

ノードへのフロー入力調整を含むネットワークにおける プライシングのカオス性変動の解析とその抑制

池田 欽一^{†1} 時永 祥三^{†2}

サービスや企業活動を構成要素とするネットワークにおける変動の伝播を解析し、さらにこれらを抑制する研究がなされている。これまでの研究では、単独のノードの場合に入力フローをノード状況に応じて調整するモデルが議論され、待ちコストであるプライシングにおいてカオス性変動が発生することが示されている。しかしながらこれらのモデルは、単独のノードのモデル解析であり、有効性の範囲も限定されている。本論文では、一般化したネットワーク構成のノードを仮定し、ノードでの入力調整のメカニズムを導入した場合のノードにおけるプライシングのカオス性変動の発生と、システムのパラメータとの関係を分析する。同時に、このような確定的な参加と退去のメカニズムのもとでは、微小な入力を加えることによりカオス性変動を制御できるので、この方法の有効性を示す。

Analysis of Chaotic Fluctuation of Pricing at Nodes in Network under Imposing Controls for Input Flow and Scheme for theirSuppressions

YOSHIKAZU IKEDA^{†1} and SHOZO TOKINAGA^{†2}

Current researches emphasize the suppressions of fluctuation of chaos as well as propagation. This paper deals with the analysis of chaotic fluctuation of pricing at nodes in network under imposing controls for input flow and scheme for their suppressions. It is known that if the input to a single node is adjusted depending on the state, chaotic fluctuations are found in the waiting cost (called pricing). In the paper, to extend single-node case, the network structure are assumed where input to nodes are delivered to further nodes, but depending on the states (pricings) of destination nodes. We show the condition for inducing chaotic fluctuation in pricing based on the simulation studies. Simultaneously, by considering the deterministic decision on input and pricing, we utilize the control (suppression) scheme for the chaotic fluctuation base on the control of chaos.

1. ま え が き

サービスや企業活動を構成要素とするネットワークにおける変動の伝播を解析することは、サービス遅延や倒産の連鎖などリスクを回避する課題の解決に有効である^{1),3),4)}。特に現実的な制御に対応するモデルとして、ネットワークを形成するノード（構成要素）の間でのフローのやりとり（入力）を、相手ノードの現在の状況、特に処理を待つことによるコストや時間など（以下ではプライシング：pricing と呼ぶ）に応じて大きさを調整するケースが考察されている^{5)–13)}。このようなケースにおいては、制御なしの場合と比較して、カオス性変動がネットワークを伝播することが分析されており、その解明と変動の抑制が必要となっている。本論文では、ノードへのフロー入力調整を含むネットワークにおけるプライシングのカオス性変動の解析とその抑制について述べる。

これまで古典的なネットワークのフロー解析では、ノードへの入力には特別な制御を加えないことを前提としており、優先権の導入などのフローそのものの性質を利用した範囲に限定されている。しかしながら、近年、サービス施設における混雑の回避をするための制御の1つの方法として、フローが移動する先のノードにおけるプライシングなどの特性を考慮した制御などが導入され、たとえば情報ネットワークにおける入力規制制御などへと活用されている^{5)–13)}。これまでの研究は主としてトラフィック制御の分野でなされており、待ち時間の予測に応じてシステムに参加するか退去するかを客が決定するモデルが提案され、待ち特性にカオス性変動が発生することが示されている^{5),6)}。また実際の応用として、発生する倒産の連鎖分析などがある^{12),13)}。さらに、離散系だけではなく、連続時間系による待ち行列システムの表現を用いてカオス解析が行われている⁷⁾。しかしながらこれらのモデルは、単独のノードを仮定したモデルの解析であり、有効性の範囲も限定されている。

本論文では、入力を調整するノードが単独ではなくネットワーク構造で結合された、やや一般的なモデルを仮定する。このネットワークにおいてノードの間のフローの入力は、フロー移動先のノードにおける待ちコストに反比例して配分されると仮定し、この場合ノードにおけるフロー処理やフローの生成は、確定的であることを仮定している。さらに単独のノードの場合と異なり、フローはネットワーク外へ退去する仮定はとっていない。このよう

^{†1} 北九州市立大学
The University of Kitakyushu

^{†2} 九州大学
Kyushu University

な仮定のもとでも、入力ノードの個数や分岐するノードの個数によって、カオス性変動が発生することとその原因について述べ、性質を分析する。すなわち、フローはネットワークの外部に退去することはないが、一時的に移動先ノードのプライシングに差異が発生することにより、プライシングにおいて単独ノードの場合と同様に、カオス性変動が発生することを論じる。同時に、このような確定的な参加と退去のメカニズムのもとでは、微小な入力を加えることによりカオス性変動を制御できる可能性があることに注目し、この方法によるカオス制御について検討する。

以下、2章では、入力調整の基本モデルとカオス性変動について述べる。3章ではネットワーク構成のモデルにおけるカオス性変動について示し、4章においては、入力フロー制御によるカオス性変動の抑制を述べる。5章においては、シミュレーションによる検討を示す。

2. 入力調整の基本モデルとカオス性変動

2.1 入力調整の基本モデル

本論文でとりあげるネットワーク構成により結合されたノード間のフロー伝播におけるプライシングのカオス性変動について述べる前に、最初に議論を分かりやすくするため、ノードが1つの場合の入力調整についてモデルを説明する^{5)-7),11),13)}。このノードへのフローは、たとえばサービス施設への客の到着とか、商品市場への商品供給などが対応する。このような到着や供給を、以下では単にノードへのフローの入力と呼んでおく。ノードへの入力は、ノードでの待ち時間や処理コストの予測値に関連して調整される。すなわち、ノードでの処理コストに比例してノードへの入力を控える（ノードでの処理コストに反比例して入力する）ことを仮定している。なおプライシングという用語は、本論文を通じて、サービス窓口における待ち時間や処理コストなどを意味するものとして使用する。

いまノードの入り口からフローが供給されており、この供給は単位時間あたり（以下では単位時間は $\Delta t = 1$ であると仮定しておく）について Λ の割合（率）であると仮定し、この値は定数であるとする。このようにフローを個別の客の到着とする離散的な扱いではなく、これらを合計して連続量として表現するモデルを、流体近似モデルと呼ぶ。本論文では、この流体近似モデルを基本としている。

すでに述べたように、フローの入力調整のモデルにおいては、入り口において将来のプライシングの予測値（たとえば待たされる時間など）を用いて、そのままをノードに送るかどうかを判断する。具体的には、プライシングが大きいきときには、 Λ より小さい値（場合によってはゼロとなる）を入力するフローとする。一方、プライシングが小さい場合には、ほ

ぼ Λ の値を入力フローとする。このように、このフロー Λ はノードに対してすべてが供給されるものではなく、この部分が供給されるモデルとなる。この場合に実際に供給されるフローを実入力率と呼んでおき、 λ により表す。実入力率が λ である場合のプライシングの値を $p = W_\mu(\lambda)$ として記述する。

$$p = W_\mu(\lambda). \quad (1)$$

関数 $W_\mu(\lambda)$ の形はあとで議論する。ここでプライシングの値 $W_\mu(\lambda)$ は λ の単調増加関数であり、ノードの処理能力 μ （以下では容量と呼ぶ）に依存する。ただし行動主体は、この p そのものではなく、 p に関する予測値（あとで示す指数平滑化された変数）である π を用いて、次に示す関数に従って実入力率 λ を決定すると仮定する。

$$\lambda = \Lambda F(\pi). \quad (2)$$

$$\lambda = \Lambda F(\pi) = \begin{cases} \Lambda & (0 \leq \pi \leq d \text{ の場合}), \\ \Lambda(a - \pi)/(a - d) & (d \leq \pi \leq a \text{ の場合}), \\ 0 & (\pi \geq a \text{ の場合}). \end{cases} \quad (3)$$

以上の仮定により、もし $\pi = W_\mu[\Lambda F(\pi)]$ の条件が満足されるなら、システムは均衡することになる。

このような前提のもとで、以下ではカオス的な変動現象を分析するため、いくつかの仮定を導入する。その主要な点は、期間の導入とノードでの処理時間に関する仮定である。

(1) 期間

時間軸は長さが $\Delta t = 1$ である期間（period）に分割され、 n を n 番目の期間とした場合に、主体は期間 n において行った予測をもとに、期間 $n + 1$ における行動（具体的には実入力率）を決定する。したがって、上に述べた入力率 λ などの変数は、期間の添え字をつけて表現する。実入力率 λ_n は期間に発生した実入力率であり、 p_n, π_n はそれぞれ、期間 n における実際に発生した待ちコストと、主体が期間 n において行った待ちコストの予測値である。

(2) プライシングの数値

通常待ちシステムを記述するモデルにおいては、その処理時間およびこれにより決まる待ち時間は平均と分散を与えた確率的な挙動をすると仮定される。しかし、本論文で取り扱うようなカオス性の変動の発生を議論する場合には、均衡モデルを仮定する。そのため、ノードにおけるプライシングは確定的な式で与えられると仮定する。このような確定的な式を用いる意義については次節で述べる。

以上の仮定を式によりまとめると、次のようになる。

$$\pi_{n+1} = (1 - \omega)\pi_n + \omega p_n. \quad (4)$$

$$p_n = W_\mu(\lambda_n). \quad (5)$$

$$\lambda_{n+1} = \Lambda F(\pi_{n+1}). \quad (6)$$

ここで、 $0 \leq \omega \leq 1$ である。すなわち、期間 n におけるプライシングの予測値 π_{n+1} は、期間 n における予測値 π_n と、期間 n において実際に発生したプライシングの値 p_n の指数平滑和により与えられる。すでに述べたように、もし実際に発生した p_n と予測値である π_n とがちょうど同じであるならば、システムは均衡点に達する。しかし、一般にはこの両者は一致しないので、プライシング p_n にはカオス性変動となる現象が発生する。

