

5パラメータ・ローカルボラティリティ・モデルの オプション市場価格再現力と株価予測力

回 淵 純 治^{†1} 宮 崎 浩 一^{†1} 岡 本 雅 生^{†1}

本研究では、まず、Li¹⁾にある3パラメータモデルのローカル・ボラティリティに新たな関数形を加えた5パラメータモデルを提案し、市場で観測可能なプレーンバニラ・オプションの価格情報を可能な限り反映させてエキゾチックオプションを価格付けする観点から新たに導入した関数形が効果的であることを示した。次に、既存研究でも用いられた尤度基準や Berkowitz 検定に加えて、新たに Kullback-Leibler 情報量を利用した基準を提案し、3パラメータモデルと5パラメータモデルを、オプション市場価格から抽出したリスク中立分布に実現株価の予測力がどの程度あるかについて比較した。実現株価の予測力の観点からも3パラメータモデルのローカル・ボラティリティに新たに加えた関数形の有用性が分かった。

5-parameter Local Volatility Model: Fitting to Option Market Prices and Forecasting Ability

JUNJI MAWARIBUCHI,^{†1} KOICHI MIYAZAKI^{†1}
and MASAKI OKAMOTO^{†1}

In this research, firstly, we propose 5-parameter model that incorporates new functional form in addition to that of 3-parameter model and illustrate its importance in the valuation of Exotic products incorporating the information of listed option prices. Secondly, introducing the new criterion utilizing Kullback-Leibler divergence other than usual likelihood and Berkowitz test, we examine the 3-parameter model and the 5-parameter model from the view point how close the extracted risk-neutral distribution of each model forecasts the realized equity dynamics. Our result suggests that the new functional form in the 5-parameter model is again quite useful in this respect.

1. はじめに

取引所に上場されているオプションは、通常、プレーンバニラと呼ばれる単純なコール・オプション（事前に決められた価格（権利行使価格と呼ぶ）で満期に対象となる資産（原資産）を購入する権利）やプットオプション（売却する権利）である。金融機関は、エキゾチック・デリバティブと呼ばれる複雑な金融派生証券を相対取引で売買しているが、これらは、市場で観測可能なプレーンバニラ・オプションの価格情報を可能な限り反映させて価格付けされる。また、複雑な金融派生証券は、本研究で採り上げるノックアウト・バリア・オプション（満期時点までに株価が事前に定めた閾値を超えたならば権利が消滅するようなオプション）のように満期までの株価の経路に依存するようなものが多く、効率的な価格付けの方法として株価の推移をラティスで表現するラティスモデルがさかんに利用される。

株価モデルとして最も単純で広く利用されているものに、株価が幾何ブラウン運動に従うとするモデルがある。プレーンバニラ・オプションの評価式として有名な Black-Scholes モデル²⁾（以下、BS モデル）においても、株価モデルとして幾何ブラウン運動が用いられている。この株価モデルは、株価リターンの変動性を表す標準偏差（通常、ボラティリティと呼ぶ）が一定となるモデル化である。権利行使価格が異なる上場オプションの市場価格から BS モデルを逆算して導出したボラティリティ（インプライド・ボラティリティと呼ぶ）を観測すると、権利行使価格がアット・ザ・マネー（現在の株価に等しい場合であり、以下 ATM と呼ぶ）のときに低く、ATM から離れるに従って高くなるという現象（ボラティリティ・スマイル）が見られる。つまり、ボラティリティが一定とする株価モデルでは、現実のオプション市場価格を勘案すると不具合が生じる。このような不具合を解消するために、株価モデルは、ダミニステック・ボラティリティモデル³⁾⁻⁵⁾、確率ボラティリティモデル⁶⁾、ジャンプを含むモデル⁷⁾と大きく3つの方向に拡張されることとなった。本研究では、ラティスを用いたエキゾチック・デリバティブの評価に焦点を当てるため、ラティスによる表現をスムーズに行うことが可能なダミニステック・ボラティリティモデルに関して議論する。

ダミニステック・ボラティリティモデルとは、BS モデルでは一定であったローカル・ボラティリティを時間と株価の関数形で表現するモデルである。よって、どのようなロー

^{†1} 電気通信大学システム工学科

Department of Systems Engineering, The University of Electro-Communications

カル・ボラティリティの関数形を与えれば、様々な権利行使価格のオプションモデル価格をオプション市場価格に近づける（市場で観測可能な価格情報を可能な限り反映させたモデル化をする）ことができるかがオプションの価格付けにおける主たる研究テーマであった。Hoshika らにおいても、ローカル・ボラティリティにいくつかの関数形を与えオプションモデル価格とオプション市場価格との価格誤差に関する検証を行っている⁸⁾。先行研究では、3パラメータモデルとしてローカル・ボラティリティの関数形に $\tanh(x)$ という関数形を導入することでオプション市場価格への高いフィッティング精度が得られること、また、7パラメータモデルとして $\text{sech}(x)$ という関数を加えて利用すれば、さらにフィッティング精度が向上することを指摘している。しかし、先行研究の7パラメータモデルの関数形は3パラメータモデルの関数形と異なり、3パラメータモデルを完全に含むモデルではないため、フィッティング精度の向上が $\text{sech}(x)$ という関数の導入によるものなのかモデルの関数形の相違によるものなのか正確に判断することはできなかった。また、推定されたリスク中立ラティスに将来の株価推移に関する予測力がどの程度あるかについての検証は先行研究における今後の課題であった。

この課題は、近年、オプション市場価格には株価予測力が内在していると指摘されるようになったことに起因する^{9),10)}。これは、オプション価格は満期におけるリスク中立分布に基づいて評価されるので、逆に、様々な権利行使価格のオプション市場価格から抽出したリスク中立分布にはオプション満期における株価の予測力がいくらか含まれるという指摘である¹¹⁾。しかしながら、いずれの研究も抽出したリスク中立分布がオプションの満期時点のものであるため、オプションの満期時点の株価に関する予測力の検証にとどまっている。

本研究では、株価の推移をラティスモデルで表現するため、満期におけるリスク中立分布の抽出が同時にラティスの中身も決定するので、満期までの離散時点におけるリスク中立分布が得られることになる。よって、リスク中立ラティスから得られる各離散時点におけるリスク中立分布が、対応する時点の実現株価をどの程度予測可能であるかについて検証することができる。上記の株価予測力の検証に関しては、尤度基準、Berkowitz 検定¹²⁾、Kullback-Leibler 情報量^{13),14)} を検証手法として用いた実証分析を行い、これらの中で有用なオプションモデルを議論する。

本論文の構成は、以下のとおりである。2章では、分析対象となるオプション評価モデルを導入し、ラティスの構築法とモデルのキャリブレーション手法を手短かに述べる。3章では、尤度基準、Berkowitz 検定、Kullback-Leibler 情報量を用いたオプション評価モデルと株価予測力の検証手法について説明する。4章では、提案手法に基づく実証分析結果とその

考察を与える。最終章では、まとめと結語を付す。

2. オプション評価モデル

2.1 4種のデタミニスティック・ボラティリティ・モデル(DVM)

