

## 複雑システムにおけるネットワーク中心性が 予測精度に与える影響

鈴木 智也<sup>†1</sup> 池田 真一<sup>†1</sup>

自然界に存在する複雑システムを分析するために、それを簡潔に模擬した Coupled Map Lattice (CML) や Global Coupled Map (GCM) などのモデルが広く研究されている。本研究では、近年注目されている複雑ネットワーク科学の知見を取り入れるべく、CML を Watts らが提案した WS モデルを用いて構成した。これにより、初期型の CML のネットワーク構造はレギュラネットワークが主流であったが、スモールワールドネットワークやランダムネットワークにおいても、複雑システム全体の振舞いや力学的構造を分析できる。さらに、ネットワークを構成する各要素は、ネットワーク上の位置に応じて、システム全体から受ける影響の仕方が異なる。本研究では、ネットワーク上の位置として、ネットワーク中心性の概念に注目し、各要素の振舞いや力学的構造の特徴を分析した。また、株価変動の予測など、複雑システムを構成する要素の将来変動を予測する場合、システム全体からの影響の受け方に応じて、予測難易度や最適な予測モデルが異なる可能性がある。本研究では、一般の複雑システムにおいて、ネットワーク中心性が予測難易度に影響を与えることを示すために、先に述べたネットワーク構造を可変できる改良型の CML を用いて検証を行った。

### The Influence of Network Centralities on Prediction Accuracy of Complex Network Systems

TOMOYA SUZUKI<sup>†1</sup> and SHINICHI IKEDA<sup>†1</sup>

To analyze complex systems in real world, the coupled map lattice (CML) and the global coupled map (GCM), which model real systems basically, are often used. In the present paper, we applied the modified CML whose network structure is composed by the Watts-Strogatz (WS) model to discuss complex systems from the viewpoint of complex network science. Although the original CML are composed by the regular network, the modified CML can analyze behaviors and dynamical structures of complex systems composed not only by the regular network but also by the small-world network and the random network. In addition, each node composing a network interacts with the whole of system according to each location of nodes in the network. In the present paper, we

characterize each location by network centralities—the degree centrality, the betweenness centrality and the closeness centrality, and then we discuss dynamical structure and predictability of each node. Moreover, in the case of predicting future behaviors, especially in stock markets, it is possible that the predictability of each node is affected by network centralities. In order to confirm the universality of the possibility in general complex systems, we analyzed the modified CML by changing its network structure as a model including the essence of complex systems.

#### 1. はじめに

自然界の実システムは、一般に各要素がネットワークを構成しており、互いに相互作用して時間発展している。さらに、要素に働くダイナミクスに応じて、系全体の振舞いは単純ではなく、要素還元論的なアプローチで理解できる範疇を超える。このようないわゆる複雑系を解明する方法として、構成論的なアプローチが有力であり、計算機の中で仮想的に複雑系を模擬するモデルを構成することによって、現象の本質的理解や新現象の予言が行われる。この構成論的なアプローチでよく用いられるモデルとして、金子らが提案した Coupled Map Lattice (CML) や Global Coupled Map (GCM) がある<sup>1)</sup>。これらは要素に働くダイナミクスとして、主にロジスティック写像を用いており、きわめてシンプルな非線形ダイナミクスでシステムを構成したにもかかわらず、実に多様な複雑な振舞いを再現することができる。さらに、ダイナミクスのシンプルさゆえ、より複雑な実システムに内在する原理的な性質に着眼しているといえる。

金子らの CML は、隣の要素のみと相互作用を行うといった規則的なネットワーク構造を有している<sup>1)</sup>。しかし、近年の複雑ネットワーク科学が示すように、実システムにはスモールワールドネットワーク<sup>2)</sup> やスケールフリーネットワーク<sup>3)</sup> といった構造が多く存在することが明らかとなった。モデルのシンプルさも重要であるが、これらの構造を無視することには有益ではないと考え、本研究では、文献 4) で導入されている改良型 CML を用いて、システムの振舞いの予測難易度を分析する。この改良型 CML は、金子らの初期型 CML のネットワーク構造を Watts-Strogatz (WS) モデル<sup>2)</sup> で生成することにより、ネットワーク構造を可変できるモデルである。

<sup>†1</sup> 同志社大学理工学部情報システムデザイン学科

Department of Information System Design, Faculty of Science and Engineering, Doshisha University

## 2 複雑システムにおけるネットワーク中心性が予測精度に与える影響

さらに、複雑ネットワーク科学の知見として、各要素のネットワーク上の位置に応じてシステム全体から受ける（あるいは与える）影響の仕方が異なるので、ネットワーク中心性に関する次数中心性、媒介中心性や近接中心性などの概念が重要視されている<sup>5)</sup>。外部から受ける影響が異なれば、要素ごとの振舞いの仕方やリアプノフ指数などに影響を及ぼし、将来変動の予測問題においても、要素ごとで予測難易度が異なると考えられる。ここで複雑システムを株式市場にたとえれば、各企業のネットワーク上の位置付け（たとえば、関連会社の有無）に応じて、株価変動の予測難易度や最適な予測モデルが異なる可能性がある。そこで本研究では、株式市場に限らず一般の複雑システムにおいて、各要素の中心性が予測難易度に影響を与えるのかを検証する。その際、先に述べた改良型 CML を用いて、複雑システムの原理的レベルから検証する。

### 2. 複雑ネットワークの基礎

#### 2.1 WS モデル

統計物理学における磁性体のモデルなど、従来の相互作用システムのモデル化には、解析のしやすさから正方格子グラフ（レギュラグラフ）やランダムグラフが主に用いられてきた。しかしこれらのみでは、必ずしも自然界の実システムを模擬できるとは限らない。その1例として、1967年のMilgramの実験で示されたように、我々の友人関係のネットワークは、各友人間の隔たりが短く、さらに友人同士がクラスタ化しているといった、いわゆるスモールワールドネットワーク構造をなすことが知られている。このような構造は友人関係にとどまらず様々な分野において存在することが知られている<sup>2)</sup>。しかし、レギュラグラフやランダムグラフでは、ノード間の隔たりの短さや高いクラスタ性を同時に表現することはできない。そこで、1997年にWattsらは環状のレギュラグラフの一部をランダムに張り替えることによって、最短経路性とクラスタ性の両方を満足するシンプルなネットワークモデル（WSモデル）を提案した。さらに、短い平均最短経路長と高いクラスタ係数を同時に有することをスモールワールド性と定義した<sup>2)</sup>。