2.2 平均値特性を用いる意義

本論文ではプライシングを観測するシステムをモデル化する場合に、次のような仮定をおいている。

- (1) ノードへのフローの到着は流体として考える。
- (2) ノードの処理特性は確率モデルではなく確定的モデルである。

上に述べた 2 つの仮定は、本論文の前提条件であり、モデルにより解明される有用な点も存在するが、同時にカバーできない範囲もある。しかし、すべての条件を同時にモデルに取り入れることはできないので、目的を限定した議論となる。本論文で解明したい点と、これに関連するモデルの特徴は、以下のようにまとめられる。

- (1) 客などが多数であり個別に区別しないケースを議論する。
- (2) 長期的な視点による分析を行う。
- (3) 均衡しない原因を明らかにする。

これまで行われたプライシングに関連する研究全部を、いくつかに分類するのは容易ではないが、1) インターネットトラヒックの遅延など特定のフローの特性を議論する離散的モデル^{4),8)}、2) 優先権の導入により過度な遅延を回避する方法論の導入^{1),2)}、3) カオス的な変動など安定しない原因を考察するものなどがある^{3),6),7)}。これらの中で、1), 2) は短期的なサービス向上を目的としたものであり、たとえばビデオデータを優先的に伝送するサービスや、QoS (Quality of Service) を保証する契約に必要な機能である。しかしながら、現在では、通信回線の高度化にともない、トラヒックに優先権を導入するメリットが薄れていることや、部分的に優先権を導入しても、他のサブネットワークで遅延が発生しないことを保証できないなどの問題点が指摘され、伝送手順の標準プロトコルを定めるだけにとどまっている側面もある。またトラヒック制御を行う場合のルーティングテーブルの更新の周期についても、伝送特性の統計量を収集する期間が必要とされ、この意味でも長期的な視点に基づ

く制御であるといえ、またこの場合にも遅延の平均時間が問題とされる。

このような考察に基づき、我々は、3) のカオス的な変動が発生する原因を明らかにすることが有効であると考え、またこの視点のもとでは、客を個別に区別しない流体近似モデルと長期的な視点による分析が有効である。このような確定的な式を用いる事例は近年見られるようになり、サービスの短期的な特性よりも長期的な安定性、均衡分析に焦点が当てられるようになったこと、モバイルを含めた通信サービスや金融関連の決済関係の記述モデルなど、均衡することが想定されているケースでも変動が発生する事象に注目することなどがある⁷⁾。この場合、長期的な視点においては、分散などの確率的な変動は重要ではないとの指摘がある。このような理由により、プライシングを決定する式として、待ち行列理論でよく用いられている平均待ち時間の式を援用する。さらに、この場合、均衡することが想定されているケースでも変動が発生する要因として、本論文でも仮定として用いている入力調整がある点に注目する。長期的な視点においては、分散などの確率的な変動は重要ではないとの指摘があり、本来均衡するべきシステムが、なぜ変動が発生するのか、またその性質にカオス性が見られることが、現在の研究のテーマになっている。

2.3 カオス性変動の発生条件

次に、以上のモデルを仮定した場合に、プライシングにカオス性変動が発生する条件を考察する。このカオス性変動が発生する条件については、Stidham らにより簡潔な導出がなされている^{5),6)}。この場合、プライシング生成の基本式、すなわちダイナミクスは関数で与えられているので、いわゆる形式的なカオス、あるいは Li-Yorke の意味でのカオス性変動が発生することが確認できる。すなわち、容量 μ が制限範囲 $\mu_- \leq \mu \leq \mu_+$ にある場合には、プライシング p_n はカオス性変動を示す。ここで、 μ_- 、 μ_+ は、以下の式の 2 つの解である。

$$\mu^2 - \left[\frac{\Lambda a}{a-d} + \kappa \right] \mu + \beta' \frac{\Lambda}{a-d} = 0. \quad (7)$$

$$\kappa = -2(1-\omega) \left[\frac{(1-\beta')\Lambda}{\omega(2-\omega)(a-d)} \right]^{1/2}. \quad (8)$$

この式の導出は付録で示す。ここで、関数 $W_\mu(\lambda)$ は次の式で与えられる。

$$W_\mu(\lambda) = (\mu - \lambda\beta')[\mu(\mu - \lambda)]^{-1}, \quad \beta' = (1 - c_s^2)/2. \quad (9)$$

c_s は処理時間の変動係数であり、 μ はシステムの処理能力に相当する数値である。関数 $W_\mu(\lambda)$ は、いわゆる待ちシステムにおける一般待ち時間分布を仮定した場合の、平均待ち時間であるとしている。このモデルは M/G/1 モデルと呼ばれる。すなわち、入力フローは率が λ

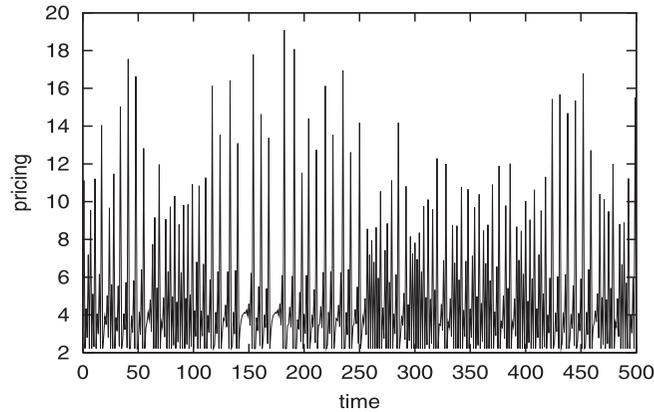


図 1 単独ノードの場合のプライシング時系列の例 ($\mu = 0.55$)

Fig. 1 An example of time series of pricing for case of single node ($\mu = 0.55$).

であるポアソン到着で (記号 M に対応), 処理時間の分布が指数分布から一定値までの分布をカバーする分布 (一般分布) であるような (記号 G に対応), 1 個の窓口 (数値 1 に対応) を仮定する. 処理時間の分布が指数分布である場合 ($c_s = 1$ に対応) を M/M/1 モデルと呼ぶ.

この条件とカオス性変動との関連を, 例題を用いて示す. 図 1 には単独ノードのモデルを仮定した場合に, $\mu = 0.55$ としたケースのプライシング時系列 p_n の例を示している. 図 2 には単独のノードを仮定した場合のプライシングにおける分岐の図を示している. この図より分かるように処理の能力にあたる μ が十分に大きい場合にはプライシング p_n はただ 1 つの値をとり均衡している. すなわち, 最初の時点で μ が大きいときには, プライシング p_n は 1 つの安定点に向かう. 一方, この容量が μ_+ より小さい範囲にあるとき, 変数 p_n はカオス的な挙動を示す. 容量 μ が次第に小さくなるに従って分岐過程が発生し, プライシングは 2 つの値をとるようになる. さらに, 容量 μ が小さくなると, 2 周期の振動から 4 周期振動, さらに 8 周期振動へと移行している. この付近から大きなウィンドウが現れる. さらに, 容量を小さくしていくと 3 周期振動が現れ, 最後には, 再び安定点へと移行する. なお本来なら, 行動主体は $W_\mu(\lambda)$ を正確には知ることができないが, これまでの我々の研究が示すように主体が過去のデータを利用できるとする仮定のもとでは遺伝的プログラミング (Genetic Programming: GP) の手法に基づく関数近似推定を用いると, きわめて正

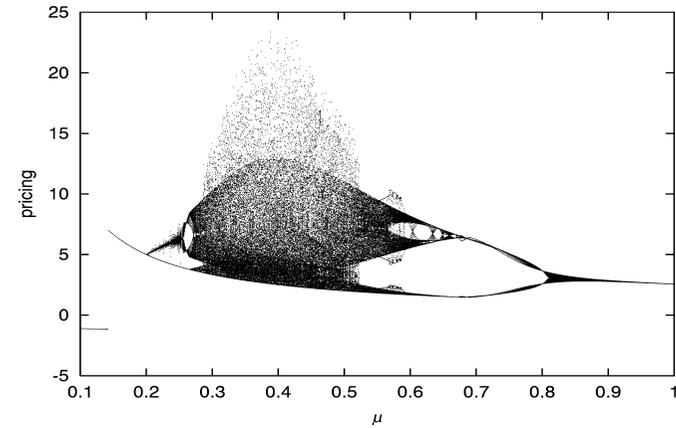


図 2 単独ノードの場合の分岐図の例

Fig. 2 An example of bifurcation diagram for case of single node.

確に $W_\mu(\lambda)$ の形状を知ることができる^{(12),(13),(21),(22)}. したがって以下の議論では, すべての行動主体はノードにおける関数 $W_\mu(\lambda)$ の形状を知りうるかと仮定しておく.

3. ネットワーク構成のモデルにおけるカオス性変動

3.1 ネットワーク構成のモデル

以下では, 本論文で仮定するネットワーク構成の基本モデルについて示すが, 最初にノード間の結合の方法について述べる.

