2 故障と攻撃の両方に強いつながり方とは？
－ネットワークの機能不全と構造最適化－

谷澤俊弘
（高知工業高等専門学校）

2003 年 8 月 14 日，アメリカ北東部で大規模な停電が発生し，ニューヨーク，クリーブランド，デトロイト，トロント，オタワなどの大都市を含む広範囲の約 5,000 万人が影響を受けた．この停電による損失金額は 60 億ドル（約 7,000 億円）と言われている．アメリカ北東部という現代文明の最先端地域の電力供給網がこのような脆弱性を持っていることに驚かれた読者もおられるかもしれない．この脆弱性は，この地域の電力供給網がスケール・フリー・ネットワーク構造を持つことに起因している．スケール・フリー・ネットワークはその構成要素についての個々の不慮の故障に対しては非常に頑強であり，その連結性を保持できる一方，ネットワーク内の重点個所に集中した攻撃にはきわめて弱く，わずか数 % の重要個所を取り除いただけで，全体がバラバラになってしまうのである．実は，インターネットもスケール・フリー・ネットワークであり，同様の脆弱性を持っている．では，構成要素個々の故障と重点個所への集中攻撃の両方に対して強いネットワークを作り上げることはできるのだろうか．本稿では，統計物理学の手法を用いた理論解析から明らかになった，故障と攻撃の両方に強いネットワーク設計の指針について概説する．

ネットワークの構造最適化とは？

2003 年 8 月 14 日の蒸し暑い昼過ぎに起こった，アメリカ北東部大停電は，主にオハイオ州の発電所の事故によって起きた電力供給停止がネットワーク全体に波及し，電力供給網全体がダウンしたことによるものであった．この事件は，ほんの数個所の機能不全がシステム全体をダウンさせてしまうことがあり得ることを如実に示している．電力供給網のような，我々の生活の基盤を支えるインフラストラクチャは簡単にダウンすることは許されない．ネットワークをうまく作ることによって，できるだけこのような全体的なシステムダウンが起こらないようにできないであろうか．以下では，この問題に対する最新の研究結果を紹介する．

本稿で考えていく「ネットワーク」とは，点（ノード）と線（リンク）に抽象化されるシステムすべてである．コンピュータ・ネットワークの場合には，ノードは各コンピュータであり，リンクはそれらのコンピュータを接続する有線ケーブルあるいは無線通信による接続である．人間関係のネットワークであれば，ノードは各個人であり，リンクはその個人間の友人関係，協力関係などである．その他の場合においても，適宜，システム内の個々の要素をノード，その要素間の何らかの関係をリンクと考えていただければよい．

いずれの場合においてもネットワークは各ノードが連結され共同して動作することによってシステム全体としての機能を発揮する．したがって，ネットワークにおいては構成要素であるノードの相互連結が保たれていることが何よりも重要である．しかし，現実のネットワークは日々変化する環境の中に置かれており，初めはすべてのノードが連結されていたとしても，環境変化の中でその連結性が危機に晒されることも少なくない．たとえば，コンピュータ・ネットワークにおいては，接続されているコンピュータが突然故障して通信を受け付けなくなることもあるだろうし，また，機種交換などにより，ネットワークから突然切り離されてしまうこともあるだろう．特に，インターネットに代表される大規模なネットワークでは，そのようなノードの故障あるいは切り離しは相互に無関係に行われるのが普通であり，その度ごとにネットワーク全体の連結性が危機に晒されるのでは，そのネットワークは実際上使い物にならない．

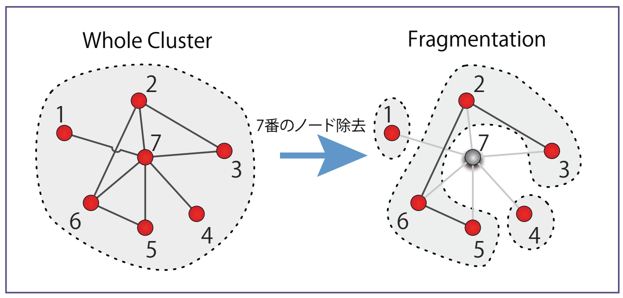

図 -1　攻撃によってネットワークが分断される様子

また，コンピュータ・ウィルスやクラッキングなどによるインターネット上の重要サイトへの攻撃が近年急増していることからも分かる通り，重要なネットワークに対しては，その機能を停止させようとして外部から意図的な攻撃が行われることもある（図 -1 参照）．この場合，ターゲットとなるのはネットワーク内において多くのリ

