディアはいろいろな分野で活躍している．ユークリッド距離や内積，ベクトルの成す角度，ガウス分布などはパターン認識分野における重要な基礎概念であると考えるけれども，部分空間もまた重要な基礎概念の1つである．ユークリッド距離や内積に比べると複雑な分だけ部分空間は，研究対象としての課題が数多くあるのであろう．今後のさらなる発展を期待したい．なお，詳しい文献としては文献12）がある．

**謝辞**　特に歴史的経緯についてご教示いただいた飯島東工大名誉教授に感謝します．

**参考文献**

1) Watanabe, S. : Karhunen-Loeve Expansion and Factor Analysis, Trans. 4th Prague Conf. on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague pp.635-660 (1967).
2) 渡辺　慧：認識とパタン，岩波書店 (1978).
3) 渡辺　慧：知識と推測－科学的認識論，東京図書 (1987).
4) 飯島泰蔵：パターン観測に関する基礎理論，信学研究会，オートマトンと自働制御研究専門委員会資料，1959年12月10日.
5) 飯島泰蔵：視覚パターンの特徴抽出に関する基礎理論，信学会雑誌，Vol.46, No.11, pp.1714-1721 (1963).
6) 飯島泰蔵：視覚情報の基礎理論，コロナ社 (1999).
7) Witkin, A. P. : Scale-space Filtering, IJCAI83, pp.1019-1022 (1983).
8) 池田正幸，田中英彦，元岡　達：手書き文字認識における投影距離法，情報処理学会論文誌，Vol.24, No.1, pp.106-112 (Jan. 1983).
9) Murase, H. and Nayar, S. K. : Visual Learning and Recognition of 3-D Objects from Appearance, International Journal of Computer Vision, Vol.14, pp.5-24 (1995).
10) 前田賢一，渡辺貞一：局所構造を導入したパターン・マッチング法，信学論，D, Vol.J68-D, No.3, pp.345-352 (1985).
11) 前田英作，村瀬　洋：カーネル非線形部分空間法によるパターン認識，信学論，D-II, Vol.J82-D-II, No.4, pp.600-612 (1999).
12) 石井健一郎，前田英作，上田修功，村瀬　洋：わかりやすいパターン認識，オーム社 (1998).

（平成20年3月28日受付）

黒沢由明 | kurosawa.yoshiaki@toshiba-sol.co.jp
東芝ソリューション（株）主幹．1978年東工大修士卒業，東芝総合研究所に入所以来，文字認識研究・開発に従事．OCR部門の異動により，現所属にて研究開発を継続．電子情報通信学会会員．