(1) ネットワークの形状

ネットワークはノードと, これらを結合する有向リンクとから成り立っていると仮定し, ノード間の結合でリンクにそってノード間でフローが移動していくとする. ノード間はすべて接続されてはいないと仮定すると同時に, あとで述べるように, フローの移動も移動する先のノードの状況により選択されると仮定する. したがって入力ノード (この個数を N_{in} とする) から流入したフローは, いくつかのノードを経由して, ネットワークの出口である出力ノード (この個数を N_{out} とする) から外部へ出る. この間, フローが経路するノードの段数 (個数) を, 階数と呼ぶことにする. これらの中間ノードにおいて分岐するノードの平均個数を N_b とする. ネットワークの形状を分かりやすく説明するため, 図として描いた場合に左方から右方へとフローは移動すると仮定し, あるノードから見た場合のネットワー

クの左方にあるノードを、上流にあるノードと呼ぶことにする。

(2) ノードでのフロー配分と入力ノードのフロー

このようなネットワーク形状を仮定した場合に、ネットワークの左端（右端）に位置するノードを入力（出力）ノードと呼ぶ。入力ノードからはある確定的な規則に基づいてフローが流入しており、中間のノードを経由して、出力ノードからネットワーク外部へと出ていくと仮定する。なお入力ノードにおける入力フローである Λ については、ネットワークの中間ノードにおいてフローが集中してオーバフローとなり、意味のないケースが発生する可能性があるため、それぞれの入力ノードにおいて $\Lambda = 1/N_{in}$ としておく。中間のノードにおいてはフローが次に移動する先のノードが複数存在するので、移動する予定のノードのプライシングに反比例してフローの配分を決定する。具体的には、式 (3) に従って配分する。この間、フローの消滅や増加は起こらないと仮定する。この仮定は入力ノードにも適用される。前章で述べた単独ノードだけを含む場合においては、過大なプライシングが予測される場合には、システム外部へとフローを退去できることを仮定した。ネットワーク形状を仮定したモデルにおいてフロー入力の大きな違いは、入力ノードからのフローのシステム外部への退去を仮定しないことがある。このようなフローの退去に代わり、移動する予定のノードのプライシングに反比例してフローの配分を決定する。なお、シミュレーションにおいては、入力ノードはこのようなフローの流入だけを管理するノードで、特に処理は行わないと仮定しておく。

(3) プライシング

ノードに流入するフローは、ある処理をされて、次のノードへと流出するが、この場合ノード i におけるフローはプライシングであると仮定する。一般的には、このプライシングについては確率密度関数を用いることを仮定するが、本論文では前章の単独のノードにおける入力調整のモデルにおいて述べたように、平均的な待ちコストを、いわば確定的な値としてフローに割り当てるとしておく。

3.2 ネットワークにおけるカオス性変動発生の原因

前節で述べた構成要素のネットワーク形状の結合を仮定した場合においては、入力ノードからの入力フローの退去がないので、一般的にはカオス性変動は発生しない。すなわち、ネットワークを構成するフローの到着ノードでのプライシングは確定的なモデルを仮定しているので、定常的な状態においては、ノードの階層の間においてはつねに一定のフローが流れており、その待ちコストの間に変動が発生しないならば、定常的な状態（均衡状態）は継続される。このことは、単独のノードにおけるプライシングのカオス性変動発生のケー

スと、大きく異なる点である。

しかしながら、後の章のシミュレーションでも確認できるように、ネットワークのノードにおけるプライシングに、カオス性変動が発生することが分かる。この原因としては、以下のようなことが存在することが分かる。

(1) 入力ノードの個数と入力フローの非同期性

入力ノードの複数でありこれにともなって中間ノードの個数も複数になると、ネットワークへと流入するフローが中間ノードに到達する時刻の間隔にばらつきが発生する、いわゆる入力フローの非同期性が観測される。この結果、中間ノードにおいては、到着するフローが大きい場合と小さい場合との差が発生し、これが原因となってノードにおけるプライシングは安定しなくなる。すなわち、特別なノードへの入力規制や退去を仮定しなくても、入力ノードの個数が多くなると、フローの到着のばらつきが発生し、結果的に入力フローの規制や退去を仮定した場合に近い現象が発生し、これがプライシングのカオス性変動を生成する。

(2) 中間ノードの個数が入力ノード個数より多い場合

中間ノードの平均的な個数が入力ノードの個数より多い場合 ($N_b \geq N_{in}$) には、中間ノードにおいて次の階層のノードに配分されるフローは、入力ノードから流入するフローよりも、相対的に小さくなる。この結果、ノードへ流入するフローの到着する時刻の間隔においては、入力ノードへの流入フローの到着間隔よりも大きくなればばらつきが発生することになる。この現象も、特別なノードへの入力規制や退去を仮定しなくても、中間ノードの個数が多くなると、フローの到着のばらつきが発生し、結果的に入力フローの規制や退去を仮定した場合に近い現象を引き起こすことになる。

3.3 カオス性変動発生条件の近似式

次に、単独ノードの場合においてプライシングにカオス性変動が発生する条件、具体的には μ_+ の値を参考にして、ネットワークにおけるカオス性変動が発生する条件について考察する。表 1 には単独ノードの場合について、ノードにおける処理時間の変動係数を変化させた場合のいくつかの Λ に対する μ_- と μ_+ の値を示している。表 1 においては、 μ_- の値も示しているが、ネットワーク構造を仮定した場合には、きわめて小さな μ はノードでのフローのオーバフローを発生するので、容量 μ は相対的に大きな値をとると仮定し、 μ_+ の値だけを議論する。表 1 において記号 $-$ はカオスではなく、プライシングは一定の値に収束するケースとなることを意味する。カオス性変動が発生する容量の上界 μ_+ は、入力率 Λ の減少関数となる。

表 1 いくつかの Λ に対する μ_- と μ_+ の値
Table 1 Values of μ_- and μ_+ for several Λ .

Λ	$c_s = 1$		$c_s = \sqrt{0.5}$		$c_s = 0$	
	μ_-	μ_+	μ_-	μ_+	μ_-	μ_+
1	0	0.970	0.008	0.929	0.187	0.889
0.8	0	0.741	0.009	0.688	0.214	0.622
0.6	0	0.518	0.112	0.443	-	-
0.4	0	0.303	-	-	-	-
0.2	0	0.104	-	-	-	-

いま $c_s = 1$ と仮定すると $\beta' = 0$ であるので、式 (7) より $\mu_+ = a\Lambda/(a-d) + \kappa$ となる。ここで κ は、 $\sqrt{\Lambda}$ の関数である。本論文では、入力ノードにおける入力フローの入力率は Λ/N_{in} であると仮定しているの、これをそのまま用いると、カオス性変動を誘起する μ_+ の限界の値（これを μ_+^B としておく）は、次式で近似できる可能性がある。すなわち、 μ_+^B の値は入力ノード数 N_{in} に反比例する関係にあると思われる。

$$\mu_+^B = k_0 + k_1 N_{in} + k_2 N_{in}^2, \quad k_1 < 0, \quad k_2 < 0. \quad (10)$$

この式に含まれるパラメータの推定や、近似式の妥当性については、あとのシミュレーションで確認する。

4. 入力フロー制御によるカオス性変動の抑制

4.1 単一ノードの場合のカオス性変動の抑制

ネットワーク結合されたノードにおけるプライシングのカオス振動の制御を議論する前に、まず、単独のノードにおけるフローの入力調整を用いたカオス制御について述べる¹⁹⁾⁻²²⁾。ここで用いる制御の原理は、次のようなものである。

いま、あるカオス性変動をするシステムのダイナミクスが、状態変数 x_n により記述される関数として、次のように離散表現されていると仮定する。

$$x_{n+1} = f_c(x_n). \quad (11)$$

このとき、状態変数の現在の値 x_n にある微小な外力 u_n （ネットワークへの入力と区別して外力という用語にする）を加えて、次の時刻 $n+1$ における状態 \hat{x}_{n+1} を不動点に一致させるような制御を加える。

$$\hat{x}_{n+1} = f_c(x_n + u_n). \quad (12)$$

カオス性変動の場合には、通常、カオス性変動の状態にある状態変数の様子、具体的にはアトラクタとして描かれる状態遷移の軌道は、不動点やリミットサイクルなどの安定的な軌

道に近いので、微小な入力によりカオス性変動の軌道から、これらの安定的な軌道へと移行させることができる。

いま状態変数をプライシング p_n にとった場合には、入力は均衡状態の条件から求めることができる。具体的には、ノードにおけるプライシングが、期間 n にかかわらず均衡する。すなわち一定の値を持続するための条件は、プライシングの予測 π_n と実際に発生するプライシング p_n が一致すること、すなわち $\pi_n = p_n$ である。この式に、式 (9) および式 (8) を代入して、プライシングについて整理し、これを \hat{p}_n として表現すると、次のようになる。

$$\hat{p}_n = (-B + (B^2 - 4C)^{1/2})/2, \quad (13)$$

$$B = [(a-d)\mu - a] - \beta'\mu, \quad (14)$$

$$C = -(a-d) + a\beta'/\mu. \quad (15)$$

したがって、ノードにおける現在のプライシングを強制的にこの値に置き換えると、カオス性変動を制御することが可能である。同様にプライシングではなく、入力するフローに微小な入力を加えて制御することも可能である。

なお、通常のカオス時系列を対象としたカオス制御とはやや異なり、プライシング時系列の場合には、システムの不動点 \hat{x}_{n+1} を見出すことが容易でない場合がある。このような場合には、 $x_{n+1} = f_c(x_n + u_n)$ となるような入力 u_n を探索し、加える制御方法を利用することが可能である（詳細は省略する^{12),13),20)}。