WSモデルの構成法として、まず、 $n$ 個のノードを円環状に配置し、各ノードについて左右 $k/2$ 個（合計 $k$ 個）のノードと結合させる。この状態はレギュラネットワークに相当している。さらに、グラフ上に存在する $nk/2$ 本のエッジのうち、張り替え確率 $p$ の値に応じて $pnk/2$ 本のエッジをランダムにつなぎかえることで、レギュラネットワーク（ $p=0$ ）からスモールワールドネットワーク（ $0 \leq p \leq 1$ ）やランダムネットワーク（ $p=1$ ）に遷移させる。

各ネットワーク構造の特徴は、平均最短経路長 $L$ とクラスタ係数 $C$ によって評価される。平均最短経路長 $L$ は、各ノード間の最短経路長を平均化したものであり、クラスタ係数 $C$ については、以下の式で算出される。

$$C_i = \frac{\alpha}{k_i C_2}$$

ここで、あるノードのインデックスを $i$ （ $i=1, 2, \dots, n$ ）、ノード $i$ の次数を $k_i$ 、ノード $i$ の隣接ノードどうしが結合している数を $\alpha$ としている。ネットワーク全体のクラスタ係数を算出する場合は、 $C_i$ を平均化する。つまり、

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i$$

である。

#### 2.2 ネットワークにおけるノードの中心性

ネットワーク上の各ノードは、中心性というネットワーク上の影響力に関する特性を持つ。たとえば、多くのノードと結合するハブ的存在を評価する次数中心性や、他の全ノードからの距離が短い性質を評価する近接中心性、さらに、多くのノード間を中継する度合いを評価する媒介中心性などがある。これらを一般にネットワーク中心性と呼び、グラフのトポロジの観点から各ノードのネットワーク全体に対する影響力の強さを定量化できる<sup>5)</sup>。

次数中心性 $K_i$ は、次数 $k_i$ の大きいノードほど中心的であると解釈するので、 $K_i = k_i$ である。図1に示すように、次数中心性が最も高いのはノードFに相当する。一方、ノードIは次数が4なので次数中心性が高いとはいえない。しかし、左のコミュニティ（ノードA～H）と右のコミュニティ（ノードJ～L）を媒介する唯一のノードであるため、情報が集まる中継点という観点においては中心性が高いといえる。

この性質は媒介中心性として次のように算出する。あるノード $i$ の媒介中心性 $B_i$ を求めるには、まずネットワーク上の全ノード間を結び最短経路をダイクストラの方法によって探索し、その最短経路がノード $i$ を何回経由するかを見積もり、この回数をノード $i$ の媒介中心性 $B_i$ として定義する。図1では、左右コミュニティを結ぶ道は、必ずノードIを経由するので媒介中心性が最も高い。

さらに、ノード $i$ の近接中心性 $D_i$ は、ノード $i, j$ 間の最短経路長を $d_{ij}$ とすると、

$$D_i = \frac{1}{\sum_{j \neq i} d_{ij}}$$

### 3 複雑システムにおけるネットワーク中心性が予測精度に与える影響

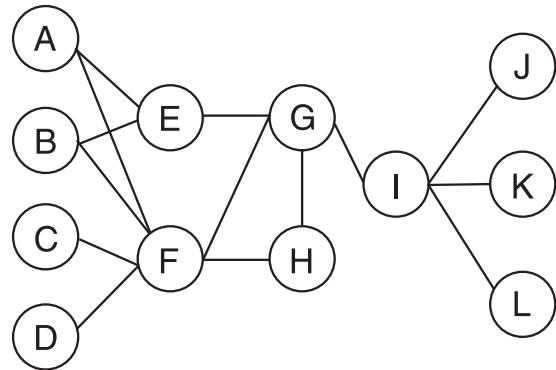


図 1 ネットワーク中心性の模式図．ノード F，ノード I，ノード G がそれぞれ最も次数中心性，媒介中心性，近接中心性が高い  
 Fig.1 Diagram of the network centrality. The node F has the largest degree centrality, node I has the largest betweenness centrality, and node G has the largest closeness centrality.

と書ける．つまり，他のノードへの最短距離の和が小さいほど，他のノードに対する影響力が強いという観点より中心性が高いと見なす．たとえば，図 1 において，ノード G は他の全ノードに最大でも 2 ステップでアクセスできるので最も近接中心性が高い．このようなノードの影響は，早く全体に伝わりやすい．

### 3. Coupled Map Lattice (CML) の分析

#### 3.1 初期型モデルの改良

1 章で紹介したように金子らの初期型 CML は，隣の要素のみと相互作用を行うといった規則的なネットワーク構造をなしている．つまり，以下の式によって記述される<sup>1)</sup>．

$$X_i(t+1) = (1 - \epsilon)f(X_i(t)) + \frac{\epsilon}{2}(f(X_{i+1}(t)) + f(X_{i-1}(t))) \quad (1)$$

ここで， $i$  はノード番号， $t$  は時間である．結合係数  $\epsilon$  により要素間の相互作用の強さを表し，各要素は自分自身の出力値と結合している要素の出力値を混合することにより時間発展していく．さらに，各要素に働くダイナミクスとして，主に以下のロジスティック写像が用いられる．

$$f(X(t)) = 1 - aX^2(t)$$

ロジスティック写像は，カオスの典型的モデルとして調べつくされており，さらに，最も

シンプルに非線形システムを表現できるため，非線形性以外の特殊な効果によって解析結果が左右されることがなく，システムに内在する原理的な特徴に着目することができる．さらに，コントロールパラメータ  $a$  によって非線形性の強さを調節でき， $2.0 \geq a \geq 1.4011$  のときにおいてカオス解を示すことが知られている．

本研究では，文献 4) においてネットワーク構造を可変できるように改良された CML を導入する．式 (1) のノード間の相互作用を前節の WS モデルで表現するため，改良型 CML は次式のように表現される．

$$X_i(t+1) = (1 - \epsilon)f(X_i(t)) + \frac{\epsilon}{k_i} \sum_{j \in G_i(p)}^{k_i} f(X_j(t))$$