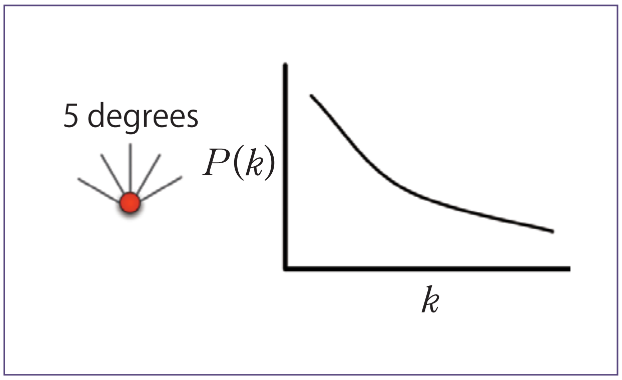

図 -2　ネットワークの次数分布

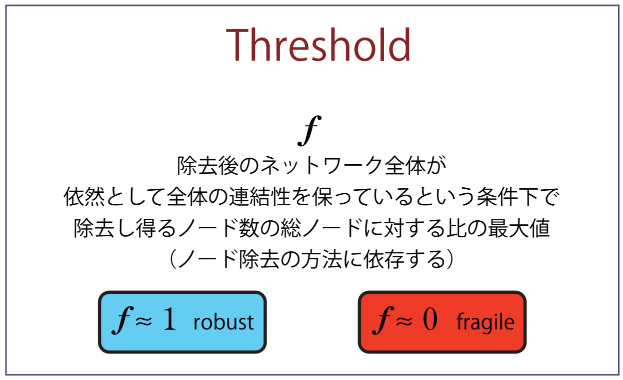

図 -3　ノード除去閾値

ンクを集めているノード（ハブと呼ばれる）であることが多い．いったん，外部からの攻撃によりハブが機能を停止すれば，ハブにつながる多くのノードが影響を受ける．ネットワークの構造次第ではその影響は次々に周りのノードへと指数関数的に広がり，ほんの少数のハブの機能停止により，ネットワーク全体を機能停止に追い込むことも可能になる．

それでは，たとえさまざまな要因でノードが機能を停止したり攻撃を受けてそのネットワークから除去されてしまったとしても，簡単にはネットワーク全体が止まってしまわないようにするためには，そもそも初めのネットワーク構造がどのようなものであればよいのだろうか．これが「ネットワークの構造最適化問題」である．次章から，この問題をより厳密に定式化し，統計物理学の手法を用いて考察していくことにしよう．

問題の定式化

《ネットワークの次数分布》

ネットワーク構造を特徴づける最も基本的な量は，各ノードの持つリンク数（次数，degree）分布である（図 -2 参照）．次数分布とは，各ノードの次数を k としたとき，次数 k を持つノード数 N_k の全ノード数 N に対する比 $N_k/N \equiv P(k)$ のことであり，昨今，非常に精力的な研究が行われているスケール・フリー・ネットワークは，この次数分布がべき乗関数となっているもの（$P(k) \propto k^{-\lambda}$）である．

もちろん，次数分布だけでは構造を完全に決定することはできないが，ここではネットワーク構造の持つ最も基本的な性質を抽出するために，統計物理学の考え方に基づいて，ネットワークは与えられた次数分布に従ってランダムに生成されるものとし，同じ次数分布 $P(k)$ から生成されるネットワーク集合の統計的な性質を考察していくこととする．現実のネットワークでは，各ノードが現在持っているリンク数の大小が新たなリンクを受け入れるかどうかに影響することが起こり得るのであるが，簡単のために，以降の考察ではこのようなノード間の次数相関については考えない．また，各ノードの平均次数 $\langle k \rangle = \Sigma_k kP(k)$ が大きいほど，どのようなノード除去方法についてもネットワークは頑強になることは明らかであるから，総ノード数 N に加えて，ノードの持つ次数の平均値 $\langle k \rangle$ もあらかじめ与えられているとする．

《ノード除去閾値》

総ノード数 N，次数分布 $P(k)$ のネットワークを考える．最初，このネットワークのすべてのノードは互いに連結しているとする．この状態から何らかの方法でいくつかのノードを除去していくと，これ以上のノードを除去すると残りのノードがバラバラになってしまうようなノード除去数の上限値が存在する．この限界ノード数の全ノード数に対する比 f をノード除去閾値（threshold）と呼ぶ（図 -3 参照）．ノード除去閾値を用いれば，ネットワークの構造最適化問題は，ノード除去の方法が与えられた場合に，そのノード除去方法に対して最も大きなノード除去閾値 f の値を持つ次数分布 $P(k)$ を探す問題に帰着する．

ノード除去閾値 f は $0 \leq f \leq 1$ の範囲にあり，また，ノード除去をどのような方法で行うかに依存する．もし，$f \approx 1$ であれば，ネットワークの連結を破壊するためにはほとんどすべてのノードを除去しなければならないわけであるから，その次数分布 $P(k)$ は大変に頑強であることになる．反対に，$f \approx 0$ であれば，きわめて少数のノードを取り除いただけでネットワークはバラバラになってしまうわけであるから，その次数分布 $P(k)$ は非常に脆弱であるということになる．

さらに考察を進めるためにはノード除去の方法を具体的に指定しなければならない．ここでは現実のネットワークの機能不全にとって最も重要と思われる次の 2 つのタイプに限定しよう．

《2種類のノード除去》

◆ random failure

ネットワークを構成する各ノードは故障したり，その他の事情によってネットワークから除去される場合がある．しかも，多くの場合，ノードの故障は互いに無関係に起こる．この場合を random failure と呼ぼう．これをモデル化するために，全ノード数のうち f_r の割合のノードがランダムに選ばれ，ネットワークから除去されるとする．初期の次数分布 $P(k)$ を与えたときに，ノード除去後のネットワークが依然として全体の連結性を保つという条件下で，除去し得るノードの割合の最大値がその次数分布 $P(k)$ の random failure に対するノード除去閾値である．

この場合には，サイクルの影響を無視した場合において厳密な理論的考察があって，$P(k)$ が与えられた場合，総ノード数 N が非常に大きいネットワークのノード除去閾値 f_r は

$$f_r = 1 - \frac{1}{\langle k^2\rangle/\langle k\rangle - 1} \tag{1}$$

で与えられることが分かっている．ここで $\langle ...\rangle$ はノードが除去される前の元々のネットワークの次数分布 $P(k)$ に関する期待値を表す．この結果から，平均次数 $\langle k\rangle$ を固定した場合，次数の 2 乗平均 $\langle k^2\rangle$ が大きくなる次数分布を持つネットワークの場合に f_r は 1 に近づき，安定となることが分かる．つまり，random failure に対してはネットワーク内にさまざまな次数を持つノードが混在する方がより頑強になる．この f_r の最大値 1 を $\overline{f}_r$ とおく．