4.2 ネットワーク結合のノードでのカオス制御

次に、ネットワークのノードにおけるカオス性変動に対して微小な外力を印加することにより、変動を抑制する方法について議論する。すでに述べたように、単独のノードの場合には、微小な外力をプライシングに印加することにより、カオス性変動を抑制できることが示されている^{12),13),21)}。また、行動主体が複数であることを仮定した場合に、外力を複数に分割したケースも議論されている^{13),21)}。

しかしながら、本論文で取り扱うようなネットワーク構造を持ち、しかも複数のノードを経由して外部へとフローが出ていくモデルでは、プライシングにおけるカオス性変動を抑制できるための条件は、制限されている。具体的には、次のような制限が加わることが、シミュレーションを通じた検証で明らかになる。

(1) 同時にすべてのノードで外力印加を開始する

ネットワークにおいて、すべてのノードは他のノードと接続されているので、あるノードでのカオス抑制が実現されても、他のノードからカオス性変動がすぐに伝播するので、変

動状態へと復帰する．このようなことを回避するには，同時に，すべてのノードにおいて，カオス抑制を実施する必要がある．

(2) 外力印加は1時刻でなく数時刻継続する

同じような理由により，1つの時刻において1回のカオス抑制をしても，変動をとめることはできない．したがって，複数回（たとえば5回）継続して外力を印加しカオス抑制をする必要がある．この外力の印加回数を， N_c としておく．

(3) 外力はノードへの流入フローを期待値に近づけるように推定

単独ノードの場合には，流入するフローを直接制御することができる（退去させることができる）ので， λ と $W_\mu(\lambda)$ との間の関係式を用いて，不動点を見出すことができる．しかしネットワーク構成の場合には，フローはどのノードにおいても退去しないので，単独ノードの場合に用いた2つの関係式から不動点を見出す方法は使えない．したがって，ノードへの流入フローについて均衡状態が達成される値に近づけるように推定する問題を解き，この解をもとに加える外力を決める．詳細は以下に示す．

もともとは，均衡が達成されるようにフローが配分されていれば，カオス性振動は発生しないので，この条件を求めればよい．具体的には，入力ノードから，それぞれフロー $1/N_{in}$ を流入させた場合，下流ノードにこのフローが配分され，出力ノードから出ていくと仮定した場合の，それぞれのノードに流入するフローの関係が均衡する条件（このときのフローを λ_{opt} としておく）を推定し，このフローの推定値を用いて，ノードにおけるプライシングが $p_{opt} = (\mu - \beta' \lambda_{opt}) / [\mu(\mu - \lambda_{opt})]$ へと移行するように外力を加える．

関係式を簡潔に説明するため，変数の添え字における期間 n を省略して示す．また関数 $W_\mu(\lambda)$ の形状がM/M/1である場合を仮定する．いま，あるノード j からフローが下流に向けて入力率 $\lambda^{u(j)}$ のフローが配分され，下流のノード i ($i = 1, 2, \dots, N_{d(j)}$)にそれぞれ $\lambda^{(ij)}$ だけがいたると仮定する．すなわち，

$$\lambda^{u(j)} = \sum_{i=1}^{N_{d(j)}} \lambda^{(ij)}. \quad (16)$$

下流のノード i から見た上流ノード j は， j が $j = 1, 2, \dots, N_{u(i)}$ の範囲で変化すると仮定する．これらの上流ノードからのフローの合計を下流ノード i で求め，これを $\lambda^{(i)}$ とすると次のようになる．

$$\lambda^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{u(i)}} \lambda^{(ij)}. \quad (17)$$

一方システムが均衡状態にある場合には，それぞれの下流ノード i において次の関係式が成立していることが必要である．

$$\lambda^{(i)} = \Lambda F(p^{(i)}), \quad p^{(i)} = \frac{1}{\mu - \lambda^{(i)}}. \quad (18)$$

ただし $p^{(i)}$ は，ノード i におけるプライシングである．また上流ノード j からのフロー配分の規則は，次のように書くことができる．

$$\lambda^{(ij)} = \frac{\lambda^{u(j)}}{\sum_{i=1}^{N_{d(j)}} \lambda^{(i)}} \lambda^{(i)}. \quad (19)$$

以上において示した関係式を満足するフロー $\hat{\lambda}^{(i)}$ を求めると，それぞれのノード i において均衡点に移行するために設定すべきプライシング $\hat{p}^{(i)}$ が，次の関係式により求まる．

$$\hat{p}^{(i)} = 1/(\mu - \hat{\lambda}^{(i)}). \quad (20)$$

なお式(16)~(20)の関係式を満足するフローは，逐次計算によってだけ求めることができるので，以下のような手順で行い，十分な近似が得られるまで繰り返す．また，これまでの説明では話を簡単にするため上流ノードと下流ノードとして区別したが，入力ノードを除くすべてのノードは，上流ノードでもあり下流ノードでもある．

(1) $\lambda^{(i)}$ についての初期値の設定

乱数により $\lambda^{(i)}$ の初期値を設定する．

(2) $\lambda^{(i)}$ についての新しい計算値

式(17)~(19)よりノードへのフロー配分の新しい値が計算される．すなわち式(19)において右辺に現在の $\lambda^{(i)}$ を代入し，この左辺として得られる $\lambda^{(ij)}$ を求め，この合計値を $\lambda^{(i)}$ のための新しい推定値 $\gamma^{(i)}$ としておく．

(3) $\lambda^{(i)}$ についての更新

次に示す式により $\lambda^{(i)}$ を逐次更新する．

$$\lambda^{(i)} \leftarrow \lambda^{(i)} + c(\lambda^{(i)} - \gamma^{(i)}). \quad (21)$$

ただし c は定数であり、逐次近似が進行するに従って小さな値へと修正する。

5. 応用例

5.1 カオス性変動発生とパラメータとの関係

前にも述べたように、本論文で取り扱うネットワークの形状は図で示した場合に、左から右に向かってリンクの接続がされ、このリンクにそってフローが形成される。ネットワークの中間のノードでは複数のノードへ分岐される。入力、出力および中間のノードの総数を N とする。それぞれのノードどうしの結合は、乱数を用いて構成する。

すでに述べたように、ネットワークの中間ノードにおいてフローが集中してオーバーフローする意味のないケースを除外するため、 $\Lambda = 1/N_{in}$ としておく。なお、入力ノードにおける入力フローは、単位時間に Λ のフローがネットワークに投入されると仮定し、特に行き先のノードのプライシング（これらの合計値）に応じて入力を規制する方法は用いていない。この理由として、ネットワーク全体として見た場合には、1つの大きな確定的なプライシングの式に従って挙動が決められており、入力ノードからの入力フローに対してこのようなプライシングによる調整を実施しても、すぐに安定したフローに収束することがある。

以下では、プライシングにおけるカオス性変動の発生とパラメータとの関係を、シミュレーションによる分析により推定するが、パラメータの範囲を以下のように設定しておく。

- ネットワークのノード総数： $N = 100$
- 入力と出力ノード数： $N_{in} = N_{out} = 2 \sim 10$
- 中間ノードの分岐個数の平均： $N_b \geq N_{in}$
- ノードでの処理容量： $\mu = 0.1 \sim 0.9$
- 変換関数 $\Lambda F(\pi)$ などのパラメータ： $\omega = 0.7, a = 5, d = 1$

図3の上下の図には、 $N_{in} = N_{out} = N_b = 2, \mu = 0.5, c_s = 1$ および $N_{in} = N_{out} = N_b = 5, \mu = 0.4, c_s = 1$ として設定した場合の、あるノードにおけるプライシング p_n の時間変化を示している。図3に示す結果から分かるように、この事例においては当該のノードにおける変数の値は、カオス性変動を示している。なおこのようなカオスの振動は、ネットワークの中のどのノードでも観測される。

図4には $N_{in} = 5$ と設定した場合の分岐図を示している。この図4より分かるように、容量 μ を次第に大きな値から減少させていくに従ってカオス性変動が発生し、この傾向はきわめて小さな容量の値まで持続される。なおすでに述べたように、単独ノードの場合には形式的カオス、あるいは Li-Yorke の意味でのカオスの発生を確認することができるが、本

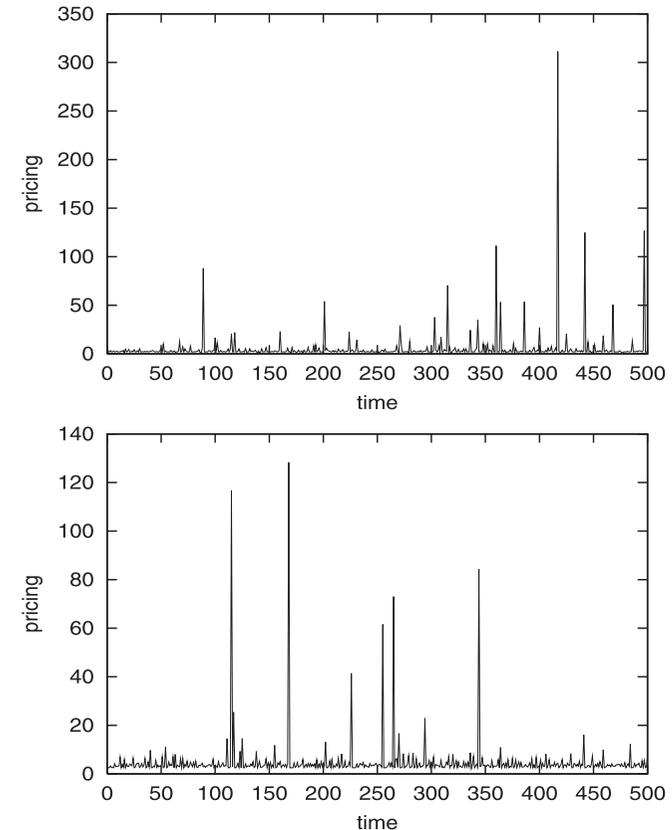


図3 プライシングにおけるカオス性変動の例（上： $N_{in} = 2, \mu = 0.5, c_s = 1$, 下： $N_{in} = 5, \mu = 0.4, c_s = 1$ ）