ここで， $G_i(p)$  はノード  $i$  と結合する要素  $j$  の集合を表し，WS モデルにおける再結合確率  $p$  に応じたネットワーク構造を反映している．さらに，ノードに働くダイナミクスにはロジスティック写像を用い， $a = 2.0$  とした．

#### 3.2 ネットワーク構造に応じた中心性の変化

次に，実際に計算機を用いて  $n = 100$  の要素による改良型 CML を構成し，ネットワーク中心性に関する性質を調べる．なお，WS モデルでのネットワーク作成課程において乱数を用いているので， $p$  の値が同じでも，生成されるネットワークは異なる．よって実験の信頼性を向上させるために，本研究のすべての実験では，同一の  $p$  によるネットワークを 20 個作成して，その試行平均値をもって解析結果を示している．

図 2 では，ネットワーク構造の違いに応じた，クラスタ係数，次数中心性，近接中心性，媒介中心性を示している． $p$  が大きくなるにつれてランダムネットワークに近づくので，クラスタ係数  $C_i(p)$  は低下し，次数中心性  $K_i(p)$  の標準偏差は拡大し，近接中心性  $D_i(p)$  は拡大するが，媒介中心性  $B_i(p)$  に関してはスモールワールド構造のときに最も低い値を示した．

さらに図 3 に，ネットワーク構造の違いによる各中心性の相関関係を示す．たとえば，各ノードの  $C_i(p)$  と  $J_i(p)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) などの相関係数を算出することで各中心性間の関連の強さ評価した．各中心性ともネットワーク上の影響力の強さを表すものであるが，各相関係数の値は低いので，異なる概念であることが分かる．ただし，ネットワーク構造に応じては，相関係数が大きくなる場合があり，特に，スモールワールドネットワークではクラスタ係数  $C_i(p)$  と近接中心性  $D_i(p)$  の関係性が，ランダムネットワークでは次数中心性  $K_i(p)$  と近接中心性  $D_i(p)$  の関係性が高い．

#### 4 複雑システムにおけるネットワーク中心性が予測精度に与える影響

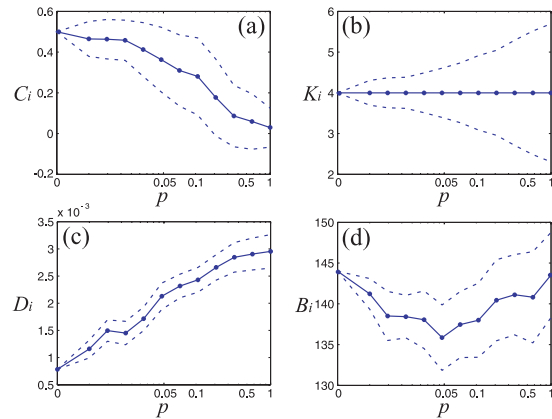


図 2 改良 CML におけるネットワーク構造の違いによる (a) クラスタ係数  $C_i(p)$ , (b) 次数中心性  $K_i(p)$ , (c) 近接中心性  $D_i(p)$ , (d) 媒介中心性  $B_i(p)$  の変化. 実線は各ノードの平均値を表し、破線は標準偏差を表している

Fig. 2 Changes of (a) the cluster coefficient  $C_i(p)$ , (b) the degree centrality  $K_i(p)$ , (c) the closeness centrality  $D_i(p)$ , and (d) the betweenness  $B_i(p)$  according to network topology  $p$  of the modified CML. Solid line shows each mean value of nodes  $i$  and dashed line shows each standard deviation.

#### 3.3 改良型 CML の振舞いの分析

次に、 $t = 1 \sim 2,000$  まで時間発展させることにより各要素の振舞い  $X_i(t)$  を生成し、同期度やリアプノフ指数の観点から改良型 CML のマクロ的性質を分析する。カオス結合系に関する同種の先行研究において、それぞれの分析したい内容に応じて同期度の計算方法は異なる<sup>4),6)</sup>。本研究では、システムの予測難易度を分析するうえで、まずシステムの振舞いの複雑さを評価したいので、最もシンプルな指標である相関係数を用いた。つまり、2つの要素の振舞い、たとえば  $X_i$  と  $X_j$  の相関係数を  $\Phi_{ij}$  とすると、システム全体の同期度  $\Phi$  は、 $\Phi_{ij}$  を平均化することにより

$$\Phi = \frac{1}{nP_2} \sum_{i \neq j} \Phi_{ij}$$

として評価した。解析結果を図 4 に示す。モデルパラメータ  $p$  および  $\epsilon$  の変化にともない、改良型 CML の構造が変化し、各要素の同期度が変化することが分かる。さらに、逆相同期している場合は  $\Phi_{ij}$  が負になるので、図 4 (b) では絶対値をとることにより

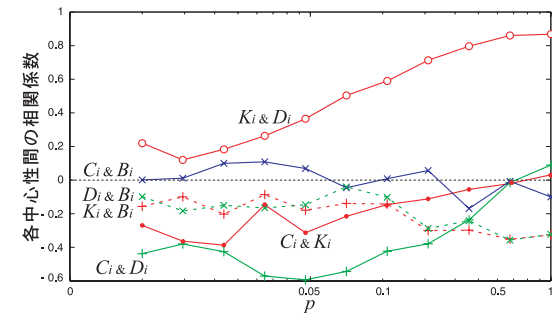


図 3 改良 CML におけるネットワーク構造の違いによる各中心性の相関関係  
Fig. 3 Correlations between each centrality of nodes according to network topology  $p$  of the modified CML.