◆ targeted attack

次に，ネットワークの機能停止を目的として外部から意図的な攻撃が行われる場合を考え，この場合を targeted attack と呼ぼう．この場合は，図 -4 に表されている通り，ネットワーク中で多数のリンクを持つノード（ハブ）から順に K から $\tilde{K}$ まで除去されていく．次数分布の上部の f_t の割合のノードが除去されるとしよう．このハブ・ノードの除去により，残りのノードの次数分布も変化することを考慮すれば，この場合のノード除去閾値 f_t は

$$f_t = \sum_{\tilde{K}}^{K} P(k) \tag{2}$$

$$p = \frac{\sum_{\tilde{K}}^{K} kP(k)}{\langle k\rangle} \tag{3}$$

$$1 - p = \frac{1}{\tilde{\kappa} - 1} \tag{4}$$

という連立方程式によって決まることが分かっている．ここで K はノード除去前の最大次数，$\tilde{K}$ はノード除去後の最大次数であり，$\tilde{\kappa} \equiv \langle k^2\rangle/\langle k\rangle$ における平均 $\langle ...\rangle$ はノード除去前の次数分布 $P(k)$ の $\tilde{K}$ までの部分に関する平均である．

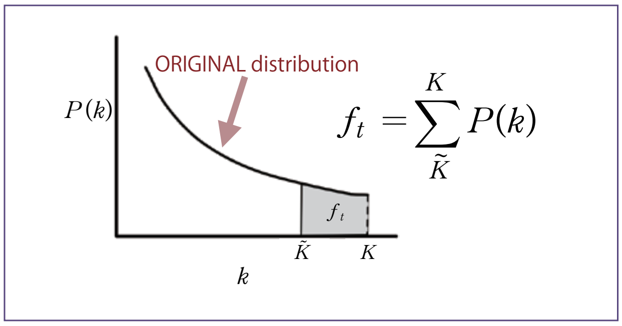

図 -4 targeted attack．次数分布の上部が f_t の割合で除去される．もちろん，このノード除去により残っているノードの次数分布も元々の次数分布から変化することも考慮しなければならない．

この表式からすぐに f_t の振る舞いを理解するのは易しくはないが，結局のところネットワーク内に多くのハブを持つような次数分布に対しては f_t は非常に小さくなってしまうことが分かる．したがって，targeted attack に対して頑強なネットワークはすべてのノードがまったく同じ次数を持つような完全に一様なネットワークであり，その点において，random failure に対して頑強なネットワーク構造とは正反対である．この場合には，そもそもターゲットが存在しないので，攻撃は全ノードからのランダムな除去と同じとなり，$f_t = 1 - 1/(\langle k\rangle - 1)$ が f_t の絶対的な上限値となる．この f_t の絶対的な上限値を $\overline{f}_t$ とおく．

《ネットワーク構造最適化問題の定式化》

以上により，ネットワーク構造最適化問題を定式化すると以下の通りになる．

> 総ノード数 N と各ノードの平均次数 $\langle k\rangle$ を与えた場合に，random failure に対するノード除去閾値 f_r と targeted attack に対するノード除去閾値 f_t の和 $f_T = f_r + f_t$ が絶対的な最大値
>
> $$\overline{f}_r + \overline{f}_t = 1 + \left(1 - \frac{1}{\langle k\rangle - 1}\right) = 2 - \frac{1}{\langle k\rangle - 1} \equiv \overline{f}_T$$
>
> にできるだけ近くなるような次数分布 $P(k)$ を決めよ．

ここで問題となるのは，f_r の上限値 $\overline{f}_r = 1$ はネットワーク内に多くのハブを持つような広がった次数分布を持つネットワーク構造に対して得られるものであり，f_t の上限値 $\overline{f}_t$ はすべてのノードが平均次数 $\langle k\rangle$ と同じリンクを持つような完全に一様なネットワーク[☆1]に対して得られるものである，という点である．つまり，この 2 つのまったく異なるネットワーク構造のある意味「い

[☆1] 数学的には regular graph として知られている．

いとこ取り」のネットワーク構造を見つけることができるのか，ということである．

その問題に対する答えを見る前に，一休みして，現実によく見られるネットワーク構造では f_r あるいは f_t がどのような値をとるのかを見てみることにしよう．

ERネットワークとスケール・フリー・ネットワーク

《ERネットワーク》

ER とはハンガリー出身で放浪の数学者として知られる Erdös とその共同研究者 Rényi の頭文字をとったもので，次数分布が Poisson 分布

$$P(k)=\frac{\langle k\rangle^k}{k!}e^{-\langle k\rangle} \tag{5}$$

となるものである．

この次数分布に従うネットワークは平均次数 $\langle k\rangle$ を持つノードが一番多く，それより極端に小さな次数や極端に大きな次数を持つノードはあまり存在しない．このような次数分布は，高速道路網などの空間的にある程度一様な構造を持つネットワークによく見られる．ER ネットワークにおいては $\langle k^2\rangle = \langle k\rangle + \langle k\rangle^2$ であるから，random failure に対するノード除去閾値は

$$f_r=1-\frac{1}{\langle k^2\rangle/\langle k\rangle-1}=1-\frac{1}{\langle k\rangle} \tag{6}$$