Fig.3 Examples for chaotic fluctuation for pricings (upper: $N_{in} = 2, \mu = 0.5$, lower: $N_{in} = 5, \mu = 0.4$)

論文で取り扱うようなネットワーク構造を持ったシステムでは、カオス性変動を別の手段により確認することが必要であろう。このようなことから、図5にはネットワーク構成をした場合の、あるノードにおけるプライシングのカオス性変動を、リアプノフ指数を用いて検証している。この図から、およそ μ が $0.25 \sim 0.65$ の範囲でリアプノフ指数が正となり、カオス性を示していることが分かる。

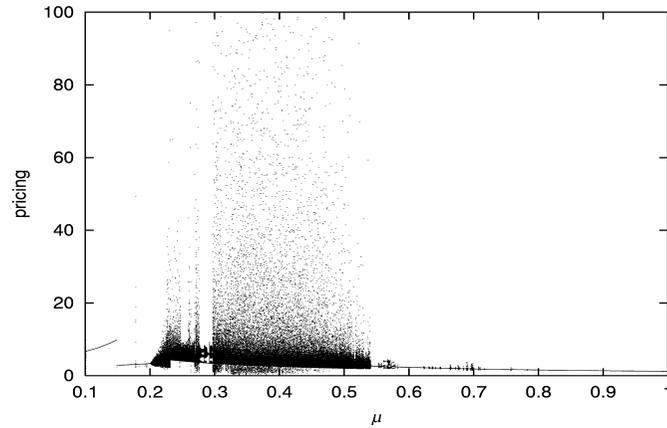


図4 $N_{in} = 5$ としたネットワークの場合のプライシングの分岐図の例
 Fig. 4 An example of bifurcation diagram of pricing for network with $N_{in} = 5$.

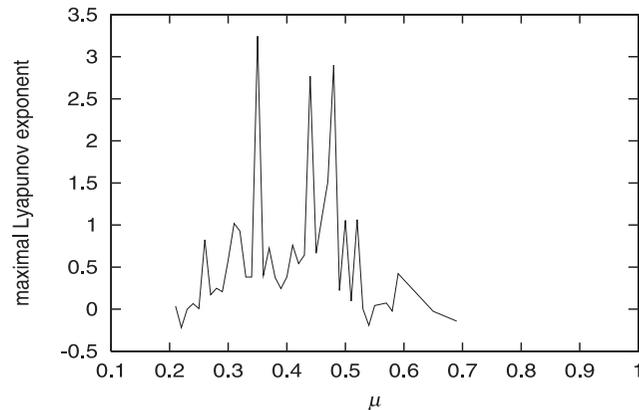


図5 $N_{in} = 5$ としたネットワークの場合のプライシングに対するリアプノフ指数の例
 Fig. 5 An example of Lyapunov exponent of pricing for network with $N_{in} = 5$.

次に、このようなカオス性変動が発生する条件、すなわちカオス性変動が誘発される容量 μ_+ の境界値の近似式である $\mu_+^B = k_0 + k_1 N_{in} + k_2 N_{in}^2$ について、シミュレーションをもとにして推定する。入力ノード数を変化させながらそれぞれの N_{in} の値について、乱数を用い

表2 プライシングのカオスを誘起する境界値 μ_+^B の推定
 Table 2 Estimation of Boundary values μ_+^B for inducing chaotic fluctuation in pricings.

	$c_s = 1$	$c_s = \sqrt{0.5}$	$c_s = 0$
k_0	0.6876 (0.001)	0.6156 (0.001)	0.669 (0.001)
k_1	-0.0558 (0.03)	-0.0105 (0.04)	-0.0014 (0.04)
k_2	-0.0032 (0.06)	-0.0002 (0.05)	-0.0014 (0.05)
ε^B	0.0062	0.0080	0.0031

てネットワークの初期状態を設定し、30回のカオス生成のシミュレーション結果を用いる。近似式の推定には、最小2乗基準のもとで、係数に関する最急降下法による逐次近似を用いている。表2には $N_{in} = N_b = N_{out}$ とした場合の μ_+^B の近似式の係数と、この場合の μ_+^B のついでの相対誤差、すなわち真の値と近似値との差を真の値で割った数値 (ε^B としている)を示している。なお、係数の後ろに示すカッコ内の数値は、係数は t 分布をずらした仮定を採用し、係数がゼロとなる帰無仮説 ($H_0: k_0 = k_1 = k_2 = 0$) のもとで t 検定を行った場合の両側確率を示している。また図6には境界値の近似式 $\mu_+^B = k_0 + k_1 N_{in} + k_2 N_{in}^2$ と実測値との差異の1つの例を図示している。この結果より分かるように、 μ_+^B についての近似は良好であり、容量の境界値はほぼ N_{in} に反比例している。なお、 $N_b > N_{in}$ である場合の推定結果については省略するが、 N_b と N_{in} との差が大きくなるに従って、容量の限界値 μ_+^B は小さくなること示される。

5.2 カオス抑制手法の応用

以下では、プライシングに微小な外力を印加することによりカオス性変動を抑制する方法の有効性を確認するための、シミュレーション結果について述べる。シミュレーションにおいては、特に外力を加える継続時間がどれくらい必要かを推定する点に、ポイントを置いている。なお、このシミュレーションを実施する前に、単独のノードの場合におけるカオス抑制と単独ノードのケースを単純に拡張した場合のネットワーク(これを以下で定義するように、規則的な構成のネットワークと呼んでおく)におけるカオス性振動の発生と、その抑制について述べておく。

単独ノードと単純な拡張モデルにおける制御

いま次のような規則的な構成のネットワークを仮定する。すなわち、入力ノード数と出力ノード数は同じ ($N_{in} = N_{out}$) であるが、中間ノード数も同数であり、しかもそれぞれの段のノード間の結合が完全であるネットワークを仮定する。たとえば $N_{in} = 4$ の場合には、ノード番号で示すと1, 2, 3, 4のノードは5, 6, 7, 8へと結合され、5, 6, 7, 8のノード

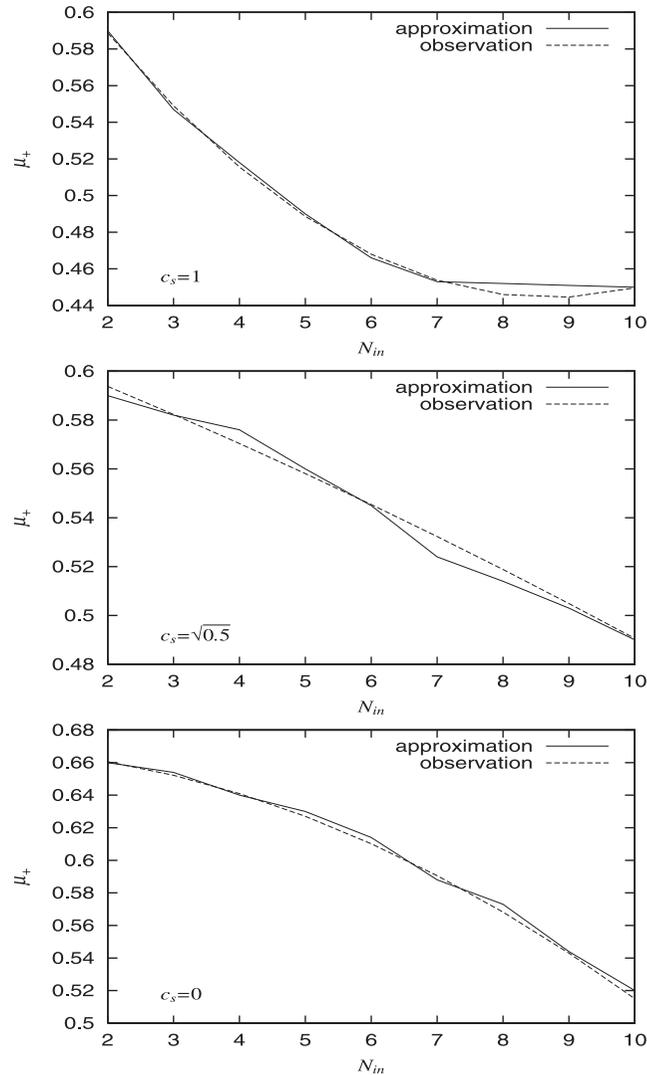


図 6 カオスを誘起する境界値 μ_+^B の推定値と観測値の比較 (上: $c_s = 1$, 中: $c_s = \sqrt{0.5}$, 下: $c_s = 0$)
 Fig. 6 Copmarison of boundary μ_+^B inducing chaotic fluctuation with obereved values (upper: $c_s = 1$, middle: $c_s = \sqrt{0.5}$, lower: $c_s = 0$).