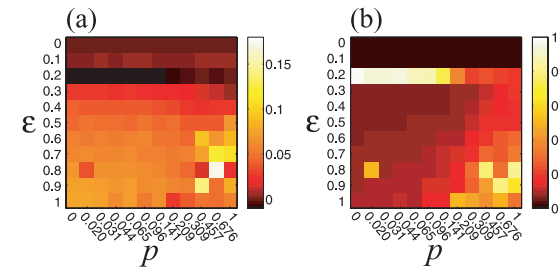


図 4 改良 CML における各要素の同期度. 図 (a) は  $\Phi(p, \epsilon)$  を表し、図 (b) は  $|\Phi|(p, \epsilon)$  を表している  
Fig. 4 The degree of synchronization among nodes in the modified CML. Figure (a) shows  $\Phi(p, \epsilon)$ , and Fig. (b) shows  $|\Phi|(p, \epsilon)$ .

$$|\Phi| = \frac{1}{nP_2} \sum_{i \neq j} |\Phi_{ij}|$$

として同期度を算出している。つまり、 $|\Phi| > \Phi$  の場合、逆相同期の傾向が強いことを表す。結果として図 4 が示すように、結合強度  $\epsilon$  が大きくなるほど、互いの影響力が強化されるので同期度は上昇する。さらに、図 2 (c) で示されるようにランダムネットワークになるほど近接中心性  $D_i(p)$  が低下し、つまりネットワーク全体の距離が短くなるので互いの影響力が強化され、同期度は上昇している。図 4 (b) に示される  $(p, \epsilon) = (0, 0.2)$  での強い逆相同期は、初期型 CML において観測されるものであるが、 $p$  が異なるネットワーク構造にな

## 5 複雑システムにおけるネットワーク中心性が予測精度に与える影響

るにつれ、同期は弱まっていく。

次に、モデルパラメータ  $p$  および  $\epsilon$  に応じた、改良 CML の力学的構造の変化を調べるために、リアプノフスペクトラム<sup>7)</sup> を算出する。CML などの多次元力学系の時間発展は、多次元状態空間内の軌道として表現されるが、リアプノフスペクトラムは、その軌道の各次元における不安定性を定量化したものである。この値が大きいくほど軌道の不安定性が増し、将来変動の予測難易度に影響を与える。言い換えると、状態空間内においてごく接近した軌道が離れていく度合いを表す量であり、将来変動の予測手法である局所線形近似法のパフォーマンスに直接的な影響を与える。

以下に、改良型 CML の時系列データからリアプノフスペクトラムを算出する方法を簡潔に示す。まず、各要素の振舞いを次式のように多次元状態空間内の軌道として表現する。

$$V(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_i(t), \dots, X_n(t)\} \quad (2)$$

次に、 $V(t)$  からの近傍点  $V(t_j)$  を数個選出し、 $Y_j = V(t_j) - V(t)$  および  $Z_j = V(t_j + 1) - V(t + 1)$  とすると、

$$Z_j = \mathbf{J}(t)Y_j$$

となるようなヤコビ行列  $\mathbf{J}(t)$  を最小二乗法などにより推定する。このヤコビ行列  $\mathbf{J}(t)$  の各固有値の対数をとったものが局所的なリアプノフスペクトラムに対応するので、時間平均または空間平均することにより大域的なリアプノフスペクトラム  $\lambda_i$  を得る<sup>7)</sup>。

このように得られた  $\lambda_i$  において、正の値を示す次元においては軌道が不安定であることを表し、負の値を示す次元においては軌道が安定であることを表している。また、リアプノフスペクトラム  $\lambda_i$  の最大値を最大リアプノフ指数  $\lambda_M$  と呼び、さらに次式により正のリアプノフスペクトラムを用いてリアプノフ次元  $\lambda_D$ <sup>8)</sup> が算出される。これらによって、軌道の不安定性を評価することが一般的である<sup>7)</sup>。

$$\lambda_D = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{\beta} \lambda_i}{|\lambda_{\beta+1}|}$$

ここで、 $\beta$  は降順に並べ替えられた  $\lambda_i$  の和が正であるような最大の整数である。

図 5 に改良型 CML における最大リアプノフ指数  $\lambda_M$  およびリアプノフ次元  $\lambda_D$  の様子を示す。これらの結果は図 4 の同期度の結果と強い関係性があることが分かる。特に同期度が高い場合はシステムの振舞いが単純化し、 $\lambda_M$  および  $\lambda_D$  が低下しており、軌道は比較的安定といえる。軌道の安定性は予測難易度に関連するものであるため、この状況における予測難易度は低いと予想される。このようにモデルパラメータ  $p$  と  $\epsilon$  に応じた改良型 CML の将来変動の予測難易度を調べるために、式 (2) の軌道  $V(t)$  に対して局所線形近似法<sup>9)</sup> を

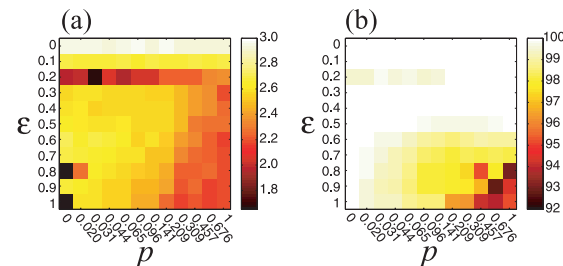


図 5 改良 CML における (a) 最大リアプノフ指数  $\lambda_M(p, \epsilon)$  と (b) リアプノフ次元  $\lambda_D(p, \epsilon)$

Figure (a) shows the maximum Lyapunov exponent  $\lambda_M(p, \epsilon)$  of the modified CML, and Figure (b) shows the Lyapunov dimension  $\lambda_D(p, \epsilon)$ .

用いてシステムの将来変動を予測する。

局所線形近似法<sup>9)</sup> では、軌道上の現在点  $V(t)$  の近傍点  $V(t_m)$  を過去の軌道から  $M$  個 ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) 見つけ出し、その近傍点の 1 ステップ将来値を平均化することで、予測値  $\tilde{V}(t+1)$  を得る。つまり、以下のように求められる。

$$\tilde{V}(t+1) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M V(t_m + 1) = \{\tilde{X}_1(t+1), \tilde{X}_2(t+1), \dots, \tilde{X}_n(t+1)\} \quad (3)$$

この手法により、全要素の将来値  $\tilde{X}_i(t+1)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を得ることができる。