デタミニスティック・ボラティリティ・モデルとは、式(1)のように、ローカル・ボラティリティが、株価 S_t と時刻 t の関数形 $\sigma(S_t, t)$ として表現されるモデルである。表1には、BSモデルを含め、本研究の分析対象となる4通りのローカル・ボラティリティモデルを掲載した。

$$dS_t/S_t = rdt + \sigma(S_t, t)dW \quad (1)$$

ここで、 S_t は時点 t における株価、 r は無リスク金利（本研究では無リスク金利は0とする）、 $\sigma(S_t, t)$ はローカル・ボラティリティ、 dW はウィナー過程である。

表1に示した4通りのローカル・ボラティリティについて手短かに整理する。1パラメータモデルはBSモデルにほかならない。2パラメータモデルは、原資産価格 S_t をパラメータ b でベキ乗し、さらにパラメータ a を掛けたモデルで、通常、コンスタント・イラスティシティ・ボラティリティモデル(CEVモデル)と呼ばれ、宮崎¹⁵⁾にあるように、リスク中立分布の歪度がある程度まで表現可能であることが知られている。3パラメータモデルは、時点 t までの株価リターンに $\tanh(x)$ を用いたモデルであり、 $\tanh(x)$ の $x=0$ 近くの感応度が高いため、リスク中立分布の歪度を柔軟に表現することができる。5パラメータモデルは、本研究で提案するモデルであり、 $\text{sech}(x)$ をモデルに含めて、3パラメータモデル($\tanh(x)$ のみ)を完全に含む形で拡張したモデルである。 $\text{sech}(x)$ は x に関して上に凸な関数であり、リスク中立分布の尖度を表現することができるので、 $\tanh(x)$ を含む5パラメータモデルはリスク中立分布の4次モーメントまで柔軟に表現することが可能である。

表1 4種のデタミニスティック・ボラティリティ・モデル(DVM)
Table 1 Four kinds of Deterministic Volatility Model (DVM).

DVM	Local Volatility	
1P	$\sigma(S_t, t) = a$	BS Model
2P	$\sigma(S_t, t) = aS_t^b$	CEV Model
3P	$\sigma(S_t, t) = c + a \left\{ 1 - \tanh \left[b \left(\frac{S_t - S_0}{S_0} \right) \right] \right\}$	Li Model
5P	$\sigma(S_t, t) = c + a \left\{ 1 - \tanh \left[b \left(\frac{S_t - S_0}{S_0} \right) \right] \right\} + d \left\{ 1 - \text{sech} \left[e \left(\frac{S_t - S_0}{S_0} \right) \right] \right\}$	Our Model

ここで、5パラメータモデルのローカル・ボラティリティに含まれる関数形 $a(1 - \tanh(bx)) + c$ 、 $d(1 - \operatorname{sech}(ex)) + c$ のパラメータ感応度と対応する分布形を確認しておく。図1には、4通りのパラメータセットにおける関数形 $a(1 - \tanh(bx)) + c$ の形状を描いた。図1によれば、 a が正（負）のときに右下（右上）がりとなること、また、 b の値が大きいほど0付近の変化率が大きくなるのが分かる。よって、 a が正（負）のときには株価が上昇（下落）する際にボラティリティが小さくなり、その変化率が b で表現される。図2は、 $S_0 = 15,000$ 、満期までの期間を15営業日とした場合の満期における株価の分布を2通りのパラメータセットに関して示したものである。 a が正（負）のときには株価の分布が下側（上側）に歪んでいることが確認できる。次に、図3には、4通りのパラメータセットに関して関数形 $d(1 - \operatorname{sech}(ex)) + c$ の形状を描いた。図3によれば、 d が正（負）のときに上側（下側）に広がること、また、 e の値が大きいほど0付近の変化率が大きくなるのが分かる。よ

て、 d が正（負）のときには株価が現在の値から乖離するに従って、ボラティリティが大きく（小さく）なり、その変化率が e で表現される。そして、図4は、 $S_0 = 15,000$ 、満期までの期間を15営業日とした場合の満期における株価の分布を2通りのパラメータセットに関して示したものである。 d が正（負）のときには株価の分布の裾野が両側とも広い（狭い）ことが確認できる。

Remark1

Dumasら¹⁶⁾では、ローカル・ボラティリティ・モデルの関数形として、状態変数に関しては2次関数を採用している。2次関数を採用する場合でも、現在の株価に近い部分においては、2次関数と図3に示した提案モデルに含まれる関数形が類似するため、図4にあるような満期における株価分布の尖度の影響を柔軟に表現することが可能と考えられる。しかし、現在の株価から遠い部分に関しては、推定されるパラメータにも依存するが、ローカル・ボラティリティが急激に大きくなってしまふことが想定される。さらに、2次関数では、左右対称となるため、提案モデルに含まれる関数形から生成されるような満期における株価分布

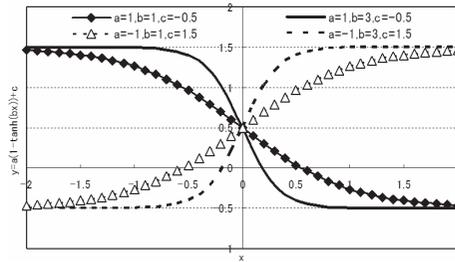


図1 $a(1 - \tanh(bx))$ の関数形
Fig.1 Function form of $a(1 - \tanh(bx))$.

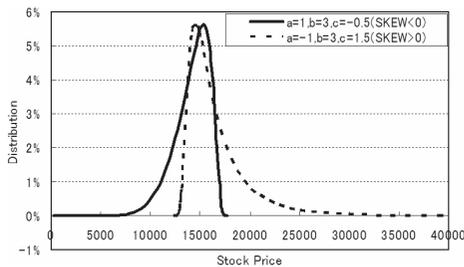


図2 満期における分布（歪みの影響）
Fig.2 Maturity distribution (the effect of skewness).

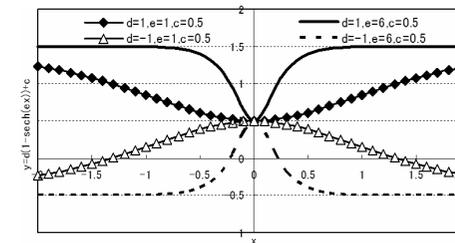


図3 $d(1 - \operatorname{sech}(ex))$ の関数形
Fig.3 Function form of $d(1 - \operatorname{sech}(ex))$.

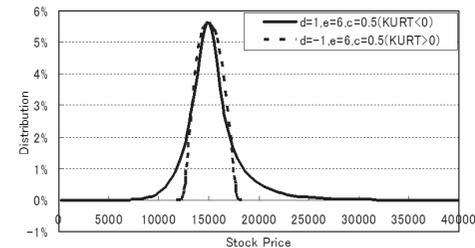


図4 満期における分布（尖度の影響）
Fig.4 Maturity distribution (the effect of kurtosis).