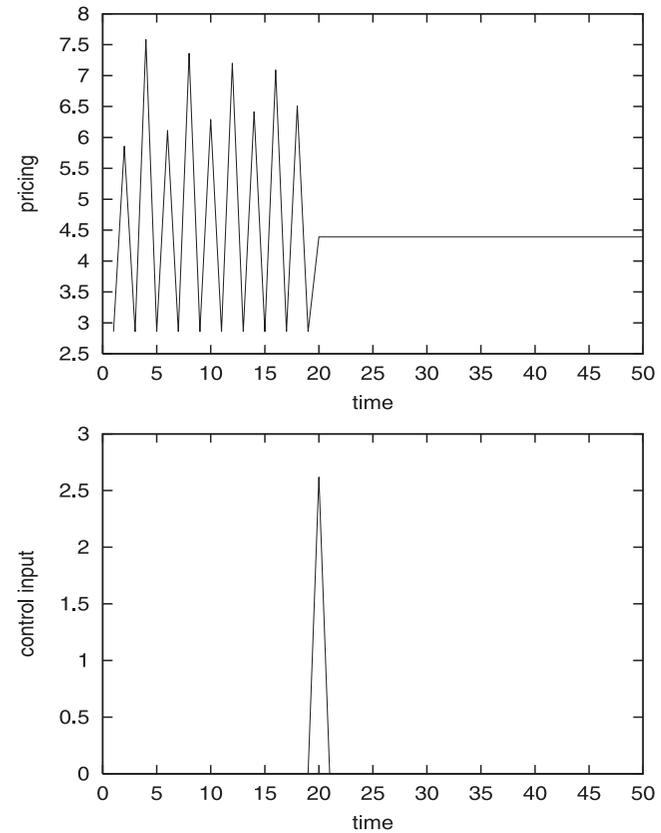


図 7 単独ノードにおけるカオス抑制の例 ($\mu = 0.35$)
 Fig. 7 An example of suppression of chaos for case of single node ($\mu = 0.35$).

ドは 9, 10, 11, 12 へと結合されており, 規則的な形状をなしている. このようなネットワークは, 単独のノードの単純な拡張になっているが, 単独のノードの場合とは異なり, 本論文のネットワーク構成と同様に, 外部へのフローの退去はないとする. しかしながらネットワークは等質であり, 本論文で示すカオス抑制の方法は有効である.

図 7 においては単独のノードの場合 ($\mu = 0.35$) にプライシングに発生したカオス性変動が外力を加えることにより, 抑制されて不動点 (p_f と呼ぶ) に収束していることを示し

ている．付録で述べているように，単独のノードの場合には，不動点が安定である条件は $\omega < 1$ である限りは満足されているので，1 度不動点 p_f に移行するカオス抑制が実施され，これが成功すると不動点から離脱することはない．この外力による抑制を加えない場合には， $p_n > p_f$ であれば期間 $n + 1$ におけるシステムへの入力である λ_{n+1} の値は期間 n における値 λ_n より抑制される（小さくなる）ので，次の時刻には $p_{n+1} < p_f$ となる．逆に $p_n < p_f$ であれば $p_{n+1} > p_f$ となる．すなわち不動点の周辺を移動する軌道に沿って移動を繰り返す．この様子は，連続系ではアトラクタとして描くことができるが，本論文では離散系を対象としているので，このようなアナログで説明できる．

次に図 8 には，単独ノードを単純に拡張した規則的な構成のネットワーク ($N_{in} = 5$, $\mu = 0.6$) における，あるノードのプライシングにおけるカオス性変動の抑制の例を示している．ネットワーク内部のフローの初期値はランダムに設定されており図 8 においては，最初はプライシングにはカオス性変動が見られるが，図 8 の下部に示すような外力を，2 つの時刻だけに限定して外力を印加することにより，この時刻からあとの変動が抑制され，一定の値をとるようになる．このネットワークの場合にも，単独ノードの場合と同様なカオス抑制が可能となり，不動点に移行したあとでは，再びこの不動点から離脱することはない．ネットワーク構成の場合の制約

本論文で仮定しているネットワーク構造は，規則的な構造をしていないため，カオス性振動の抑制について単独ノードや規則的な構成を仮定しているケースとは異なる特性が存在する．具体的には，カオス性変動の抑制について，すでに述べたように次のような 3 つの異なる状況が出現する．

(1) カオス性変動の抑制には数回の外力印加

カオス性変動の抑制には 1 つの時刻ではなく，数回の継続的な外力印加が必要である．

(2) カオス性変動の抑制後は一定値周辺を変動

カオス性変動が抑制されたあとは明確な一定値にはならないで，ある範囲の中で微小な振動をする．

(3) カオス性変動の抑制後のカオスへの復帰

カオス性変動の抑制が完了したあとも，やがて時間の経過とともに，元のカオス性変動へと復帰する．

これらの点が発生する原因としては，ノードの接続が不規則であることに存在する．すなわち，それぞれのノードにおけるカオス抑制のバランスと，時間的なずれが，時間とともに発生しこれが順次拡大して，やがてカオス性変動へと復帰することになる．

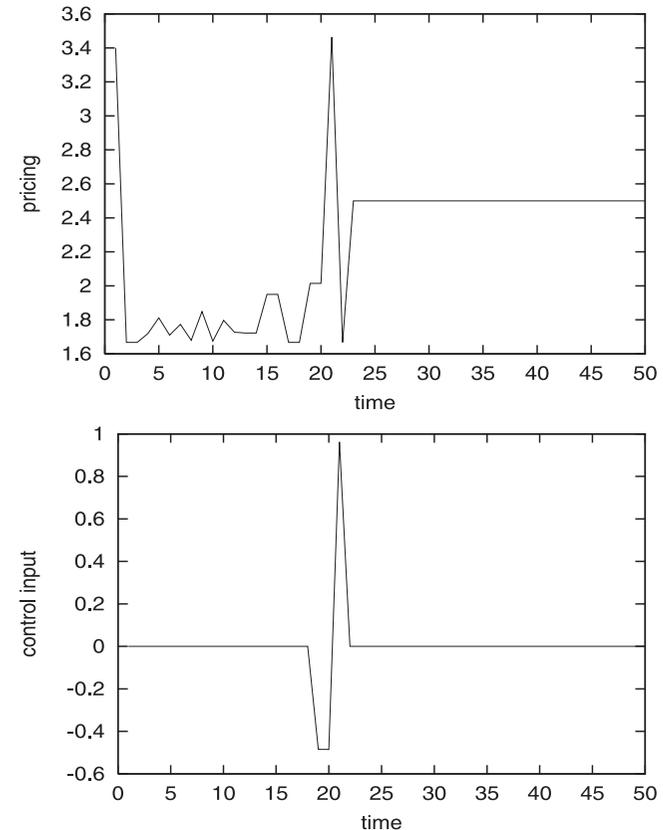


図 8 規則的な構成のネットワークにおけるカオス抑制の例 ($N_{in} = 5$, $\mu = 0.6$)

Fig. 8 An example of suppression of chaos for case of regular structured network case ($N_{in} = 5$, $\mu = 0.6$).

このような特性を示す 2 つの事例を，図 9，図 10 に描いている．

まず図 9 にはネットワークのパラメータを， $N_{in} = 10$, $\mu = 0.45$, $c_s = 1$ と設定した場合の，あるノードにおけるカオス性変動についてカオス制御の方法を用いてこの変動を抑制した事例を示す．図の上は抑制された時系列で，図の下は抑制のためのプライシングへの印加外力の例を示している．この図におけるカオス抑制では，プライシングは不動点に移行し，抑制が完了したあとは，もとのカオス性振動に戻ることはない．一方，図 10 には

33 フロー入力調整を含むネットワークにおけるプライシングの caos 性変動解析と抑制

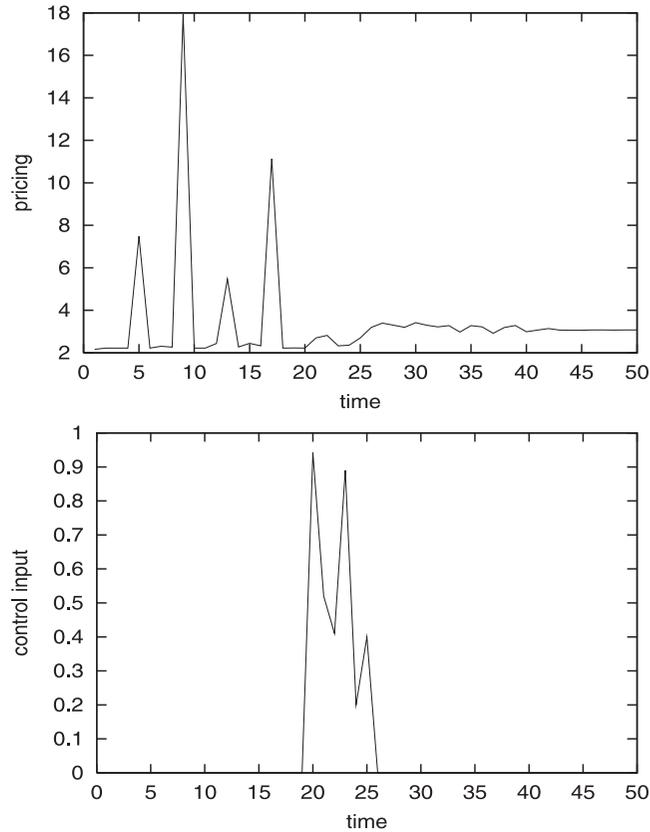


図 9 あるノードにおける caos 性変動の抑制例 ($N_{in} = 10, \mu = 0.45, c_s = 1$, 上: 抑制されたプライシング, 下: 印加外力)
 Fig. 9 An example of chaotic fluctuation on a node ($N_{in} = 10, \mu = 0.45, c_s = 1$, upper: suppressed pricing, lower: imposed time series).

