

駆動振動子群の創発構造

田 中 ダ ン^{†1,†2}

細胞の内部状態の変化は、細胞群の集合形態や機能の変化をもたらす。非平衡下にある分子は、分子の内部状態の変化が、分子群の創発構造に影響を与える。このような内部状態を持つ素子の集合体に潜む、未知の数理構造を明らかにできれば、細胞集合体の機能コントロールや、有益な物性を持つ分子集合体創成に役立つだろう。未知の普遍的数理構造を明らかにするには、各々の系固有の事情を大胆に無視する数理モデル化が、しばしば有効である。この適切な“無視”を実現する数学手法の1つが縮約である。本稿では、この縮約を用いて、1つの数理モデルを導出する。導出されたモデルは、その単純さにもかかわらず、豊富な創発構造を呈する。いくつかの解析結果と広範な応用可能性も議論する。なお、このようにして得られるモデルは、具体的な系の詳細を説明できない代わりに、広く適用可能な抽象的数理概念の発見に役立つものである。発見された新奇概念に、系の詳細を考え合わせれば、その有益性は測り知れない。

Emergent Structure of Motile Oscillators

DAN TANAKA^{†1,†2}

We propose a general chemotactic model describing a system of interacting particles. The intended scope of this model is quite broad, including a wide range of chemical and biological systems consisting of a set of particles that interact in a variable manner. The particles in this model exhibit internal dynamics, and there exists a nonlinear coupling between particles that depends on their internal states. From this model, we derive a simpler model describing the phases and positions of the chemotactic particles by means of centre-manifold and phase reduction methods. We find that, despite its simplicity, the model obtained through this reduction exhibits a rich variety of patterns.

^{†1} 福井大学大学院工学研究科

Graduate School of Engineering, University of Fukui

^{†2} 科学技術振興機構さきがけ

Precuratory Research for Embryonic Science and Technology (PRESTO), Japan Science and Technology Agency (JST)

1. 導 入

1.1 構造・機能創発する素子集合体

動的な内部状態を持つ素子が空間に散在し、素子間の相互作用によって、素子の集合体が複雑な構造を創発する系は、以下のように多くみられる。たとえば、非平衡下にある分子群、遺伝子や蛋白質の内部ネットワークを持つバクテリア群¹⁾、反応拡散系などにおけるブリーザ群^{2),3)}、交通流・粒子流・生体分子モータなどのモデル (ASEP, 自己駆動粒子系など⁴⁾) における粒子群⁵⁾、BZ-AOT系のようなエマルジョン中の反応性液滴群⁶⁾、細胞性粘菌^{7),8)}、蟻などの社会性昆虫の集団、群れをなす魚などのネクトンや鳥の集団⁹⁾、解糖反応下のイースト菌群¹⁰⁾、などである。このような系では構造創発やパターン形成だけでなく、機能も創発する。たとえば、哺乳類において細胞の集団運動が生体組織を作るときに重要であるという報告や^{11),12)}、ある種の菌が集団運動することで病原性を増すという報告がある¹³⁾。また、単純なロボットの集合体 (Swarm-Robots, Modular-Robots) に高度な作業を担わせるという群知能の研究もさかんである¹⁴⁾。

1.2 抽象的なモデルを考える意義

上述のような系の1つを徹底的に掘り下げて研究することはもちろん重要である。たとえば、遺伝子や蛋白質の特定、それらの相互作用機序の解明を経て、ある遺伝子の発現を抑える投薬でバクテリア群の集合様式をコントロールし、病原性を落とすことも可能になるだろう。他方で、実際の現象を理想化した数理モデルを研究する場合もある。そこでは、「現実とは異なる」仮定を置くことすらある。それでも、こうした研究は以下の例のように有意義である。1カ月後の天気予報はほぼ当たらない。これはカオスの予測不可能性と関係する。すなわち、微小な観測誤差が、時間とともに指数関数的に増大する予測誤差を生むということである。このカオスの性質は、3変数常微分方程式でみられる。このような単純な数理モデルで、気象現象を再現できるはずはない。では、気象現象を再現するような大規模な数値計算をスーパーコンピュータを用いて行ったとして、カオスという数理概念を発見できただろうか。おそらく、膨大なデータに埋もれて、そこに潜む抽象的な概念抽出はきわめて難しいだろう。気象現象を到底再現できると思えない単純な数理モデルから、気象現象の一端を理解する数理概念が得られるということである。しかも、得られた概念は、気象以外にも適用可能なものである。たとえば、天体の多体運動にもカオスはみられるし、カオスを用いて、異種材料の効率的な混合を行うこともできる¹⁵⁾。このように、実際の現象を理想化し、ときには実際の現象とは無関係な仮定を置き、数理モデルを提案・解析することは、