の歪度を表現することは難しい。よって、ローカル・ボラティリティ・モデルの関数形としては、満期における株価分布の歪度と尖度をともに柔軟に表現可能である本研究モデルの方が望ましいと考えられる。なお、彼らの関数形の中には時間に依存可能なものもあるが、本研究では流動性の高い各月に限月を迎えるオプションを分析対象としており、パラメータ推定の際に時間軸方向のオプション市場価格データは1つしかないため(状態変数の方向、つまり、クロス・セクショナルなオプション市場価格データは7つ用いている)、ローカル・ボラティリティ・モデルの関数形として意識的に状態変数にのみ依存するものを選択している。

2.2 ラティスに基づくオプション評価法 (Li¹⁾)

プレーンバニラ・オプションは、満期 T における株価 S_T のリスク中立分布 $f(S_T)$ を用いて評価することができる。コール・オプションとプット・オプションの評価式を合わせて式 (2) として掲載した。

$$\begin{aligned} \text{Call} &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \max(S_T - K, 0) f(S_T) dS_T \\ \text{Put} &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \max(K - S_T, 0) f(S_T) dS_T \end{aligned} \quad (2)$$

本研究では、式 (2) はラティスを用いて評価するのであるが、表 1 に示した 4 つのデタミニステック・ボラティリティ・モデルを二項ラティスで表現する際に、2 時点間における状態推移の確率は上昇下落ともに 50% となるような Li アルゴリズムを採用する。Hoshikara⁸⁾ では、Li アルゴリズムの安定性は Derman⁴⁾ のラティス構築法と比較してはるかに優れていることが指摘されている。図 5 には横方向に時間、縦方向に株価をとり、バイノミナル・ラティスの概念図を示した。ここで、 S_t^i は t 時点における上から i 番目のノードにある原資産価格である。ラティスの形状を見ると、上方のラティスと下方のラティスとは上下の価格幅が異なっており、株価 S_t の大きさによってローカル・ボラティリティが異

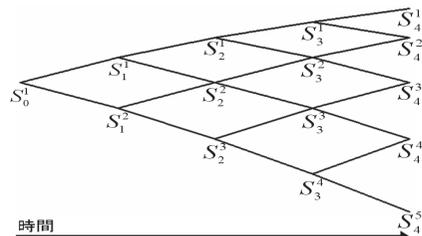


図 5 Li モデル・バイノミナル・ラティスの概念図
Fig. 5 Basic structure of Li Model Binomial Lattice.

なることがうかがえる。

Li アルゴリズム

式 (3) は 2 時点間の株価の推移を表現しており、現時点の株価から翌期の株価が求められるアルゴリズムとなっている。ここで Δt は 1 ラティスあたりの微小時間である。

$$\begin{aligned} S_t^1 &= S_{t-1}^1 [1 + r\Delta t + \sigma(S_{t-1}^1, t)\sqrt{\Delta t}], \\ S_t^{t+1} &= S_{t-1}^t [1 + r\Delta t - \sigma(S_{t-1}^t, t)\sqrt{\Delta t}], \\ S_t^{i+1} &= \frac{1}{2} \{ S_{t-1}^{i-1} [1 + r\Delta t - \sigma(S_{t-1}^{i-1}, t)\sqrt{\Delta t}] \\ &\quad + S_{t-1}^{i+1} [1 + r\Delta t + \sigma(S_{t-1}^{i+1}, t)\sqrt{\Delta t}] \}. \quad (i \neq 0, t) \end{aligned} \quad (3)$$

第 1 式は図 5 の最上部の株価のラティスを表しており、無リスク金利 r とデタミニステック・ボラティリティ $\sigma(S_t, t)$ を用いて翌期の株価を表現している。また、第 2 式は最下部の株価のラティス、第 3 式はそれ以外のラティスの中身の株価を同様に表している。

2.3 オプション評価モデルのキャリブレーション手法

オプションモデル価格(未知パラメータを含む)とオプション市場価格との誤差の 2 乗和を最小にするようにキャリブレーションを行う。キャリブレーションに利用するオプションの種類は流動性を考慮して選んだ 7 種類であり、具体的には、権利行使価格が現在の株価に最も近いオプションである ATM コール・オプション (CallATM と呼ぶ)、ATM よりも 500 円、1,000 円、1,500 円高い権利行使価格のコール・オプション (順に CallOTM1, CallOTM2, CallOTM3 と呼ぶ)、ATM よりも 500 円、1,000 円、1,500 円低い権利行使価格のプット・オプション (順に PutOTM1, PutOTM2, PutOTM3 と呼ぶ) である。また、オプションの残存期間は 5, 10, 15, 20 営業日とする。満期までのラティスの数は、Hoshikara⁸⁾ と同様に 200 ラティスとする。

キャリブレーションは、表 2 に示すテクニカルな制約条件(最適化をスムーズに行うためにこのような制約をおくが、満期までの営業日数を考慮するとこれらはきわめて緩い制約である)の下で式 (4) に示す目的関数を最小化することにより行う。

$$\text{Min} \sum_{i=0}^6 (P'_i - P_i)^2 / 7 \quad (4)$$

ここで、 P_i はオプション市場価格、 P'_i はオプションモデル価格、 i はオプションの種類を表し、 $i = 0$ で CallATM、 $i = 1$ で CallOTM1、 $i = 2$ で CallOTM2、 $i = 3$ で CallOTM3、

表 2 各モデルの制約条件
Table 2 Limiting condition of each model.

DVM	Functional Constraint
2Parameter Model	$0 < \sigma(S_t, t) < 1$ for $0.25 \leq \frac{S_t}{S_0} \leq 1.5$
3Parameter Model	$0 < \sigma(S_t, t) < 1$ for $0.5 \leq \frac{S_t}{S_0} \leq 1.5$
5Parameter Model	

$i = 4$ で PutOTM1, $i = 5$ で PutOTM2, $i = 6$ で PutOTM3 を示す.

3. 推定されたリスク中立分布の株価予測力に関する検証手法

3.1 尤度基準に基づくアプローチ

本研究では、ラティスを用いたオプション評価法を採用しているため、2.3 節で述べたキャリブレーション法によってひとたびリスク中立測度の下でのラティスが構築されたならば、満期までの離散時刻におけるリスク中立分布が得られることになる。ここでは、株価予測力の検証においては、残存期間が 15 営業日のオプション市場価格から構築したリスク中立ラティスを対象とする。これは、残存期間が 20 営業日のものを対象とすると、当該オプションの評価日が前月のオプションの満期日以前になっている、あるいは、前月のオプション満期からほとんど経過していないことになり、株価が前月のオプションの権利行使などの影響を受けている可能性が懸念されるからである。このため、残存期間が 15 営業日のオプションを採用しているので、ラティスはオプションの価格付けを行った日(0 営業日)として 15 営業日後まで構築されている(3.2 節, 3.3 節のアプローチにおいても同様である)。尤度に基づく株価予測力の検証では、 i ($i = 1, \dots, 15$) 営業日後におけるリスク中立分布 ($f_i(S)$) と実現株価 S_i から得られる対数尤度 $\sum_{i=1}^{15} \ln f_i(S_i)$ を基準にモデル間の比較を行う。4.1 節において詳しく述べるが、オプションのデータとしては、各月に満期を迎える様々な権利行使価格のオプションの価格データセットを 59 セット (59 カ月分) 用いる。よって、上記の対数尤度はモデルごとに 59 個得られることになり、これらに基づいて検証を行う。