であり，また，すべてのノードが同じ程度の次数を持つことから targeted attack に対するノード除去閾値 f_t もこの f_r と同程度となる．したがって，ER ネットワークに対しては

$$f_T=f_r+f_t\approx 2f_r=2\left(1-\frac{1}{\langle k\rangle}\right)<\overline{f} \tag{7}$$

となる．頑強性から見た場合の ER ネットワークの弱点は，ハブを持たないため平均次数 $\langle k\rangle$ があまり大きくない場合には $f_r\approx 1$ とすることはできない，すなわち，random failure に対する頑強性を向上させる余地のないことである．

《スケール・フリー・ネットワーク》

1999 年，アメリカ合衆国インディアナ州のノートルダム大学（当時）の Albert-László Barabási の率いる研究グループは，インターネット上の World Wide Web（WWW）ページの相互リンク関係を調べ上げ，その次数分布が ER ネットワークとはまったく異なり $P(k)\propto k^{-\lambda}$ というべき乗関数で表されることを見つけた．Barabási はその他にも電力供給網（power grid），航空路線図，生物の神経回路網，映画俳優の共演関係，科学技術論文における共著関係などが作るネットワークも調べ，これら一見無関係に思えるさまざまなネットワークの分布関数

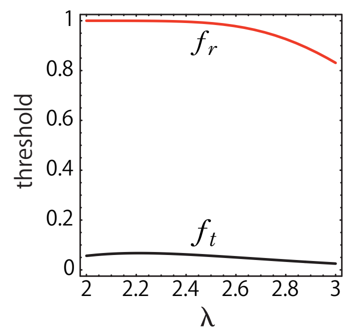

図-5　指数 λ を持つスケール・フリー・ネットワークのノード除去閾値．広い範囲で $f_r\approx 1$ である一方で f_t は 10%にも満たない．

も，やはりこのようなべき乗の次数分布を持つことを発見した．このべき乗の次数分布を持つネットワークはスケール・フリー・ネットワークと呼ばれている．さらに興味深いことに，現実に存在するさまざまなスケール・フリー・ネットワークのべき乗分布関数の指数 λ は多くの場合 2.5 程度の値を持つことも分かった．このスケール・フリー・ネットワークはリンク数の小さなノードも非常に多いが，ハブと呼ばれるリンク数の極端に大きなノードも同時に数多く含むことが特徴である．

スケール・フリー・ネットワークの持つ性質の中でも顕著なものは，random failure に対するほぼ完全ともいえる頑強性である．これは指数 2.5 程度のべき乗の次数分布関数を持つネットワークでは次数の 2 乗平均 $\langle k^2\rangle$ が $N\to\infty$ で発散することから，式 (1) より実質的に $f_r = 1$ となっていることに起因する．このため，地球最大規模のスケール・フリー・ネットワークであるインターネット上では膨大な数のノードが互いに無関係に故障したり置きかえられたりしているにもかかわらず，そのことによって残りのノード間の通信が阻害されることがない．

しかし，random failure に対しては無敵のスケール・フリー・ネットワークは，また一方で targeted attack に対しては極端に脆い．理論的な計算によると，指数 2.5 を持つスケール・フリー・ネットワークは全ノードの内の数 % のハブが除去されただけで，ネットワーク全体がバラバラになってしまうことが分かっている．random failure に対する頑強性を保証するハブの存在が targeted attack に対しては仇となってしまうのである（図 -5 参照）．

故障にも攻撃にも強いネットワーク構造

《ハブの役割》

ER ネットワークは各ノードが比較的均質であるために，targeted attack に対するノード除去閾値 f_t はその上限値である $1-1/(\langle k\rangle-1)$ をほぼ実現することができるが，random failure に対するノード除去閾値 f_r を

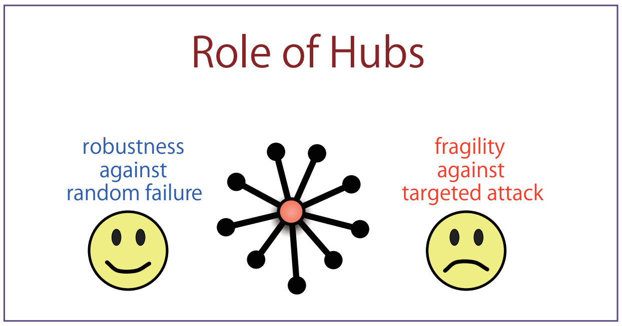

図-6　ハブの役割．random failure に対抗するためにはなくてはならないのだが，多すぎれば targeted attack に対して脆くなってしまう．

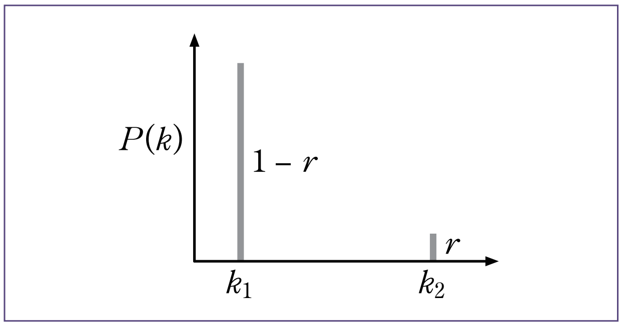

図-7　二極次数分布（bimodal distribution）

1 に近づけることはできない．また，スケール・フリー・ネットワークはハブが数多く存在するおかげで f_r はほぼその上限値 1 であるが，同時にハブの存在のせいで f_t が極端に小さい．これらの両方の特徴をうまく取り入れて，故障（random failure）にも攻撃（targeted attack）にも強いネットワークは作れないものだろうか．