シミュレーションにおいては、近傍数の個数  $M$  を状態空間の次元 +1 とし (つまり  $M = 101$ )、後半の  $t = 1001 \sim 2000$  の  $X_i(t)$  を予測対象とした。さらに、 $X_i(T)$  ( $T \geq 1,001$ ) を予測する場合、 $t = 1 \sim T-1$  の時系列データを予測のためのデータベースとした。各ノードの予測精度を評価するために、正解値  $X_i(t)$  と予測値  $\tilde{X}_i(t)$  ( $t = 1001 \sim 2000$ ) の相関係数を算出し、その予測精度を  $\gamma_i$  と表す。図 6 (a) に、改良型 CML における予測精度の平均値  $\langle \gamma_i \rangle$  を示す。結合強度  $\epsilon$  が小さくなるにつれ、予測精度の低下を確認できる。これは、影響力の小さい要素まで予測モデルに取り込むので、全体の予測精度が低下したと考えられる。また、図 4 の同期傾向が強まり、図 5 の軌道不安定性が弱まるほど予測精度が向上することが分かる。このように改良型 CML のモデルパラメータに応じて、予測難易度が変化することが示された。



## 6 複雑システムにおけるネットワーク中心性が予測精度に与える影響

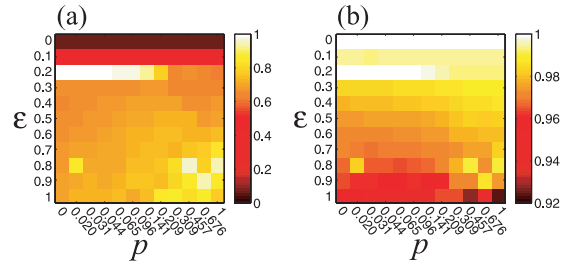


図 6 改良型 CML における各ノードの予測精度の平均値．図 (a) は予測式 (2)(3) により全要素を用いて予測した場合の精度  $\langle \gamma_i(p, \epsilon) \rangle_i$  を，図 (b) は予測式 (4)(5) により単体の要素ごとで予測した場合の精度  $\langle \Gamma_i(p, \epsilon) \rangle_i$  を示している

Fig. 6 The mean value of each prediction accuracy of nodes in the modified CML. Figure (a) shows the accuracy  $\langle \gamma_i(p, \epsilon) \rangle_i$  by Eqs. (2)(3) using all time-series data of nodes for predicting node  $i$ , and Fig. (b) shows the accuracy  $\langle \Gamma_i(p, \epsilon) \rangle_i$  by Eqs. (4)(5) using a single time-series data of node  $i$ .

### 4. ネットワーク中心性が最大リアプノフ指数や予測精度に与える影響

前章では，改良型 CML のマクロ的性質を分析するため，同期度，リアプノフ指数，予測精度についてシステム全体の様子を分析してきたが，本章では，ノードの個性に応じた特性を調べるため，ミクロ的視点より同種の性質を評価する．

さらに，通常における複雑システムの解析や，予測を行う状況に鑑みれば，式 (2) のようにシステムに内在する全変数を用いる場合は稀である．一般的には，システムに内在する変数を特定することが難しく，また観測にも限界があるので全変数の振舞いを取得するのは困難である．そこで通常では，解析対象とする 1 変量の時系列データから，ターケンスの埋め込み定理を用いて<sup>(10),(11)</sup>，多次元システムの軌道を再構成することが行われる．つまり，式 (2) の軌道は，

$$V_i(t) = \{X_i(t), X_i(t+\tau), X_i(t+2\tau), \dots, X_i(t+(d-1)\tau)\} \quad (4)$$

のように要素ごとの軌道に書き換えられる．ここで， $d$  は埋め込み次元， $\tau$  は遅れ時間を表す．この式によって，1 変量の時系列データ  $X_i(t)$  を多次元ベクトル  $V_i(t)$  に変換する．本研究では，最適な埋め込み次元  $d^*$  を決定するために誤り近傍法 (False-nearest neighbor method)<sup>(12)</sup> を用い，最適な遅れ時間  $\tau^*$  は自己相関関数がはじめて 0 となる時間とした<sup>(7)</sup>． $d^*$  や  $\tau^*$  は，ネットワークパラメータの  $p$  や  $\epsilon$  によらず，つねに  $d^* = 4$  および  $\tau^* = 1$  となった．

式 (4) により要素ごとに再構成された軌道  $V_i(t)$  を用いることで，3.3 節と同様に最大リ

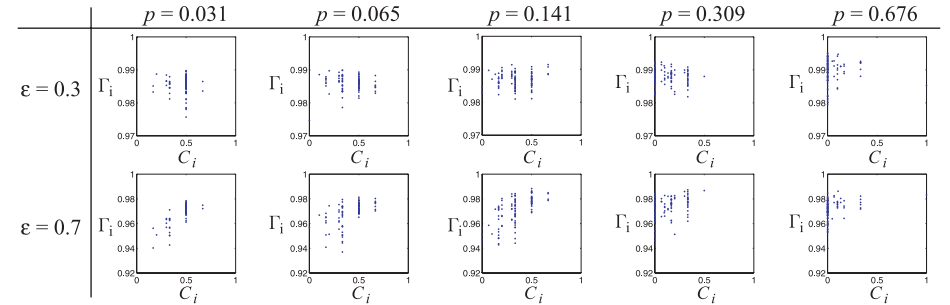


図 7 クラスタ係数  $C_i(p, \epsilon)$  と予測精度  $\Gamma_i(p, \epsilon)$  の相関図．ただし， $i = 1, 2, \dots, 100$

Fig. 7 Correlation diagrams between the cluster coefficient  $C_i(p, \epsilon)$  and the prediction accuracy  $\Gamma_i(p, \epsilon)$ . Here,  $i = 1, 2, \dots, 100$ .