3.2 Berkowitz 検定に基づくアプローチ

Berkowitz 検定は、Bliss らにおいて、オプションの満期におけるリスク中立分布に満期における実現株価の予測力がどの程度あるかを検証するために利用されたアプローチである⁹⁾。満期におけるリスク中立確率が 59 セット得られる場合には、これら 59 セットのリスク中立分布と対応する満期における実現株価に基づき株価予測力の検証が行われる。本研究

では、3.1 節で述べたように満期 (15 営業日後) までの離散時刻におけるリスク中立分布が得られるので、先行研究のようにオプションの満期に限定した Berkowitz 検定だけでなく、満期までのいくつかの各営業日に関する Berkowitz 検定も行う。

オプションの満期におけるケースを取り上げ、Berkowitz 検定の手法を手短かに紹介する(詳しくは、Berkowitz¹²⁾を参照されたい)。各満期 T_i における実現株価 S_{T_i} が時系列的に独立であり、かつ満期におけるリスク中立確率密度関数 $\hat{f}_{t_i}(\cdot)$ が完全予測確率密度関数 $f_{t_i}(\cdot)$ (起点 (0 営業日) において満期時点の実現株価が従う確率密度関数) と等しい ($\hat{f}_{t_i}(\cdot) = f_{t_i}(\cdot)$) という帰無仮説の下では、リスク中立確率密度関数の株価 S_{T_i} までの累積分布関数 y_{t_i} は独立な一様分布 $U(0, 1)$ に従う。

$$y_{t_i} = \int_{-\infty}^{S_{T_i}} \hat{f}_{t_i}(u) du \quad (5)$$

標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(\cdot)$ の逆関数を使用し、上記の y_{t_i} を用いて新たに $z_{t_i} = \Phi^{-1}(y_{t_i})$ と定義すると、帰無仮説の下では z_{t_i} は独立な正規分布 $N(0, 1)$ に従うことになる。よって、式 (6) に基づき、 z_{t_i} の独立性と標準正規性の検定を行うことができる。

$$z_{t_i} - \mu = \rho(z_{t_{i-1}} - \mu) + \varepsilon_{t_i} \quad (6)$$

帰無仮説の下では、 $\mu = 0$, $Var(\varepsilon_{t_i}) = 1$, $\rho = 0$ となる。この対数尤度関数 $L(\mu, \sigma^2, \rho)$ は式 (7) で与えられる。ここで n はサンプル数を示す。

$$L(\mu, \sigma^2, \rho) = -\frac{1}{2} \left\{ n \ln(2\pi) + \ln \left(\frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \right) + \frac{[z_{t_1} - \mu / (1-\rho)]^2}{\sigma^2 / (1-\rho^2)} + (n-1) \ln(\sigma^2) + \sum_{i=2}^n \left[\frac{(z_{t_i} - \mu(1-\rho) - \rho z_{t_{i-1}})^2}{\sigma^2} \right] \right\} \quad (7)$$

尤度比統計量 $LR_3 = -2[L(0, 1, 0) - L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho})]$ は帰無仮説の下で $\chi^2(3)$ に従う。そのとき、帰無仮説が株価の自己相関のために棄却されることも考えられる。したがって、株価に自己相関はないとする帰無仮説の下で $\chi^2(1)$ に従う尤度比統計量 $LR_1 = -2[L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, 0) - L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho})]$ に基づく独立性の検定も合わせて行う。LR₁ が採択され LR₃ が棄却されるならば、リスク中立確率密度関数が完全予測確率密度関数を予測可能でないことを示す。LR₃ と LR₁ の両方が棄却されるならば、LR₃ の棄却理由が自己相関による可能性もあり判別できない。LR₃ と LR₁ の両方が棄却されない場合には、リスク中立確率密度関数が完全予測確率密度関数(原資産のダイナミクス, 実現株価)を予測可能である(ことを否定できない)ことになる。

Remark 2

金融工学の理論からは、リスク中立分布と満期における実現株価の分布が一致する必然性

はないが、オプション市場価格に内在する株価予測力がどの程度であるかを確認しておくことは、投資家にとって有益と考えられる。

3.3 Kullback-Leibler 情報量に基づくアプローチ

Kullback-Leibler 情報量（以下 K-L 情報量と略す）は、モデル $f(S)$ が真のモデル $g(S)$ をどの程度表現しているかを、確率分布としての近さによって評価する尺度である^{13),14)}。本研究では、上記において真のモデル $g(S)$ に対応するものとして実現株価から得られる分布を、モデル $f(S)$ に対応するものとしてリスク中立確率密度関数を探り上げて K-L 情報量に基づき、原資産のダイナミクス $g(S)$ とリスク中立分布 $f(S)$ の近さを評価する。

K-L 情報量 $I_n(g; f)$

確率分布関数が密度関数 $g(S)$ と $f(S)$ を持つ離散モデルの場合には、K-L 情報量 $I_n(g; f)$ は

$$I_n(g; f) = \sum_{i=1}^{n+1} g(S_n^i) \ln \frac{g(S_n^i)}{f(S_n^i)} \quad (8)$$

で与えられる。ここで S_n^i は、図 5 にあるようなノードの株価に対応するものであり、たとえば、図 5 において、 $n = 4$ の場合には、ラティス終端部分の株価 $S_4^1, S_4^2, \dots, S_4^5$ を意味する。

K-L 情報量には、(1) $I_n(g; f) \geq 0$ 、(2) $I_n(g; f) = 0 \Leftrightarrow g(S) = f(S)$ の性質があるため、K-L 情報量 $I_n(g; f)$ の値が小さいほど、モデル $f(S)$ は真のモデル $g(S)$ に近いと考えられる。

本節の分析も、オプションの満期時点（15 営業日後）のみにおけるリスク中立確率密度関数 $f(S)$ と実現株価から得られる分布 $g(S)$ との近さ（株価予測力）を検証するだけでなく、ラティスモデルのメリットを十分に生かして満期までのいくつかの各営業日についても検証する。ここで、実現株価から得られる分布 $g(S)$ の導出法を具体的に示す。起点（0 営業日）から分析対象となる各営業日までの実現株価から求めた日次リターンに関するモーメントを 4 次（平均 μ 、標準偏差 σ 、歪度 s 、超過尖度 k ）まで求め、佐々木ら¹⁷⁾ や Lee ら¹⁸⁾ で利用している Edgeworth 展開式（式 (9)）に代入することで、実現株価から得られる分布 $g(S)$ を導出する。ここでの分析はモーメントを求める際にデータ数が必要であるため、11 営業日から 15 営業日までを対象とした。よって、本研究では、59 個のオプションデータを用いるので、 5×59 個の K-L 情報量が得られる。

$$g(S_n^i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \left(1 - \frac{s}{3!}(3z - z^3) + \frac{k}{4!}(3 - 6z^2 + z^4) \right) \quad (9)$$

$$z = \frac{\ln\left(\frac{S_n^i}{S_0^1}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (10)$$