この問題について，まず問題の本質を捉えた定性的な考察を行ってみよう．スケール・フリー・ネットワークの持つ random failure に対する頑強性はネットワーク内に存在するハブのおかげである．ひとつひとつのハブがそれぞれ多くのノードを支配下に置きしっかりと連結性を支えた上で，さらにそのハブ同士も連結しあうことにより，たとえハブにぶら下がっている大多数のノードが故障したとしてもネットワーク全体の連結性は揺るがない．つまり，random failure に対する頑強性にとっては多くのハブの存在は不可欠である．しかし，targeted attack に対しては，多くのノードを支配下に置くハブの存在はまさに絶好の標的（target）である．1 つのハブを除去するだけでそのハブが支配している多くのノードも同時に除去されてしまうからである（図-6 参照）．

したがって，故障（random failure）に強いネットワークを作るためにはネットワーク内にハブが存在しなければならない．しかし，ハブがあまり多すぎると外部からの攻撃（targeted attack）に対して脆弱になってしまうので，ハブはあまり多く入れてはならない．つまり，攻撃（targeted attack）に対する頑強性をほとんど損なうことなく，しかも故障（random failure）に対する頑強性を十分に持つ（ノード除去閾値 f_r がほとんど 1 になる）ような，ちょうどよいハブの入れ方はあるのか，ということが本質的な問題である．

《二極次数分布構造》

この問題に対する解答が二極次数分布（bimodal distribution）である（図-7 参照）．このネットワークには 2 つの次数 k_1, k_2 を持つノードしか存在しない．小さい方の次数 k_1 は本質的には与えられた平均次数 $\langle k\rangle$ に等しい．大多数のノードがこの次数を持つ．大きい方の次数 k_2 を持つノードは全ノードのうちの r の割合を占め，ハブの役割を担う[☆2]．なぜこの二極分布構造が故障に対しても攻撃に対しても頑強であるのかを定性的に述べると次のようになる．

(1) 与えられた平均次数 $\langle k\rangle$ に等しい次数を持つ単一のノード種からなるネットワークが外部からの攻撃（targeted attack）に対して最も高い頑強性（$f_t = \overline{f_t} = 1-1/(\langle k\rangle-1)$）を持つ．

(2) 故障（random failure）に対する頑強性を上げるためにはハブの導入は不可欠である．したがって，ネットワーク内には 2 つ以上の異なる次数を持つノードがなければならない．

(3) しかし，攻撃（targeted attack）に対する頑強性を損なってしまうほどの多種類のハブは導入できない．したがって，導入し得るハブは元々存在するノード種（次数 $\langle k\rangle$）以外にただ 1 種類のみである．

(4) その結果，2 種のノード群を含むネットワーク（bimodal network）が故障に対しても攻撃に対しても最大の頑強性を持つ．

もちろん，この定性的な考察は定量的な計算によって裏づけられなければならない．幸い，この二極次数分布構造は十分に簡単な形をしているため，f_r や f_t をすべて解析的に求めることができる．まず random failure に対するノード除去閾値 f_r は

$$f_r = \frac{\langle k\rangle^2 - 2r\langle k\rangle k_2 - 2(1-r)\langle k\rangle + rk_2^2}{\langle k\rangle^2 - 2r\langle k\rangle k_2 - (1-r)\langle k\rangle + rk_2^2} \tag{8}$$

となる．次に targeted attack に対するノード除去閾値は $f_t > r$ の場合，

$$f_t = r + \frac{1-r}{\langle k\rangle - rk_2}\left\{\langle k\rangle \frac{\langle k\rangle - rk_2 - 2(1-r)}{\langle k\rangle - rk_2 - (1-r)} - rk_2\right\} \tag{9}$$

☆2 厳密に考えれば，初めに与えられた平均次数 $\langle k\rangle$ のノードのみからなるネットワークにその他の次数のノードを加えればネットワーク全体の平均次数は与えられた値からは変わってしまうのだが，k_2 の次数を持つノードを 1 つ付け加えたことによる平均次数の変化は k_2/N の程度なので，N の大きなネットワークに対して平均次数はほとんど変化しない．

となり，$f_t < r$ の場合，

$$f_t = \frac{\langle k\rangle^2 - 2r\langle k\rangle k_2 + rk_2^2 - 2(1-r)\langle k\rangle}{k_2(k_2-1)(1-r)} \tag{10}$$

となる☆3．この解析的な表式を用いれば $f_r + f_t$ の値を最大にする r と k_2 の関係を厳密に求めることができる．その結果，最適解を与える k_2 と r の関係は，r の小さいところで漸近的に

$$k_2 \backsim \left\{\frac{2\langle k\rangle^2(\langle k\rangle-1)^2}{2\langle k\rangle-1}\right\}^{1/3} r^{-2/3} \equiv Ar^{-2/3} \tag{11}$$

となり，この最適構造をとった場合の二極次数分布を持つネットワークのトータルなノード除去閾値 $f_T = f_r + f_t$ の値は

$$f_T = \overline{f}_T - \frac{3\langle k\rangle}{A^2} r^{1/3} + O(r^{2/3}) \tag{12}$$

であることが分かる．ここで，$\overline{f}_T$ はノード除去閾値の合計の絶対的な最大値 $2-1/(\langle k\rangle-1)$ である．したがって，確かにこの二極次数分布構造のネットワークは $r\to 0$ の極限で f_T の絶対的な最大値に限りなく近づいていき，所望の性質を持っていることが分かる．