アプノフ指数や，局所線形近似法の適用による予測精度を要素ごとに求めることができる．つまり，式 (3) の予測式は，以下に書き換えられる．

$$\tilde{V}_i(t+1) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M V_i(t_m+1) = \{\tilde{X}_i(t+1), \dots, \dots\} \quad (5)$$

これにより，前章と同様に後半の  $t = 1001 \sim 2000$  の  $X_i(t)$  を予測対象とし，予測値  $\tilde{X}_i(t)$  ( $t = 1001 \sim 2000$  および  $i = 1 \sim 100$ ) を求める．さらに，正解値との相関係数を計算することによって，ノードごとの予測精度  $\Gamma_i$  を得る．

まず図 6(b) に，前章と同様に予測精度の平均値  $\langle \Gamma_i \rangle_i$  を示す．予測モデルが異なるので  $\langle \gamma_i \rangle_i$  の結果と異なり，特に結合強度  $\epsilon$  が小さいときに他の要素からの影響が少ないので，1 変数による予測の有用性が顕著に現れている．

この予測精度の変化を軌道不安定性からの裏付けを行う場合，先と予測モデルが異なるので単純に図 5 と比較できない．よって次に，各ノードに注目するといったいわばミクロ的な視点より，ネットワーク中心性が最大リアプノフ指数や予測精度に与える影響力を調べるために，モデルパラメータである  $p$  と  $\epsilon$  を変えながら，クラスタ係数  $C_i(p, \epsilon)$ ，次数中心性  $K_i(p, \epsilon)$ ，近接中心性  $D_i(p, \epsilon)$ ，媒介中心性  $B_i(p, \epsilon)$  と，予測精度  $\Gamma_i(p, \epsilon)$  の関係を分析した．図 7，図 8，図 9，図 10 にそれぞれの相関図を示す．

図 7~10 によれば，ほぼ線形な関係性がうかがえるので，さらに詳細に分析するために各指標の相関係数を計算した．各指標  $C_i(p, \epsilon)$ ， $K_i(p, \epsilon)$ ， $D_i(p, \epsilon)$ ， $B_i(p, \epsilon)$ ， $\Lambda_{M_i}(p, \epsilon)$ ， $\Gamma_i(p, \epsilon)$

7 複雑システムにおけるネットワーク中心性が予測精度に与える影響

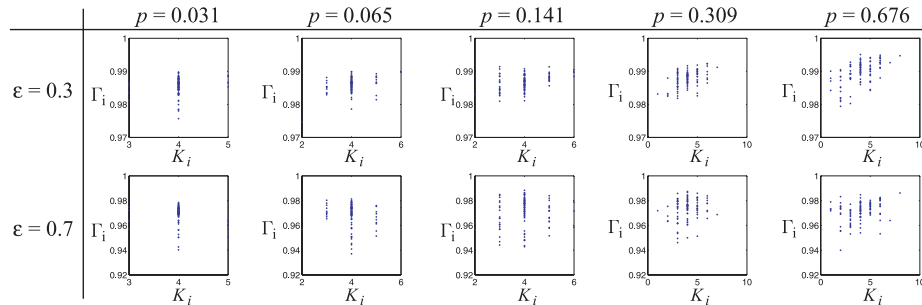


図 8 度数中心性  $K_i(p, \epsilon)$  と予測精度  $\Gamma_i(p, \epsilon)$  の相関図。ただし,  $i = 1, 2, \dots, 100$

Fig. 8 Correlation diagrams between the degree centrality  $K_i(p, \epsilon)$  and the prediction accuracy  $\Gamma_i(p, \epsilon)$ . Here,  $i = 1, 2, \dots, 100$ .

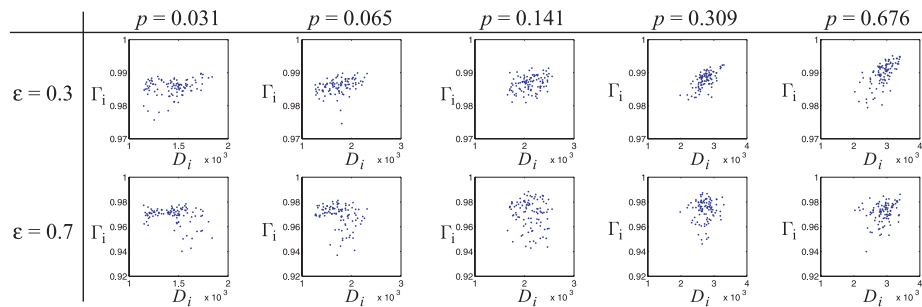


図 9 近接中心性  $D_i(p, \epsilon)$  と予測精度  $\Gamma_i(p, \epsilon)$  の相関図。ただし,  $i = 1, 2, \dots, 100$

Fig. 9 Correlation diagrams between the closeness centrality  $D_i(p, \epsilon)$  and the prediction accuracy  $\Gamma_i(p, \epsilon)$ . Here,  $i = 1, 2, \dots, 100$ .

は,  $i = 1 \sim 100$  のデータ系列である.

その結果を, 図 11, 図 12 に示す.

図 11(a) では, クラスタ係数と最大リアプノフ指数の強い負の相関関係を示し, それにともない図 12(a) では, クラスタ係数と予測精度の強い正の相関関係を示している. つまり, 高いクラスタ係数を持つ要素は, 軌道不安定性が減少するため予測しやすいといえる. また, 図 11(c) および図 12(c) からは近接中心性に関して反対のことがうかがえる. つまり, 高い近接中心性を持つ要素は軌道不安定性が増加するため, 予測が困難になるといえる. これは, 図 3 で示したように, クラスタ係数  $C_i$  と近接中心性  $D_i$  に負の相関関係があ

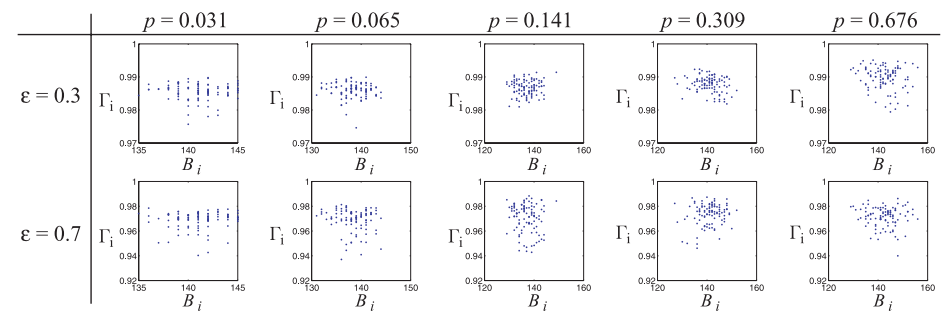


図 10 媒介中心性  $B_i(p, \epsilon)$  と予測精度  $\Gamma_i(p, \epsilon)$  の相関図。ただし,  $i = 1, 2, \dots, 100$

Fig. 10 Correlation diagrams between the betweenness centrality  $B_i(p, \epsilon)$  and the prediction accuracy  $\Gamma_i(p, \epsilon)$ . Here,  $i = 1, 2, \dots, 100$ .