ここで、 S_0^1 は起点（0 営業日）の株価を、 t は各営業日までの日数（ $t = 11, 12, \dots, 15$ ）を表す。

4. 実証分析

4.1 データと分析設定

実証分析データは、2003 年 6 月から 2008 年 4 月満期の計 59 期間の日経 225 オプション市場の満期までの期間が 5, 10, 15, 20 営業日のコールオプション・プットオプションを使用する。実現株価としては、ラティスの 1, 2, \dots , 14 営業日に対応する株価には日経 225index の終値を、15 営業日に対応する株価にのみ SQ 値（Special Quotation）を用いた。分析設定として、最適化ツールは Microsoft(R) Excel2003 のソルバ、ラティスの数は 200 ラティス、分析対象期間の大半がゼロ金利政策下にあったため、無リスク金利 r は 0%とした。

4.2 オプション評価モデルのオプション市場価格へのフィッティングに関する分析結果と考察

残存期間が 5 営業日、10 営業日、15 営業日、20 営業日において、権利行使価格別にオプションモデル価格とオプション市場価格との絶対誤差の平均（59 セットに関する平均）をとったものを、それぞれ、図 6、図 7、図 8、図 9 に示した。いずれの図からも、オプション評価モデルのオプション市場価格へのフィッティングは、良いものから順に 5 パラメータモデル、3 パラメータモデル、2 パラメータモデル、1 パラメータモデルであることが分かる。モデルのパラメータ数が増加するに従ってモデルが柔軟になるためフィッティングの精度は高まるのであるが、2 パラメータモデルから 3 パラメータモデルへ拡張する際に大幅な精度の改善が見られる。その理由は、ローカル・ボラティリティが分布のスキューをどの程度表現できるかにある。2 パラメータモデルは、分布のスキューを表すことができるモデルではあるが、大きなスキューには対応できない。それは、大きなスキューを表現する際には、パラメータ b が負の場合に関数形の片端に収束性がないため、ラティス下端においてボラティリティが急増し、株価が負となる問題が発生するからである。これに対して、3 パ

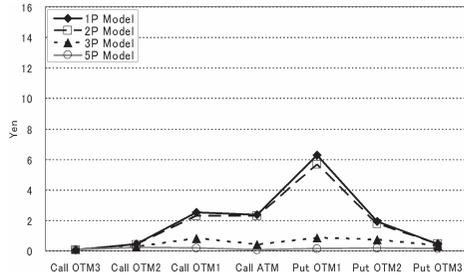


図 6 5 営業日の絶対誤差平均

Fig. 6 The average absolute error of 5 business days.

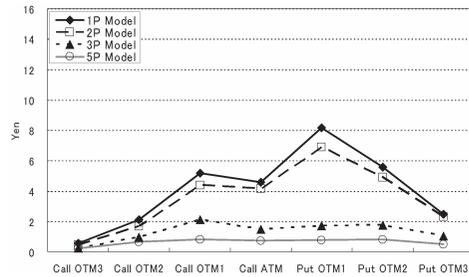


図 7 10 営業日の絶対誤差平均

Fig. 7 The average absolute error of 10 business days.

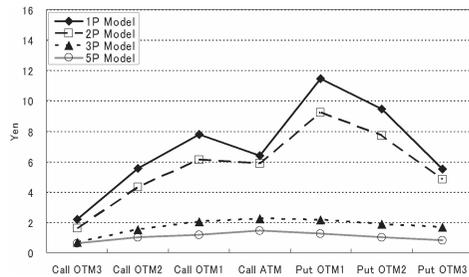


図 8 15 営業日の絶対誤差平均

Fig. 8 The average absolute error of 15 business days.

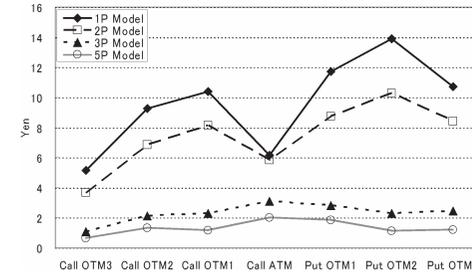


図 9 20 営業日の絶対誤差平均

Fig. 9 The average absolute error of 20 business days.

ラメータモデルでは、関数の両端において収束性を持つ関数形を採用しており、柔軟にスキューを表現することができる。5パラメータモデルのフィッティング精度が3パラメータモデルよりもさらに改善した理由は、5パラメータモデルが3パラメータモデルの関数形に加えて分布の尖度を表現することができる関数形を導入しているためであると考えられる。

オプションの残存期間が長くなるに従って、オプションの満期における株価が現在の株価から乖離する可能性が大きくなる、つまり、満期における株価分布の裾は厚くなるため、アウト・オブ・ザ・マネー・オプションの価格は大きくなる。このときオプション市場価格に内在する満期におけるリスク中立分布を的確に表現可能なモデルであるか否かが明確に現れる。実際、図6から図9におけるCallOTM3とPutOTM3に着目すると、残存期間が5営業日でオプション価格自体が小さい場合には、図6のようにモデル間で絶対誤差平均にほとんど差が見られない。これに対して、残存期間が20営業日でOTM3オプションでもオプション価格が相応の大きさになってくると、図9のようにモデル間で絶対誤差平均に大きな差が現れる。つまり、残存期間が20営業日まで長くなると、CallOTM3やPutOTM3のようなアウト・オブ・ザ・マネー・オプションであっても、ローカル・ボラティリティモデルを1パラメータモデルから5パラメータモデルへと拡張する必要性を認識することができる。

上記の分析から、市場で観測可能なプレーンバニラ・オプションの価格情報を可能な限り反映させてエキゾチック・デリバティブの価格付けを行うためには、1パラメータモデルや2パラメータモデルでは不適切であることが分かったため、以下の分析は、3パラメータモデルと5パラメータモデルに焦点を当てて行う。

4.3 フィッティング精度のバリア・オプション評価への影響に関する分析結果と考察

ここでは、3パラメータモデルと5パラメータモデルのフィッティング精度の違いによって、アップ・ノックアウト・バリア・オプション価格（権利行使価格は、CallATMとする）にどの程度の差異が生じるかについて検討する。紙面の制約のため、2004年5月満期と2005年7月満期の残存期間が15営業日の上場オプション価格から推定したラティス（式(4)の目的関数で表される3パラメータモデルと5パラメータモデルのフィッティング精度は2004年5月満期においてそれぞれ0.128, 0.128, 2005年7月満期においてそれぞれ0.517, 0.018である）を用いて、モデル間でのバリア・オプションの価格差を検証する。この検証に先立って、3パラメータモデルと5パラメータモデルに基づくオプションモデル価格（2.3節のキャリブレーション法を用いてオプション市場価格にフィットさせたもの）から導出したインプライド・ボラティリティと現実のインプライド・ボラティリティを比較し、各モデルがインプライド・ボラティリティのスキューやスマイルをどの程度とらえることができたかについて確認する。