ここで 1 つ注意しておきたいのだが，式 (12) の r のべき指数は整数ではなく，この結果は $r\to 0$ に関して非解析的であることである．すなわち，初めから $r=0$ としたのでは（つまり，単一ノード種のみのネットワークでは），この結果は得られない☆4．いくら少数だといってもハブ・ノードは絶対に必要なのである．

次に，総ノード数が N，平均次数が $\langle k\rangle$ である場合に，具体的にどのように r と k_2 を定めればよいのだろうか．式 (12) から分かるように，できるだけ r は小さくとるべきである．これは式 (11) を見ると k_2 をできるだけ大きくとることと同等である．しかし，あまり k_2 を大きくとりすぎると，ネットワークを作る際に，同じノードを 2 本以上のリンクで結んでしまったり，自分自身にリンクを張ってしまったりすることが無視できなくなってくる．2 本目以降のリンクや自分自身に張るリンクは今考えるネットワークの頑強性には寄与しないため，多すぎる次数を持つハブの導入は無駄である．詳しい考察によれば，$k_2 \approx \sqrt{\langle k\rangle N}$ を超えると，このようなことが起こり始めることから，k_2 のとり得る最大値として，この $k_2 \approx \sqrt{\langle k\rangle N}$ をとることにしよう．式 (11) から，$r = (A^2/\langle k\rangle N)^{3/4}$ であることを用いて，式 (12) は

$$f_T = \overline{f}_T - \frac{3\langle k\rangle^{3/4}}{A^{3/2}} N^{-1/4} + O(N^{-1/2}) \tag{13}$$

となる．この場合には，$N\to\infty$ において $f_T \to \overline{f}_T$ となる．

平均次数 $\langle k\rangle=3$，総ノード数 $N=10^4$ として，具体的に計算してみよう．この場合，$k_2=173.2$，$rN=8.55$ であるから，次数 174 を持つハブを 8 個導入し，後の 9,992 個のノードは次数 3 を持つ二極次数分布ネットワークを作ればよいことになる．このときの，故障に対するノード除去閾値 f_r と攻撃に対するノード除去閾値 f_t の和 f_T は式 (13) から約 1.32 となり，平均次数 $\langle k\rangle=3$ の場合の絶対的な最大値 $2-1/(\langle k\rangle-1)=1.5$ の約 88% の強度を達成している．スケール・フリー・ネットワークの場合には $f_r \approx 1, f_t \approx 0$ であるから $f_T \approx 1$，次数 $\langle k\rangle=3$ の単一ノード種からなるネットワークの場合には $f_r = f_t = 1-1/(\langle k\rangle-1) = 0.5$ より $f_T=1$ であるから，事実，このいずれの場合よりも頑強であることが分かる．図 -8 に平均次数 $\langle k\rangle=3$ の場合に，総ノード数 N の変化に伴って，f_T の $\overline{f}_T$ に対する比がどのように変わるかを示す（$f_T/\overline{f}_T=1$ が 100% の頑強性である）．

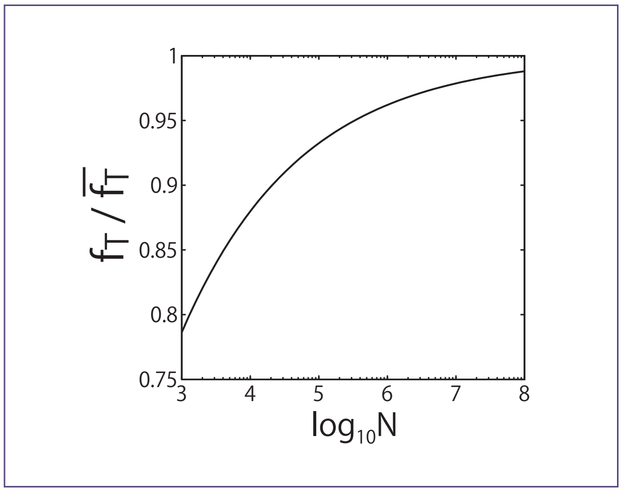

図 -8　平均次数 $\langle k\rangle = 3$ のときの二極次数分布ネットワークの総ノード数 N に対する $f_T / \overline{f}_T$ の振舞い．$N = 1000$ ぐらいから約 80%の強度を示し，$N = 10000$ を超えると 90%以上の強度を示す．

《多極次数分布構造》

次に，前節の二極次数分布ネットワークとスケール・フリー・ネットワークとの関係を見てみよう．故障にも攻撃にも強い二極次数分布ネットワークは式 (11) より $r \propto k_2^{-3/2}$ であるから，指数 $1+3/2=2.5$ のスケール・フリー・ネットワークと見ることもできる☆5．二極次数分布ネットワークの特徴は $f_r \approx 1$ であると同時に，f_t の値も $1-1/(\langle k\rangle-1)$ に近い値をとり得るということであった．これに対してスケール・フリー・ネットワークは $f_r \approx 1$ ではあるが，ハブの種類があまりに多いために $f_t \approx 0$ となってしまっている．

ハブの種類がどの程度まで多くなると targeted attack に対する頑強性が失われてしまうのかを調べるため

☆3 この表式を得る際には平均次数を厳密に $\langle k\rangle$ に固定している．

☆4 実際，式 (8) と (9) において $r\to 0$ とすると，単に $f_r=f_t=1-1/(\langle k\rangle-1)$ の結果を得るだけである．