ネットワークのパラメータを, $N_{in} = 3, \mu = 0.35, c_s = 1$ と設定した場合の, あるノードにおける caos 性変動について caos 制御の方法を用いてこの変動を抑制した事例を示す. 図 10 の上は抑制された時系列で, 図 10 の下は抑制のためのプライシングへの印加外力の例を示している. この図 10 における caos 抑制では, プライシングは不動点に移行し抑制が完了したあと, ある時間を経過するともとの caos 性振動に戻っている.

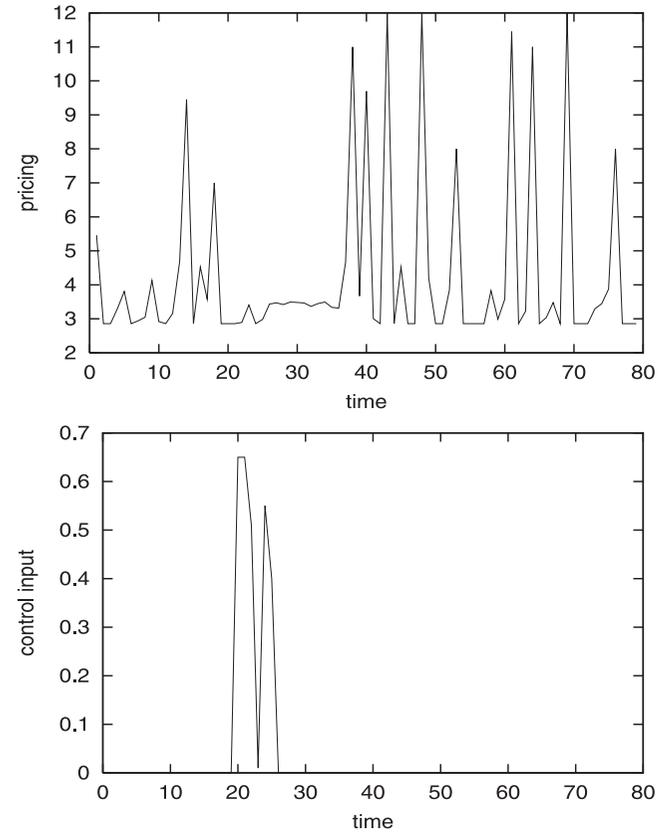


図 10 あるノードにおける caos 性変動を抑制例 ($N_{in} = 3, \mu = 0.35, c_s = 1$, 上: 抑制されたプライシング, 下: 印加外力)
 Fig. 10 An example of suppression of chaotic fluctuation on a node ($N_{in} = 3, \mu = 0.35, c_s = 1$, upper: suppressed pricing, lower: imposed time series).

なお外力を加える継続時間 N_c について, caos 性変動を抑制するには最低限どの程度必要 (これを N_c^B として示す) については, シミュレーション結果をもとにすると, 表 3 のようにまとめられる. ただし表 3 においては, $N_{in} = N_b = N_{out}$ として, 同時にシミュレーションにおける μ の値を示し, 結果のデータとして N_c^B の平均値を示している. この結果から分かるように, 数値 N_c^B は入力ノードの数 N_{in} に比例しているが, ほぼ 6 程度の

表 3 プライシングを抑制するための N_c の最小値 N_c^B (平均値)

Table 3 Minimum values N_c^B of N_c for suppressing chaotic fluctuation in pricings (mean values).

N_{in}	μ	N_c^B
$N_{in} = 2$	$\mu = 0.55$	$N_c^B = 5.8$
$N_{in} = 3$	$\mu = 0.50$	$N_c^B = 6.1$
$N_{in} = 5$	$\mu = 0.45$	$N_c^B = 6.3$
$N_{in} = 8$	$\mu = 0.45$	$N_c^B = 6.5$
$N_{in} = 10$	$\mu = 0.45$	$N_c^B = 6.8$

表 4 プライシングがもとのカオスに戻るまでの時間の平均値 N_r^M

Table 4 Mean value N_r^M of period until pricings go back to chaotic fluctuation.

	$N_{in} = 3$	$N_{in} = 5$	$N_{in} = 7$	$N_{in} = 10$
$\mu = 0.35$	10.7	18.9	38.1	f.p
$\mu = 0.45$	24.3	45.5	52.3	f.p
$\mu = 0.55$	33.5	f.p	f.p	f.p

値であり、比較的短い時間だけ外力を継続するだけで、カオス性変動を抑制できることが分かる。

カオス抑制からカオスへの復帰

図 10 より分かるように、ネットワークにおける中間ノードの数について平均は N_{in} であるが、ランダムな数を取り、しかもノードの間の接続が規則的なネットワークと異なり等質でない場合には、カオス性変動を外力の印加により抑制しても、やがて時間の経過とともに、もとのカオス状態に戻ってしまうケースも存在する。表 4 にはシミュレーションをもとにして、カオス抑制をしたあとで、元のカオス性変動に戻るまでの時間 (平均値) を示している (N_r^M としておく)。平均値の推定のため、カオス抑制のシミュレーションを表 4 におけるそれぞれの設定について 30 回実施し、ランダムに選んだ 50 個のノードにおける特性を利用した。表 4 において f.p は抑制が順調で不動点からカオス性変動には戻らないことを意味する。この表に示すように、入力ノードの数が減少するに従って、また容量が小さくなるに従って、もとのカオス性変動に復帰する時間は短くなっている。

カオス抑制を実施した後で、時間経過とともにカオスの変動に復帰する原因については、ネットワーク構成が規則的ではないことなどにより、理論的に示すことは難しい。したがって、シミュレーション結果や、単独ノードおよび規則的な構成のネットワークにおけるカオス抑制の結果と比較しながら、考察することになる。上に述べたカオス抑制の後のカオス性変動への復帰の原因として、以下のようなことがあげられる。

(1) 不動点への移行を計算するの値の精度

ネットワーク構成の場合にはプライシングを均衡点に移行させるために、逐次近似の手法を用いて、それぞれのノード i においてプライシングが一定の値を持続するためのフローの最適値として $\hat{\lambda}^{(i)} = \Lambda F(\hat{p}^{(i)})$, $\hat{p}^{(i)} = (\mu - \beta' \hat{\lambda}^{(i)}) / [\mu(\mu - \hat{\lambda}^{(i)})]$ を満足する $\hat{\lambda}^{(i)}$ を推定している。しかし、逐次近似の精度が限定されているため、カオス抑制の後でも、わずかなフローの不均衡が発生するノードが存続することになる可能性がある。このように不動点から離脱したノードのプライシングは、ネットワークを通じて他のノードへと伝播し、やがて他のノードの均衡状態を乱すと思われる。

(2) 特定のノードにフローが集中する

しかしながら一方では、前に定義した規則的な構成を仮定したネットワークにおいては、ノード i においてプライシングが一定の値を持続するためのフロー $\lambda^{(i)}$ を理論値よりわずかにずらしてもカオス抑制が完了し、不動点からの離脱は見られない (この結果の詳細は省略する)。このことから、フローがノードごとに均衡していないこと、すなわち、不規則な構成のネットワークにおいては、特定のノードにフローが相対的に集中し、カオス抑制の後でもカオスの変動に復帰する確率を上昇させることになっていると思われる。表 4 の結果から分かるように、入力ノードの数が小さく、容量が小さい場合に、このようなカオス抑制からの離脱確率が大きいことも示されている。

(3) 引き込み域が小さい

カオス制御の視点からは、ネットワーク構成のパラメータの違いにより、不動点の周辺の引き込み域が相対的に小さくなるケースが発生していると思われる。規則的な構成のネットワークと比較した場合には、それぞれの段のネットワークのノード数が一定ではなく、ばらつきを持っている。したがって、不規則なネットワーク構成の場合には、規則的な構成のネットワークの場合に発生する最悪のケースが、生じることが予測される。

6. む す び

本論文では、単独のノードでのカオス性変動のモデル解析を一般化したネットワーク構成のノードを仮定し、ノードでの入力調整のメカニズムを導入した場合のノードにおけるプライシングのカオス性変動の発生と、システムのパラメータとの関係を分析した。その結果、カオス性変動が発生する条件を、簡潔に表現する近似式を推定することが可能となった。同時に、このような、プライシングに微小な入力を加えることにより、カオス性変動を制御できることを示した。

今後の課題として、現実のカオス性変動発生の現象を、本論文の手法と対応させながら比較分析することがあり、検討を進めていきたい。

謝辞 本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費基盤研究(B)19310099により実施されている。ここに感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) Agnew, C.E.: Dynamic modeling and control of congestion-prone systems, *Operations Research*, Vol.24, pp.400–419 (1976).
- 2) Koliver, C., Nahrstedt, K., Fraga, J.M. and Sandri, S.A.: Specification, Mapping and Control for QoS Adaptation, *Real-Time Systems*, Vol.23, No.1-2, pp.143–174 (2002).
- 3) Dewan, S. and Mendelson, H.: User delay costs and internal pricing for service facility, *Management Science*, Vol.36, No.12, pp.1502–1517 (1990).
- 4) Erramilli, A., Singh, R.P. and Pruthi, P.: An application of deterministic chaotic maps to model packet traffic, *Queueing Systems*, Vol.20, pp.171–206 (1995).
- 5) Rump, C.M. and Stidham, S.Jr.: Stability and chaos in input pricing for a service facility with adaptive customer response to congestion, *Management Science*, Vol.44, No.2, pp.246–261 (1998).
- 6) Stidham, S.Jr.: Pricing and capacity decisions for a service facility: Stability and multiple local optima, *Management Science*, Vol.38, No.2, pp.1121–1139 (1992).
- 7) Haxholdt, C., Larsen, E.R. and Ackere, A.V.: Mode locking and chaos in deterministic queueing model with feedback, *Management Science*, Vol.49, No.6, pp.816–830 (2003).
- 8) Graham, C.: Chaoticity on path space for a queueing network with selection of the shortest queue among several, *Journal of Applied Probability*, Vol.37, pp.198–211 (2000).
- 9) Graham, C. and Kurtz, T.: Propagation of chaos for a fully connected loss network with alternate routing, *Stochastic Processes and Applications*, Vol.44, pp.159–180 (1993).
- 10) Matrin, J.B. and Sohov, Y.M.: Fast Jackson networks, *Annual Applied Probability*, Vol.9, pp.854–870 (1999).
- 11) Vvedenskya, N., Dobrushin, R. and Karpelevich, F.: Queueing system with selection of the shortest of two queues: An asymptotic approach, *Probability of Information*, Vol.32, pp.15–27 (1996).
- 12) Chen, X. and Tokinaga, S.: Approximation of chaotic dynamics for input pricing at service facilities based on the GP and the control of chaos, *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol.E85-A, No.9, pp.2107–2117 (2002).