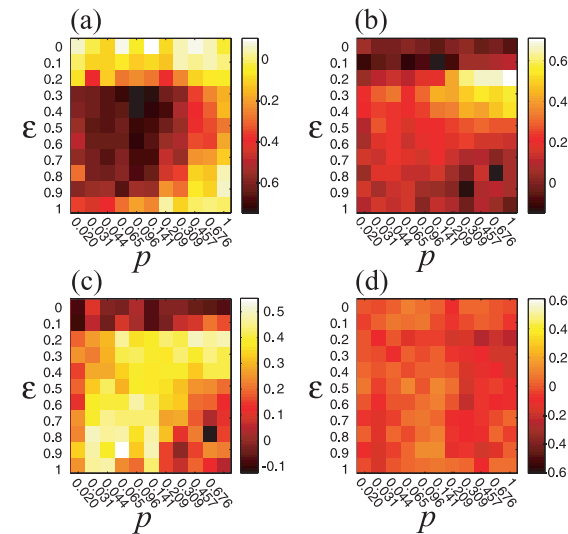


図 11 各ネットワーク中心性と最大リアプノフ指数  $\Lambda_{M_i}(p, \epsilon)$  の相関関係. 図 (a) はクラスタ係数  $C_i(p, \epsilon)$  と  $\Lambda_{M_i}(p, \epsilon)$ , 図 (b) は度数中心性  $K_i(p, \epsilon)$  と  $\Lambda_{M_i}(p, \epsilon)$ , 図 (c) は近接中心性  $D_i(p, \epsilon)$  と  $\Lambda_{M_i}(p, \epsilon)$ , 図 (d) は媒介中心性  $B_i(p, \epsilon)$  と  $\Lambda_{M_i}(p, \epsilon)$  の相関係数を示している. 各指標は,  $i = 1 \sim 100$  のデータ系列である

Fig. 11 Correlations between the maximum Lyapunov exponent  $\Lambda_{M_i}(p, \epsilon)$  and each centrality—(a) the cluster coefficient  $C_i(p, \epsilon)$ , (b) the degree centrality  $K_i(p, \epsilon)$ , (c) the closeness centrality  $D_i(p, \epsilon)$ , and (d) the betweenness centrality  $B_i(p, \epsilon)$ . Each index is a series of  $i = 1 \sim 100$ .

## 8 複雑システムにおけるネットワーク中心性が予測精度に与える影響

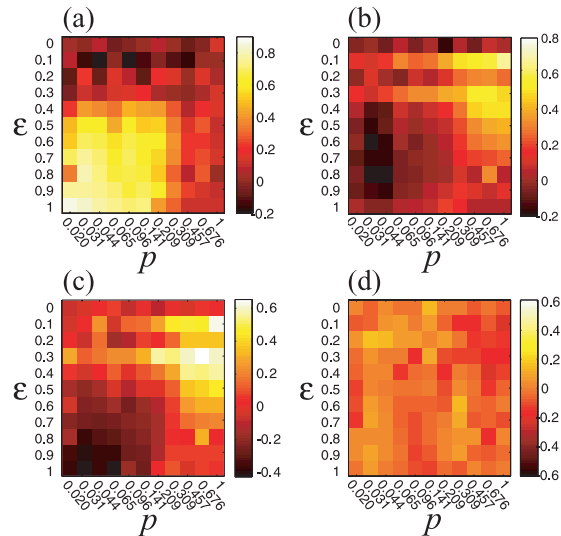


図 12 各ネットワーク中心性と予測精度  $\Gamma_i(p, \epsilon)$  の相関関係．図 (a) はクラスタ係数  $C_i(p, \epsilon)$  と  $\Gamma_i(p, \epsilon)$ ，図 (b) は次数中心性  $K_i(p, \epsilon)$  と  $\Gamma_i(p, \epsilon)$ ，図 (c) は近接中心性  $D_i(p, \epsilon)$  と  $\Gamma_i(p, \epsilon)$ ，図 (d) は媒介中心性  $B_i(p, \epsilon)$  と  $\Gamma_i(p, \epsilon)$  の相関係数を示している．各指標は， $i = 1 \sim 100$  のデータ系列である

Fig. 12 Correlations between the prediction accuracy  $\Gamma_i(p, \epsilon)$  and each centrality—(a) the cluster coefficient  $C_i(p, \epsilon)$ , (b) the degree centrality  $K_i(p, \epsilon)$ , (c) the closeness centrality  $D_i(p, \epsilon)$ , and (d) the betweenness centrality  $B_i(p, \epsilon)$ . Each index is a series of  $i = 1 \sim 100$ .

ことからもうかがえる．しかし一部の領域においては、軌道不安定性が増加するにもかかわらず、予測がしやすい場合も存在する．さらに、図 3 より、近接中心性  $D_i$  と次数中心性  $K_i$  に正の相関関係がうかがえるので、図 11 (b) および図 12 (b) の次数中心性に関する結果は、図 11 (c) および図 12 (c) と類似の傾向を示している．しかし、媒介中心性に関しては図 11 (d) および図 12 (d) に示すように、最大リアプノフ指数や予測精度に影響を与えないことが分かる．このように、媒介中心性以外のノードの中心性は、軌道不安定性に作用し、予測難易度に影響を与えることが分かる．

### 5. ま と め

本研究では、文献 4) と同様に WS モデルを用いて CML を構成し、ネットワーク構造を変えられる改良型 CML を分析対象とした．改良型 CML の各要素はネットワーク中心性と

いう個性を持っており、将来変動の予測難易度とネットワーク中心性との関係性について分析した．

本研究により得られた知見は、以下のとおりである．3.3 節における実験において、改良型 CML の振舞いについてマクロ的な視点より解析を行った結果、

- 改良型 CML のモデルパラメータである結合強度  $\epsilon$  やネットワーク構造  $p$  に応じて同期度やリアプノフ指数が変化し、それとともに予測難易度も変化する．たとえば、結合強度が強く、ランダムネットワークに近づくほど、同期が強まりシステムの振舞いは単純化する．さらにリアプノフ指数も低下し、予測精度は高くなる．
- 一方、結合強度が弱いほど、全変数による埋め込みは関係の弱い要素まで予測モデルに取り込むことになるので、予測精度は低下する．
- しかし、1 変数による埋め込みを行えば、関係の弱い要素を予測モデルに含めないことで、予測性能は比較的優れている．