☆5 二極次数分布のような局在した分布をスケール・フリー・ネットワークの場合の（疑似）連続分布と対応させるために指数に 1 を加えている．

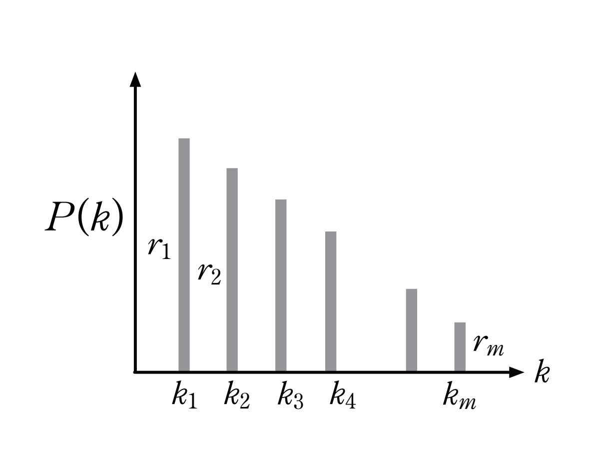

図-9　多極次数分布（multimodal distribution）．モード数 m を無限大にする極限でスケール・フリー・ネットワークの次数分布となる．

に，m 種類のノード種を持つ多極次数分布ネットワーク（multimodal network）を考えてみる（図-9 参照）．このネットワークは一番大きな次数 k_m とそのノード種の割合 r_m のほかに，1 より大きな値をとる a，0 と 1 の間の値をとる b の合計 4 つのパラメータを持ち，m 種のノード種の持つ次数 k_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) は $k_i = k_m b^{m-i}$ であるとし，次数 k_i を持つノード種の割合 r_i は $r_m a^{m-i}$ であるとする．この多極次数分布ネットワークは指数 $1-\ln a/\ln b$ のべき乗次数分布を持つネットワークと見なすことができ，モード数 $m\to\infty$ の極限でスケール・フリー・ネットワークに帰着する．したがって，このネットワークを調べることで，二極次数分布ネットワークとスケール・フリー・ネットワークの間の移り変わりを調べることができる．

この多極次数分布ネットワークも，二極次数分布ネットワーク同様，f_r および f_t を厳密に求めることができる．我々は，総ノード数 N，平均次数 $\langle k\rangle$，モード数 m を与えた上で，最大の $f_T \equiv f_r + f_t$ を与える最大次数 k_m と r_m を数値計算によって求めた．その結果，臨界モード数 m_c が存在し，多極次数分布ネットワークがこの m_c より多くのノード種を含む場合，targeted attack に対するノード除去閾値 f_t がほとんどゼロになってしまい，実質的にスケール・フリー・ネットワークと同じ頑強性（むしろ脆弱性）になってしまうことが分かった．数値計算によれば，この臨界モード数 m_c は

$$m_c = 1 + (0.62\langle k\rangle - 1.0)\log_{10} N \qquad (14)$$

と求められる．総ノード数 $N=10^4$，平均次数 $\langle k\rangle=3$ とすると，このときの臨界モード数 $m_c=4.44$ であるから，4 種類を超えるノード種を含むネットワークの targeted attack に対する頑強性は実質的にはゼロであるということになる☆6．

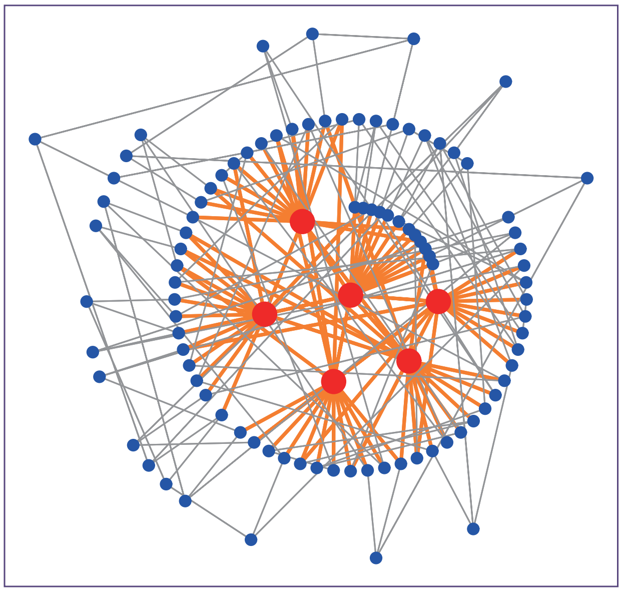

図-10　総ノード数 N=100，平均次数 $\langle k\rangle \approx 3$ の場合に最適化された二極分布ネットワーク．この場合，必要なハブ（赤いノード）は 6 つであり，その次数は 17 である．その他の 94 個のノード（青）は平均次数 3 を持つ．

まとめ

本稿の内容をまとめると以下のようになる．

- ネットワークを構成する個々のノードの相互に無相関な機能不全（random failure）と外部からのノードの選択的な除去（targeted attack）に対して最も頑強であるネットワーク構造は二極次数分布構造（図-7）である．
- 総ノード数 N，平均次数 $\langle k\rangle$ を与えたとき，最も頑強な二極分布ネットワーク構造は，ネットワーク内に次数 $\sqrt{\langle k\rangle N}$ のハブ・ノードが個数 $(A^2/\langle k\rangle)^{3/4} N^{1/4}$ だけ含まれているものである．残りのノードはすべて決められた平均次数 $\langle k\rangle$ に等しい次数を持つ．なお，定数 A は式(11)で定義されている．
- ネットワーク内に含まれる次数の異なるノードの種類を m とすると，だいたい m が $1+(0.62\langle k\rangle-1.0)\log_{10} N$ より大きくなると，外部からの攻撃に対する頑強性が失われる．この点において，インターネットや北米の電力供給網はノード種数が過多であり，外部からのハブに対する選択的な攻撃に対してはほとんど抵抗力を持たない．もちろん，これらのネットワークにおけるハブは普段は外部からの攻撃に対して厳重に守られているが，いったんそれらのハブが機能を失うと，ハブの迂回路がもたらす雪崩的なノードの過剰負荷による機能不全も加わって，2003 年夏の北米大停電のような事態が容易に起こり得る．図-10 に総ノード数が 100，平均次数が約 3 の場合に最も頑強な二極分布ネットワ