- 13) 池田欽一, 陳 暁榮, 時永祥三: GP による学習を基礎としたマルチエージェント・システムによるプライシング時系列のカオス性分析とその応用, *電子情報通信学会論文誌*, Vol.J89-A, No.4, pp.298–307 (2006).
- 14) Borovkov, K.A.: Propagation of chaos for queueing networks, *Theory of Probability and its Applications*, Vol.42, No.3, pp.385–394 (1997).
- 15) Nier, E., Yang, J., Yorulmazer, T. and Alentorn, A.: Network models and financial stability, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.31, pp.2033–2060 (2007).
- 16) Battiston, S., Delli, D., Gatti, D., Gallegati, M., Greenwald, B. and Stiglitz, J.E.: Credit chains and bankruptcy propagation in production networks, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.31, pp.2061–2084 (2007).
- 17) Iori, G., Jafarey, S. and Padilla, G.: Systematic risk on the interbank market, *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol.61, pp.525–542 (2006).
- 18) Sandefur, J.T.: *Discrete Dynamical Systems*, Clarendon Press, Oxford, England (1990).
- 19) Ott, E., Grebogi, C. and Yorke, J.A.: Controlling Chaos, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.64, No.11, pp.1196–1199 (1990).
- 20) Pyragas, K.: Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Phys. Lett.*, Vol.170, pp.421–428 (1992).
- 21) Ikeda, Y. and Tokinaga, S.: Controlling the chaotic dynamics by using approximated system equations obtained by the genetic programming, *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol.E84-A, No.9, pp.2118–2127 (2001).
- 22) Ikeda, Y. and Tokinaga, S.: Analysis of price changes in artificial double auction markets consisting of multi-agents using Genetic Programming for learning and its applications, *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol.E90-A, No.9, pp.2203–2211 (2007).
- 23) 時永祥三, 池田欽一: エージェント理論による企業行動分析—遺伝的プログラミングアプローチ, 白桃書房 (2005).
- 24) Li, T. and Yorke, J.A.: Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly*, Vol.82, pp.985–992 (1975).

付 録

単独のノードにおける入力調整に基づくカオス性変動発生の条件導出の概要を、文献 4) に従って以下に示す。ノードのフローが均衡状態にあると仮定すると、 $\pi_n = p_n$ となり、次の式が成立する。

$$a - (a - d)\lambda/\Lambda = (\mu - \beta'\lambda)[\mu(\mu - \lambda)]^{-1}. \quad (22)$$

この式を変形し、方程式における λ の解の中で、意味のあるものを用いて、これを λ_μ とすると次が得られる。

$$\lambda_\mu = [-c_1 + (c_1^2 - 4c_0c_2)^{1/2}]/2c_0. \quad (23)$$

$$c_0 = (a - d)\mu/\Lambda. \quad (24)$$

$$c_1 = -\mu a - (a - d)\mu^2/\Lambda + \beta'. \quad (25)$$

$$c_2 = \mu^2 a - \mu. \quad (26)$$

一方、このようにして得られる均衡解が安定であるかどうかを判断することは、均衡解の近傍における条件を調べることにより行われる。具体的には次の2つの条件が用いられる。(条件1)式(4)~(6)に従って決められる π_{n+1} は安定であるか。

(条件2)条件1において安定と不安定の境界にある場合にこの点は安定であるか

関係式を分かりやすくするため、次のように関数表示する。

$$\Pi_\mu(\pi) = (1 - \omega)\pi + \omega P_\mu, P_\mu = W_\mu[\lambda(\pi)]. \quad (27)$$

まず条件1については、式(24)において $\partial\Pi_\mu(\pi)/\partial\pi < 1 (> 1)$ であれば安定(不安定)であることが Sanderfur により示されている¹⁹⁾。この条件は直観的には、もし $\partial\Pi_\mu(\pi)/\partial\pi > 1$ であれば変数 π_{n+1} の値が次第に大きくなるので、系は安定しないことから分かる。この条件において等号が成り立つ場合、すなわち

$$\partial\Pi_\mu(\pi)/\partial\pi = 1. \quad (28)$$

は安定か不安定か区別ができない境界となる。この式から、ある容量 $\hat{\mu}$ が決定され、この数値は安定と不安定(カオス状態)とを区分する境界であるので、分岐値(bifurcation value)と呼ばれ、この $\hat{\mu}$ に対する π が決まる($\hat{\pi}$ とする)。この対($\hat{\pi}, \hat{\mu}$)は一般に分岐点(bifurcation point)と呼ばれるものである。具体的にはこの容量より大きいときには、 $\hat{\pi}$ は安定であるが、この容量より小さくなると2周期変動が現れる。さらに容量 μ を小さくすると3周期などの大きな変動が現れる。そこで、この分岐点($\hat{\pi}, \hat{\mu}$)が安定かどうかを調べれば、実際にカオス性変動へと移行する境界であることが分かる。すなわち条件2は条件1について安定か不安定か判別できない場合に適用される条件であり、この均衡解が安定的である条件が Sanderfur により、次のように与えられている¹⁸⁾。

$$\sigma = -2 \frac{\partial^3}{\partial \pi^3} \Pi_\mu(\pi) - 3 \left[\frac{\partial^2}{\partial \pi^2} \Pi_\mu(\pi) \right]^2 \Bigg|_{\pi=\pi_\mu} < 0. \quad (29)$$

ここで、 $\Pi_\mu(\cdot)$ については、式(28)の条件が成立していると仮定する。ただし微分値を求める条件である $\pi = \pi_\mu$ は、変数である π に容量が μ である π を代入することを意味する。この式を変形すると、次のような式に帰着される。

$$3(2 - \omega) \left(\frac{\partial^2 W_\mu(\lambda_\mu)}{\partial \lambda^2} \right)^2 > 2 \frac{\partial^3 W_\mu(\lambda_\mu)}{\partial \lambda^3} \frac{\partial W_\mu(\lambda_\mu)}{\partial \lambda}. \quad (30)$$

さらに整理すると、次のような条件式になる。

$$3(2 - \omega) \left(\frac{2}{\mu - \lambda} \right)^2 \left(\frac{\partial W_\mu(\lambda_\mu)}{\partial \lambda} \right)^2 > \frac{12}{(\mu - \lambda)^2} \left(\frac{\partial W_\mu(\lambda_\mu)}{\partial \lambda} \right)^2. \quad (31)$$

この式は $\omega < 1$ であれば成立する。すなわち対象としているシステムの不動点が存在する場合には、この点での挙動は安定してことが分かる。したがってプライシングがカオス的変動を示すかどうかを調べるには、条件1について等式が成立する場合、すなわち式(28)の関係式だけを用いればよい。

この境界となる条件について、具体的に $W_\mu(\cdot)$ の式を代入すると、次のような関係式が得られる。

$$\lambda_\mu = \mu - \left[\frac{(1 - \beta')\Lambda\omega}{(a - d)(2 - \omega)} \right]^{1/2}. \quad (32)$$

この式に式(23)の λ を代入すると、式(7)、(8)に示す方程式が得られる。簡単な考察により、 $\mu < \mu_-$ 、 $\mu > \mu_+$ である場合に均衡解は安定であり、 $\mu_- \leq \mu \leq \mu_+$ の場合には不安定になることが分かる。

(平成20年1月30日受付)

(平成20年3月10日再受付)

(平成20年4月17日再受付(2))

(平成20年7月19日再受付(3))

(平成20年8月13日採録)



池田 欽一

平成8年九州大学経済学部経済工学科卒業、平成13年同大学院博士課程修了。博士(経済学)。平成13年信州大学経済学部助教授。平成20年北九州市立大学経済学部准教授。経済統計解析、複雑系、時系列解析の研究に従事、日本OR学会会員。



時永 祥三（正会員）

昭和 46 年九州大学工学部情報工学科卒業．昭和 52 年同大学院博士課程修了．工学博士．同年北九州高専電気工学科講師．昭和 54 年大分大学工学部組織工学科講師，助教授．昭和 61 年九州大学経済学部経済工学科助教授，平成 4 年同教授．昭和 64 年～平成 2 年カリフォルニア大学，テキサス大学客員研究員．経営情報システム，経営エキスパートシステム，時系列処理の研究に従事．日本 OR 学会等会員．