モデルに基づくインプライド・ボラティリティと現実のインプライド・ボラティリティとの比較を2004年5月満期と2005年7月満期に関して、それぞれ図10と図12に示した。いずれの図も横軸にオプションの権利行使価格（PutOTM3, PutOTM2, PutOTM1, CallATM, CallOTM1, CallOTM2, CallOTM3）、縦軸にインプライド・ボラティリティの水準を示した。オプション市場価格へのフィッティング精度が3パラメータモデル、5パラメータモデルともに比較的良好かつ差がない、2004年5月満期では、図10を見るといずれのモデルに基づくインプライド・ボラティリティカーブも現実のインプライド・ボラティリティカーブにきわめて近いことが確認できる。また、2004年5月満期における現実のインプライド・ボラティリティカーブは、スマイル現象が見られず、権利行使価格が上昇するにつれて緩やかにインプライド・ボラティリティが低下するような弱いスキューが見られる。現実のインプライド・ボラティリティカーブがこのような場合において、オプション評価モデルは3パラメータモデルで十分であり、5パラメータモデルとして新たに付け加えた関数形 $d(1 - \text{sech}(ex))$ の効果は見られない。このため、両モデルに基づくラティスの形状はほとんど同じものとなる。事実、図11に示すように、バリア・オプション価格のモデル間での差異はほぼ0である。

2005年7月満期では、5パラメータモデルのフィッティング精度がきわめて良いのに対し、3パラメータモデルのフィッティング精度は芳しくない。2005年7月満期では、図12を見ると5パラメータモデルに基づくインプライド・ボラティリティカーブは現実のインプ

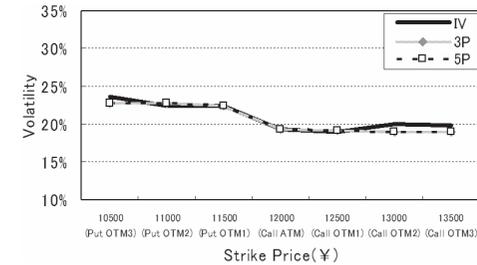


図10 インプライド・ボラティリティ (2004年5月満期)
Fig. 10 Implied Volatility (At the maturity of May, 2004).

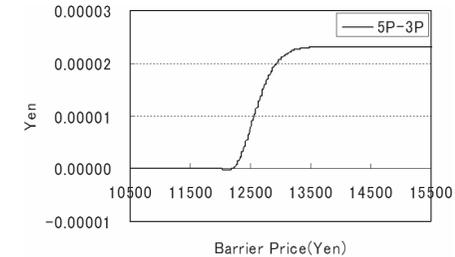


図11 バリア・オプション価格差 (2004年5月満期)
Fig. 11 Price difference in barrier option (At the maturity of May, 2004).

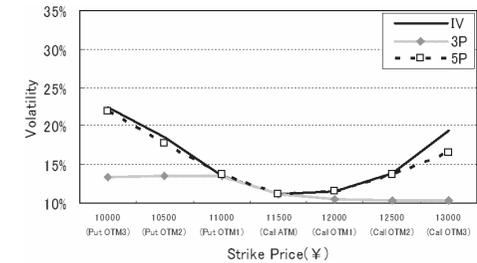


図12 インプライド・ボラティリティ (2005年7月満期)
Fig. 12 Implied Volatility (At the maturity of July, 2005).

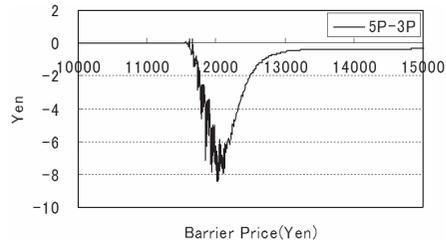


図 13 バリア・オプション価格差 (2005 年 7 月満期)

Fig. 13 Price difference in barrier option (At the maturity of July, 2005).

ライド・ボラティリティカーブをかなり正確にとらえているのに対し、3パラメータモデルに基づくインプライド・ボラティリティカーブはプット側、コール側を問わず ATM から権利行使価格が離れるに従って現実のインプライド・ボラティリティカーブからかなり乖離することが確認される。また、2005年7月満期における現実のインプライド・ボラティリティカーブには強いスマイル現象が見られ、権利行使価格が ATM から乖離するに従って急速にインプライド・ボラティリティが増加する。現実のインプライド・ボラティリティカーブがこのような場合には、オプション評価モデルは3パラメータモデルでは不十分であり、5パラメータモデルとして新たに付け加えた関数形 $d(1 - \text{sech}(ex))$ が効果的となる。この場合には、5パラメータモデルに基づくラティスの形状は3パラメータモデルのものと比較すると、現在の株価から離れるに従ってボラティリティが大きくなる(ラティスの幅が大きくなる)。つまり、満期までに株価がバリア・オプションのバリア水準をヒットしてオプションの権利が消滅する可能性が高くなる。事実、図13に示すように、バリアの水準によっては、3パラメータモデルに基づくバリア・オプションの価格を8円程度も5パラメータモデルに基づく価格より割高に評価してしまうことになる。

4.2節と本節の分析結果は、1章で述べた市場で観測可能なプレーンバニラ・オプションの価格情報を可能な限り反映させてエキゾチック・デリバティブの価格付けを行うという観点からは5パラメータモデルが適切であることを示唆している。それでは、5パラメータモデルに基づくラティスは株価予測力の観点から3パラメータモデルに基づくラティスよりも望ましいものであろうか？ この問いに対する実証分析結果と考察を次の4.4節から4.6節で採り上げる。

4.4 尤度基準に基づく株価予測力の検証結果と考察

本研究における5パラメータモデルは3パラメータモデルを完全に含む形で構築してい

表 3 尤度基準に基づく株価予測力の検証結果

Table 3 Verification result of forecasting ability based on likelihood.

Log Likelihood							
maturity	3P	5P	5P-3P	maturity	3P	5P	5P-3P
03/06	-122.5	-122.1	0.4	05/12	-132.6	-132.2	0.4
03/07	-114.7	-115.7	-1.0	06/01	-142.1	-142.2	0.0
03/08	-103.1	-103.1	0.0	06/02	-122.4	-122.4	0.0
03/09	-108.5	-108.5	0.1	06/03	-110.6	-110.5	0.0
03/10	-120.3	-119.9	0.5	06/04	-124.1	-124.0	0.1
03/11	-108.6	-109.3	-0.7	06/05	-106.7	-106.6	0.1
03/12	-110.0	-110.1	-0.1	06/06	-118.6	-118.4	0.1
04/01	-107.6	-108.1	-0.5	06/07	-108.9	-108.8	0.1
04/02	-106.9	-107.4	-0.5	06/08	-114.7	-115.3	-0.7
04/03	-120.0	-120.0	0.0	06/09	-105.7	-105.7	0.0
04/04	-109.8	-109.6	0.2	06/10	-109.8	-110.0	-0.2
04/05	-114.4	-114.4	0.0	06/11	-107.5	-107.0	0.5
04/06	-105.1	-105.0	0.1	06/12	-107.1	-106.9	0.2
04/07	-111.5	-111.4	0.0	07/01	-103.1	-102.7	0.4
04/08	-102.0	-100.7	1.4	07/02	-104.5	-104.4	0.1
04/09	-105.8	-105.8	0.0	07/03	-115.5	-115.3	0.2
04/10	-100.8	-100.8	0.0	07/04	-105.9	-105.3	0.5
04/11	-98.9	-98.8	0.1	07/05	-105.4	-105.4	0.0
04/12	-101.1	-101.3	-0.2	07/06	-110.6	-111.0	-0.3
05/01	-108.9	-109.2	-0.3	07/07	-105.0	-103.7	1.3
05/02	-97.3	-97.2	0.1	07/08	-131.5	-133.9	-2.4
05/03	-98.2	-98.1	0.1	07/09	-112.7	-112.5	0.2
05/04	-95.0	-94.6	0.4	07/10	-114.4	-115.2	-0.8
05/05	-96.6	-96.3	0.3	07/11	-115.7	-115.9	-0.2
05/06	-101.5	-101.5	0.0	07/12	-124.4	-124.8	-0.4
05/07	-91.2	-91.6	-0.4	08/01	-116.5	-116.9	-0.4
05/08	-106.5	-107.2	-0.7	08/02	-124.4	-124.3	0.1
05/09	-104.1	-105.1	-1.0	08/03	-118.9	-119.2	-0.3
05/10	-109.2	-109.2	0.0	08/04	-113.6	-113.6	0.0
05/11	-120.4	-120.3	0.1	Average	-110.7	-110.8	-0.1