2 駆動振動子群の創発構造

広く適用可能な新奇な数理概念構築に結び付く場合がある。ただし、やみくもに数式を書き下しても、その式からは何も得られない場合が多いのは当然である。

1.3 標準形を考える意義

新しい数理概念の発見が期待できる数理モデルを、どう構築するかが問題である。しかもその数理概念は一見異なる現象に広く適用可能であるほど、有益である。このような良質な数理モデルを導出するために、分岐点というものに注目する。分岐点とは、系の定性的性質が変わるパラメータ点のことである。たとえば大気圧下の水は、温度というパラメータが摂氏 0 度のときに、固体と液体の 2 状態を遷移する。この 0 度付近、すなわち分岐点近傍を探索するだけで、2 状態の定性的性質を同時に解析できる。しかも、分岐点での性質は普遍性が高い。上記の例でいうなら、水以外の物質であっても水の場合と同等な分岐点を持つ物質はすべて、その分岐点近傍では多くの共通の物理量が観測できる。このように分岐点に注目することで、普遍的現象を解析できる。方程式系は分岐点近傍で、より単純な方程式系で記述できて、このような単純化は縮約と呼ばれ^{*1}、得られる単純な方程式系は標準形と呼ばれる。そこで、本研究では新しいタイプの標準形を導出することを一目標とする。それにはまず、縮約のもととなる方程式系を提案しなければならない。筆者は、1.1 節に記載したような系に、未知なる数理機構が潜むと考えた。すなわち、「動的な内部状態を持つ素子が空間に散在し、素子間の相互作用によって、素子の集合体が複雑な構造を創発する系」を記述する 1 つの標準形を導出する。このような系についての先行研究はいくつかある^{16)–23)}。ただしここでは、特殊な境界条件が仮定されていたり、系固有の詳細を考慮するために普遍性を欠いていたりする。本研究では、1.1 節に記載した各々の系固有の事情は大胆に無視して、作為的な前提条件を極力仮定せずに、解析計算も可能な標準形を導出する。なお、このようにして導出される標準形は、具体的な系の詳細を説明できない代わりに、広く適用可能な抽象的数理概念の発見に役立つものである。発見された新奇概念に、系の詳細を考え合わせれば、その有益性は測り知れない。

1.4 本稿の構成

まず広いクラスの前モデルを紹介し、このモデルからどのような標準形が導出されるかを紹介する。さらにこの標準形から、素子の内部状態を位相と呼ばれる 1 変数で記述する位相方程式を導出する。数値計算を用いいくつかの創発構造を紹介した後、2 体問題の解析を行う。前提モデルのどのようなパラメータが重要であるかを議論し、最後にまとめと展望を

*1 この場合は特に、中心多様体縮約と呼ばれる。

述べる。縮約の過程は本稿では割愛するが、文献 24) に詳細を報告している。

2. 縮約によるモデル導出

2.1 前提とする広いクラスのモデル

まず、「動的な内部状態を持つ素子が空間に散在し、素子間に動的な相互作用のある系」のミニマムな設定を模索する。素子の内部状態を記述するダイナミクスの最も単純なものの候補として、リミットサイクル振動^{*2}があげられる²⁵⁾。そこで、単一の素子なんらかのパラメータ変化で、超臨界 Hopf 分岐^{*3}するとしよう。多数の素子が空間に分布しているとき、素子間相互作用の最も単純な候補は、拡散場を介するものだろう。拡散場があるとき、その勾配を感じて素子が駆動するというのも合理的である^{26),27)}。このような駆動を走化性駆動という。すなわちスタートポイントとして以下のモデルを提案する^{*4}。

$$\dot{X}_i(t) = f(X_i) + kg(S(r_i, t)), \quad (1)$$

$$m\ddot{r}_i(t) = -\gamma\dot{r}_i - \sigma(X_i)\nabla S|_{r=r_i}, \quad (2)$$

$$\tau\partial_t S(r, t) = -S + d\nabla^2 S + \sum_i h(X_i)\delta(r - r_i). \quad (3)$$