☆6 大ざっぱに $m_c \approx \log_{10} N$ と考えても大きさの程度としては，あまり違いはない．

ークを示しておく．

ネットワーク理論のこれから

スケール・フリー・ネットワークがネットワークに含まれるノードのランダムな機能不全に対して完全な頑強性を持つことができるのは，ネットワーク内に次数に関して非常に多様なノード種を含むからである．これはシステムに多様性（heterogeneity）を導入することにより，システム自体に内在する機能不全に対する頑強性を高めることができることの一例である．しかし，そのスケール・フリー・ネットワークをいったん外から眺めると，多様なノード種の存在は格好の標的を提供することとなり，システム全体を破壊するには数％のハブを攻撃するのみでよい，ということになる．多様性の導入は，ある意味，諸刃の剣であり，システムを違った観点から眺めれば，強みにもなり，また弱点ともなり得るということである．

しかし，注意深く制御された方法でハブを導入すると，故障にも攻撃にも強いネットワークを作ることができるという結果は非常に興味深い．二極次数分布ネットワークは，大多数のノードは平均的な次数しか持たないが，ほんの少数だけ含まれているハブ・ノードゆえに構成ノードのランダムな機能不全に対しての頑強性は十分である．また，その均質性ゆえに外から標的を絞りにくい．また，たとえその少数のハブ・ノードが攻撃されたとしても，残された大多数のノードそれ自体で十分な連結性を保つことができる．二極次数分布ネットワークは「個々のプレイヤが十分な力を持ち，連携した上で，さらにそれらのプレイヤをまとめあげる少数のスーパー・リーダがいるネットワーク」と例えられるかもしれない．

統計物理学の手法を用いたネットワークの頑強性や構造最適化に対する研究は始まったばかりであり，まだまだやるべきことが残されている．特に現実のネットワークの含むノード数は統計的手法が厳密に当てはまるほど膨大でもないが，かといって１つ１つのネットワークを個別に調べられるほど少数でもない．そのような，いわば中間的なノード数を持つ現実のネットワークに対して定量的な予言ができるような理論的考察はあまりない．いろいろなネットワーク構造の物理的な性質を解明すると同時に，さまざまなスケールのネットワークを統一的に理解する枠組みの構築が必要である．

さらに，現実のネットワークでは，ノード間にリンクを張る際に，距離的・空間的・金銭的制約などから，何らかの制限が入ってくることが避けられない．これは，ネットワーク生成の際にノードの次数間に相関関係が存在することと同等であるが，現在のところ，次数相関を積極的に取り入れたネットワーク理論は多くはない．理論が現実のネットワークに対して何か意味のある予言をする上では，この次数相関を取り入れたネットワーク理論を作り上げることも必要になってくる．

このように，まだまだ初歩的な段階にあるネットワーク理論であるが，効率的かつ高機能なネットワークを設計しようとする際に，単に経験則だけに頼るのではなく，何らかの定量的な裏づけのある確かな原則や指針を提供できるように研究を重ねていきたい．

謝辞　本研究の一部は，平成 17 ～ 18 年度日本学術振興会科学研究費補助金の補助を受けて行われた．また，筆者に本稿執筆の機会を与えていただいた情報処理学会ネットワーク生態学研究会の皆様に，この場をお借りして感謝の意を表したい．

参考文献

1) アルバート＝ラズロ・バラバシ：新ネットワーク思考 ―世界のしくみを読み解く，NHK 出版（2002）．
2) ダンカン・ワッツ：スモールワールド・ネットワーク ―世界を知るための新科学的思考法，阪急コミュニケーションズ（2004）．
3) Cohen, R., Erez, K., Ben-Avraham, D. and Havlin, S. : In Handbook of Graphs and Networks, edited by Bornholdt, S. and Schuster, H. G. (Wiley-VCH, New York, 2002), Chap.4.
4) Paul, G., Tanizawa, T., Havlin, S. and Stanley, H. E. : Optimization of Robutness of Complex Networks, Eur. Phys. J. B **38**, 187 (2004), and its Erratum, Eur. Phys. J. B 48, 149 (2005).
5) Tanizawa, T., Paul, G., Cohen, R., Havlin, S. and Stanley, H. E. : Optimization of Network Robustness to Waves of Targeted and Random Attacks, Phys. Rev. E **71**, 047101 (2005).
6) Tanizawa, T., Paul, G., Havlin, S. and Stanley, H. E. : Optimization of the Robustness of Multimodal Networks, Phys. Rev. E **74**, 016125 (2006).

（平成 19 年 12 月 12 日受付）

谷澤俊弘
tanizawa@ee.kochi-ct.ac.jp

平成 7 年京都大学大学院理学研究科物理学第一専攻博士課程修了．同大学院研修員，大阪工業大学非常勤講師等を経て，平成 10 年より高知工業高等専門学校電気工学科講師．平成 12 年より同高等専門学校電気工学科助教授．平成 15 年よりボストン大学客員研究員．平成 19 年より高知工業高等専門学校電気工学科准教授．専門は物性理論．博士（理学）．日本物理学会およびアメリカ物理学会各会員．