るため、5パラメータモデルのオプション市場価格へのフィッティングが3パラメータモデルよりも上回る部分は、ローカル・ボラティリティの関数形 $d(1 - \text{sech}(ex))$ の貢献によるものである。ここでの検証は、尤度の基準を用いて、ローカル・ボラティリティの関数形 $d(1 - \text{sech}(ex))$ の有無が、オプション市場価格から抽出されたりリスク中立分布の満期までの株価予測力に影響が生じるかについて、ラティスモデルにより確認することである。表3

表 4 Berkowitz 検定に基づく株価予測力の検証結果

Table 4 Verification result of forecasting ability based on Berkowitz test.

Business Day	p-value			
	LR3		LR1	
	3P Model	5P Model	3P Model	5P Model
11	0.0011	0.0009	0.6712	0.7081
12	0.0016	0.0013	0.8618	0.8717
13	0.0070	0.0059	0.2467	0.2460
14	0.0655	0.0607	0.3299	0.3318
15	0.1075	0.1002	0.3091	0.3139

は、分析対象期間における 59 通りの満期について、3 パラメータモデルと 5 パラメータモデルの対数尤度および両者の差を示したものである。対数尤度自体は、3 パラメータモデル、5 パラメータモデルともに満期によって -140 から -90 程度まで幅広く分布するが、両者の差異は平均で 0.1 程度、最大でも 2.4 であり、尤度を基準とした場合には両モデルでほとんど予測力の差異を確認することはできなかった。

4.5 Berkowitz 検定に基づく株価予測力の検証結果と考察

検証の目的は 4.4 節の尤度基準の場合と同じであるが、尤度ではなく Berkowitz 検定を用いて検証する。また、4.4 節のように各満期のオプションについて満期までの各時点におけるリスク中立分布の株価予測力を検証するのではなく、満期までのある営業日に焦点を当てて、その営業日に関する 59 セットの実現株価とリスク中立分布から株価予測力を検証することになる。表 4 を見ると、 LR_1 、 LR_3 の P 値は 3 パラメータモデルと 5 パラメータモデルでほとんど差がないことが分かる。有意水準として 1% を採用する場合、 LR_1 の P 値からいずれの営業日に関しても株価推移の独立性は棄却されない。このことと LR_3 の P 値から株価予測力に関しては、いずれのモデルに関しても 14 営業日、満期に関しては株価予測力が確認されるが（株価予測力があることを棄却できないが）、11 営業日から 13 営業日に関しては株価予測力が確認できないという結果となった。このことから、オプション市場価格から抽出されるリスク中立分布の予測力は、オプションの満期におけるリスク中立分布の予測力が最も高く、ラティス上を 14 営業日、13 営業日と満期から遠ざかるに従ってリスク中立分布の予測力が弱まっていくことが確認される。このことは、オプションの満期におけるリスク中立分布から、そのオプションの市場価格が決定されることから肯ける。

4.6 Kullback-Leibler 情報量に基づく株価予測力の検証結果と考察

Kullback-Leibler 情報量を利用した検証が尤度基準や Berkowitz 検定に基づく検証と大

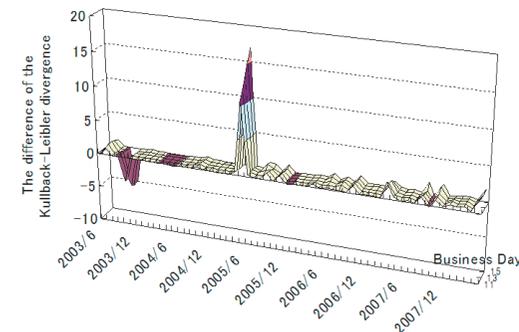


図 14 K-L 情報量の差 (3P-5P)

Fig. 14 The difference of the K-L divergence (3P-5P).

きく異なる点は、起点 (0 営業日) から対象となる営業日までの株価推移から日次の株価リターンの 4 次モーメントまで求め、この株価推移に基づく分布とリスク中立分布との近さを検証していることである。この基準を採用すれば、各限月のオプションの各営業日におけるリスク中立分布の実現株価予測力を個別に検証することが可能になる。このような検証は、尤度基準や Berkowitz 検定では不可能であった。なぜなら、尤度基準では、起点 (0 営業日) から 15 営業日までの実現株価のパスに基づいて株価予測力の検証を行うため、各営業日におけるリスク中立分布と実現株価から確率密度 (尤度を計量する基となる) を求め、このような確率密度を 15 営業日分掛け合わせて得られる尤度を基準としているため、満期までのすべての営業日におけるリスク中立分布の実現株価予測力が合成された形で検証されるからである。このことは、利用するデータセットと手法は異なるが、Berkowitz 検定にもあてはまることである。

横軸に 59 個あるオプションの満期、奥行きに分析対象となる営業日、縦軸に K-L 情報量の差 (正の値は 5 パラメータモデルの方が 3 パラメータモデルより株価予測力があることを表す) をとったものを図 14 に示した。また、図 15 には、図 14 の情報を縮約して、59 個あるオプションの満期における K-L 情報量の平均値を 11 営業日から 15 営業日に関して示した。図 14 から 59 個の満期の中で 50 個程度がプラスの値をとること、また、図 15 からは対象となるいずれの営業日においても 5 パラメータモデルの K-L 情報量が 3 パラメータモデルの 3 分の 2 程度であることが分かり、5 パラメータモデルの方が概して 3 パラメータモデルよりも実現株価の予測力が高いことが確認される。つまり、オプション市場価格が

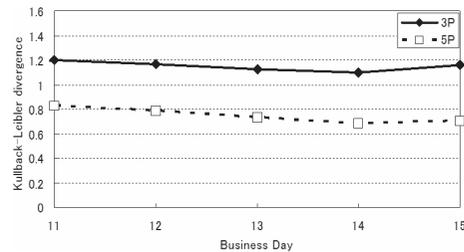


図 15 各営業日の K-L 情報量平均値

Fig. 15 The average of the K-L divergence of each business days.