この知見を株式市場の予測に適用するならば、互いの影響を強く受け合う企業の株価は互いに連動し、振舞いが単純化するので比較的予測しやすく、逆に、他の企業からの影響を受けにくい企業に対しては、1 変数（1 銘柄）による埋め込みが株価予測に適していると示唆される．しかし、これを実データより明らかにするには、まずデータからネットワーク構造や結合係数を推定する手法を確立する必要がある．ネットワーク構造の推定手法については、我々の先行研究 13)–15) などにおいても確立しつつある．また、実システムではダイナミクスやネットワーク構造が時変している可能性があるので<sup>15),16)</sup>、改良 CML で想定していない効果を分離して解析するために、解析データに対する前処理の方法を検討する必要がある．このように、実世界に存在するより複雑なシステムにおいて、本研究と同種の傾向を見いだすことは簡単ではないかもしれない．しかし基礎的モデルゆえ、一般の複雑システムに原理的に内在されている性質をとらえたと見なすことは可能である．

さらに、4 章における実験において、改良型 CML 上のノードの個性に応じた特性を調べるため、ミクロ的視点よりリアプノフ指数および予測難易度に関して分析した結果、

- ノードの中心性に応じて最大リアプノフ指数が変化し、それとともに予測難易度も変化する．
- 上記の関連性の強さは、改良型 CML のモデルパラメータによって変化する．
- ただし、媒介中心性においては最大リアプノフ指数や予測精度との関連性は見られない．通常の複雑システムの解析や予測では、状態空間内の軌道を再構成するために式 (4) を用いるので、4 章で得られた知見は特に重要である．



## 9 複雑システムにおけるネットワーク中心性が予測精度に与える影響

この知見についても株式市場の予測の観点から考察すれば、各企業の関連会社の多さ（ネットワーク中心性に対応）に応じて、株価変動の予測難易度が異なる可能性を示唆している。もしこのような性質が原理的に内在されているならば、予測難易度が低い企業を特定し、予測対象として絞り込みができる。今後、株式市場に限らず様々な実システムにおいてこの可能性を検討し、本研究により得られた知見が有効活用できる实例を見つけていきたい。さらに、ネットワーク中心性が予測精度に作用するメカニズムを検討することも今後の課題である。

なお、本研究の一部は、文科省科研費若手研究（スタートアップ）(No.18800061) のご支援により行われました。

### 参 考 文 献

- 1) 金子邦彦, 津田一郎: 複雑系のカオスのシナリオ, 朝倉書店 (1997).
- 2) Watts, D.J. and Strogatz, S.H.: Collective dynamics of small-world, *Nature*, Vol.393, pp.440–442 (1998).
- 3) Barabasi, A.L. and Albert, R.: Emergence of scaling in random networks, *Science*, Vol.286, pp.509–512 (1999).
- 4) de Oliveira, R. and Monteiro, L.H.A.: Clustering in coupled maps on small-world networks, *Proc. International Joint Conference on Neural Networks*, pp.337–340 (2003).
- 5) 増田直紀: 複雑ネットワークの基礎, 数理科学, No.518, pp.36–41 (2006).
- 6) Gade, P.M. and Hu, C-K.: Synchronous chaos in coupled map lattices with small-world interactions, *Physical Review E*, Vol.62, No.5, pp.6409–6413 (2000).
- 7) 池口 徹, 山田泰司, 小室元政: カオス時系列解析の基礎と応用, 合原一幸 (編), 産業図書 (2000).
- 8) Kaplan, J.L. and Yorke, J.A.: Chaotic behavior of multidimensional difference equations, Peitgen, H.O. and Walther, H.O. (Eds.), *Functional difference equations and approximations of fixed points*, Lecture Notes in Mathematics, Vol.730, pp.204–227, Springer Berlin (1979).
- 9) Lorenz, E.N.: Atmospheric predictability as revealed by naturally occurring analogues, *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol.26, pp.636–646 (1969).
- 10) Takens, F.: Detecting strange attractors in turbulence, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol.898, pp.366–381, Springer-Verlag (1981).
- 11) Sauer, T., Yorke, J.A. and Casdagli, M.: Embedology, *Journal of Statistical Physics*, Vol.65, No.3/4, pp.579–616 (1991).
- 12) Abarbanel, H.D.I. and Kennel, M.B.: Local false nearest neighbors and dynamical

dimensions from observed chaotic data, *Physical Review E*, Vol.47, No.5, pp.3057–3068 (1993).

- 13) Ueoka, Y., Suzuki, T., Ikeguchi, T. and Horio, Y.: Efficiency of Statistical Measures to Estimate Network Structure of Chaos Coupled Systems, *Proc. 2008 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'08)* (2008).
- 14) Ueoka, Y., Suzuki, T. and Yamamoto, S.: Available Partial Information to Estimate the Whole Structure of Complex Systems, *Proc. 2009 International Symposium on Nonlinear Circuits and Signal Processing (NCSP'09)* (2009).
- 15) Suzuki, T., Ueoka, Y. and Sato, H.: Combinatorial Optimization for Multivariate Nonlinear Prediction, *Proc. 2009 International Symposium on Nonlinear Circuits and Signal Processing (NCSP'09)* (2009).
- 16) Kaneko, S. and Suzuki, T.: Dynamical Optimization for Nonlinear Prediction, *Proc. 2009 International Symposium on Nonlinear Circuits and Signal Processing (NCSP'09)* (2009).

(平成 20 年 2 月 6 日受付)

(平成 20 年 4 月 7 日再受付)

(平成 20 年 7 月 1 日採録)



鈴木 智也 (正会員)

昭和 51 年生。平成 17 年東京理科大学大学院理学研究科物理学専攻博士課程修了。理学博士。同年東京電機大学工学部電子工学科助手、平成 18 年より同志社大学理工学部情報システムデザイン学科専任講師、現在に至る。複雑系、時系列解析、非線形現象等に関する研究に従事。電子情報通信学会、日本物理学会、人工知能学会各会員。



池田 真一

昭和 60 年生。平成 20 年同志社大学工学部情報システムデザイン学科卒業。同年 4 月より株式会社福岡 CSK 勤務。