らリスク中立分布を抽出する際にローカル・ボラティリティの関数形に $d(1 - \text{sech}(ex))$ を加えることで抽出されたリスク中立分布の満期までの株価予測力は概して高まること分かった。実現株価リターンのモーメントから Edgeworth 展開を利用して株価分布を導出し、リスク中立分布との近さを K-L 情報量でとらえるアプローチは、株価予測力の検証手法として有効であると考えられる。

図 14 をより詳細に見ると、24 番目の満期に関しては、K-L 情報量の差が最大（15 程度であり 5 パラメータモデルの整合性が 3 パラメータモデルよりも良い）となっている。この満期におけるフィッティング精度を表す目的関数の差は 17 程度もあり、オプション市場価格に内在する情報を正確に抽出するには 3 パラメータモデルのリスク中立分布では不十分であり 5 パラメータモデルのリスク中立分布が必要になること、つまり、ローカル・ボラティリティの関数形に $d(1 - \text{sech}(ex))$ を加えることがきわめて効果的であることが分かる。これに対して、5 番目の満期に関しては、K-L 情報量の差が最小（-5 程度であり 3 パラメータモデルの株価予測力が 5 パラメータモデルよりも良い）となっている。この満期におけるフィッティング精度を表す目的関数の差は 18 程度もあり、5 パラメータモデルのフィッティング精度が 3 パラメータモデルよりかなり良い。このように、5 パラメータモデルは 3 パラメータモデルよりもオプション市場価格に内在する情報を正確に抽出しているにもかかわらず実現株価の予測力が劣るということは、そもそもオプション市場価格に株価予測のための情報がなかったことを意味する。先に述べたように、オプション市場価格から抽出されるリスク中立分布には概して株価予測力が内在している。しかし、つねにローカル・ボラティリティの関数形に $d(1 - \text{sech}(ex))$ を加えてまでリスク中立分布を抽出するに値するほどの株価予測力が内在しているとは限らないことは認識しておく必要がある。

5. まとめと結語

本研究では、まず、Li¹⁾ で導入されている 3 パラメータモデルを完全に含む形の 5 パラメータモデルを提案し、既存の BS モデルや CEV モデルも含めてオプションモデル価格がどの程度までオプション市場価格とフィットすることができるかについて検証した。そして、3 パラメータモデルと 5 パラメータモデルは他のモデルと比較するとフィッティングの精度が高いことが分かった。3 パラメータモデルと 5 パラメータモデルとの比較から、3 パラメータモデルのローカル・ボラティリティの関数形に $d(1 - \text{sech}(ex))$ を加えることによりフィッティングの精度がさらに高まることが分かり、市場で観測可能なプレーンバニラ・オプションの価格情報を可能な限り反映させてエキゾチックオプションを価格付けする観点からはこの関数形は必要不可欠であることが分かった。

次に、3 パラメータモデルと 5 パラメータモデルを、オプション市場価格から抽出したリスク中立分布の株価予測力の観点から比較した。比較に際して、既存研究でも用いられた尤度基準や Berkowitz 検定に加えて、新たに Kullback-Leibler 情報量を利用した基準を提案した。尤度基準や Berkowitz 検定では、リスク中立分布とこれに対応する株価とのセットから求まる確率密度を様々な営業日（または満期）において導出したものを合成する形でリスク中立分布の実現株価に関する予測力を計量しているため、モデル間における株価予測力の相違を明確に判別することができなかった。これに対して、Kullback-Leibler 情報量を利用した基準では、各限月のオプションの各営業日における実現株価の分布が対応するリスク中立分布にどれだけ近いかにについて検証することができるため、モデル間における株価予測力の相違をはっきりと確認することができた。概して、5 パラメータモデルの方が 3 パラメータモデルよりも株価予測力は高く、株価予測力の観点からも 3 パラメータモデルのローカル・ボラティリティの関数形に $d(1 - \text{sech}(ex))$ を加えることの有用性が分かった。

参考文献

- 1) Li, Y.: A new algorithm for constructing implied binomial trees: does the implied model fit any volatility smile?, *Journal of Computational Finance*, Vol.4, No.2, pp.68-95 (2000/2001).
- 2) Black, F. and Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol.81, pp.637-654 (1973).
- 3) Dupire, B.: Pricing with a smile, *Risk*, pp.18-20 (Jan. 1994).
- 4) Derman, E. and Kani, I.: Riding on a smile, *Risk*, pp.32-39 (Feb. 1994).

- 5) Rubinstein, M.: Implied Binomial Trees, *The Journal of Finance*, Vol.49, pp.771–818 (1994).
- 6) Heston, S.L.: A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, *Review of Financial and Studies*, Vol.6, pp.327–343 (1993).
- 7) Merton, R.C.: Option Pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, Vol.3, pp.125–144 (1976).
- 8) Hoshika, H. and Miyazaki, K.: Which Deterministic Volatility Model Fits Market Price Exactly? Evidence from NIKKEI225 Option Market, *Journal of Japan Industrial Management Association*, Vol.59, No.2, pp.451–458 (2008).
- 9) Bliss, R.R. and Panigirtzoglou, N.: Option-Implied Risk Aversion Estimates, *Journal of Finance*, Vol.59, pp.407–446 (2004).
- 10) Liu, X., Shackleton, M.B., Taylor, S.J. and Xu, X.: Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions, *Journal of Banking and Finance*, Vol.31, pp.1501–1520 (2007).
- 11) Breeden, D.T. and Litzenberger, R.H.: Prices of State-contingent Claims Implicit in Option Prices, *Journal of Business*, Vol.51, pp.621–651 (1978).
- 12) Berkowitz, J.: Testing density forecasts with applications to risk management, *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol.19, pp.465–474 (2001).
- 13) 小西貞則, 北川源四郎: 情報量基準 シリーズ予測と発見の科学 2, pp.27–29, 朝倉書店 (2004).
- 14) Kullback, S. and Leibler, R.A.: On information and sufficiency, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol.22, pp.79–86 (1951).
- 15) 宮崎浩一: Box-Cox 変換とオプション評価, *応用統計学*, Vol.34, No.2, pp.75–97 (2005).
- 16) Dumas, B., Fleming, J., Whaley, R.E.: Implied Volatility Functions: Empirical Tests, *The Journal of Finance*, Vol.LIII, No.6, pp.2059–2105 (1998).
- 17) 佐々木豊史, 宮崎浩一, 野村哲史: Edgeworth 展開に基づくオプション評価—原資産収益率が Merton の Jump-Diffusion モデルに従う場合, *応用統計学*, Vol.35, No.2, pp.113–128 (2006).

- 18) Lee, P., Wang, L. and Karim, A.: Equity derivatives: Index volatility surface via moment-matching techniques, *Risk*, Vol.6, Part12, pp.85–91 (Dec. 2003).

(平成 20 年 8 月 13 日受付)

(平成 20 年 10 月 1 日再受付)

(平成 20 年 10 月 14 日採録)



回瀬 純治

昭和 61 年生・平成 17 年電気通信大学システム工学科入学・現在に至る。



宮崎 浩一

昭和 42 年生・平成 12 年筑波大学大学院経営・政策科学研究科博士課程修了・博士(経営学)。電気通信大学システム工学科専任講師等を経て、平成 19 年度から電気通信大学システム工学科准教授。現在に至る。日本オペレーションズ・リサーチ学会, JAFEE, 日本応用数理学会, 応用統計学会等各会員。



岡本 雅生

昭和 60 年生・平成 20 年電気通信大学システム工学科卒業。同年電気通信大学大学院システム工学専攻修士課程入学。現在に至る。