X_i は素子 i の内部状態を記述する実 n 次元のベクトルである。もし内部状態として n 種類の化学物質の濃度を考えるなら、その n 個の濃度変数を要素に持つベクトルが X_i である。 r_i は素子 i の実 D 次元空間での位置である。 X_i は素子固有のある関数 f で変化すると同時に、素子の外部の場 S の影響を受ける。この影響が任意関数 g と強度 k で表されている。 g の定数項 $g(0)$ は f に含めておけばよいので、一般性を失わずに $g(0) = 0$ とする。走化性駆動を仮定するので r_i は S の勾配で駆動され、これを $\sigma\nabla S$ と表す。 σ は X_i に依存する任意の $D \times D$ 行列である。定数 m と γ は各々、素子の質量と速度比例する粘性摩擦の係数である。素子間の相互作用すなわち情報伝達を担う場 S は、単純に拡散、崩壊する一方、素子によって生成、消費される。 d がその拡散係数を表し、崩壊率は一般性を失わず 1 としている。素子が内部状態に応じて S を生成、消費する状況を考えるので、 $h(0) = 0$ とする。

*2 擾乱を受けても安定な振動状態。単振子のような振動は、エネルギーの注入や散逸によって、振動の振幅が変化してしまう。これに対し、リミットサイクル振動は、自律的にエネルギー収支のバランスを保ち、振幅や振動数を一定に保つ振動である。

*3 微小振幅のリミットサイクル振動を生じさせる分岐。

*4 導入の節で筆者の意図が伝わっていれば幸いであるが、改めて述べると、直接このモデルが鳥の群れなどを記述するとは考えていないし、それを目指すわけでもない。このモデルを前提にして、新奇な数理概念を探求することが目的である。

3 駆動振動子群の創発構造

このほかには h の関数形に仮定を置かず任意である。 τ は S の時定数である。この τ も含めいくつかの定数は変数変換や座標変換で消し去れるものの、後の議論のために残しておく。

素子の内部ダイナミクスとしてリミットサイクル振動を採用するので、 f が何らかの分岐パラメータ μ を内包して、 $\mu = +0$ で超臨界 Hopf 分岐するとしよう。この分岐点においてどのような標準形が導出されるかを次に見てゆく。

(なお、上述のモデルは後の議論に影響を与えずにさらに一般化可能である)。

2.2 標準形

まず $k = 0$ の場合、すなわち $\dot{X}(t) = f(X)$ を考える。この場合、 $\mu = +0$ で、以下の Stuart-Landau 方程式が導出されると広く知られている²⁸⁾。

$$\dot{A}(t) = \mu\lambda_+ A - \beta|A|^2 A. \quad (4)$$

A はリミットサイクル振動の複素振幅を表し、 λ_+ と β は、 $f(X)$ の関数形に依存する複素パラメータで $O(\mu^0)$ ($= O(1)$) である。

次に $k \neq 0$ の場合を考える。素子の内部ダイナミクス f と素子間相互作用 kg とが同程度に効く状況を考えなければならない。これには、 $k = O(\mu)$ が必要である。この条件の導出には複雑な数式がともなうため、ここでは以下のように説明するにとどめておく(本稿で扱うモデルは文献 29) や 30) の非局所結合振動子系^{*1}の拡張系でもあるため、これらの文献にある導出過程も参照されたい)。もし k がより大きければ、強すぎる素子間相互作用で素子固有の振動的内部状態が停止する場合がある。たとえば素子として、周期的な生理活性を示す細胞を想定するなら、内部振動の停止は細胞としての機能停止を意味する。したがってこのような k は本稿の趣旨に沿わない。他方、 k がより小さければ、素子内状態は弱すぎる素子間相互作用の影響を受けず、孤立素子として振る舞う。したがってこのような k も本稿の趣旨に沿わない。こうして避け難く $k = O(\mu)$ が要求される。この条件のみで、以下の数理モデルが導出できる。

$$\dot{A}_i = A_i - (1 + ic)|A_i|^2 A_i + \chi \mathcal{M}(r_i), \quad (5)$$

$$\dot{r}_i = -\bar{A}_i \nabla \mathcal{M}(r)|_{r=r_i} + c.c., \quad (6)$$

ここで A_i と r_i は各々、素子 i の、Hopf 振動の複素振幅と位置座標である。 \bar{A}_i は A_i の複素共役を表す。 $c.c.$ は、その手前にある項の複素共役を表す。 \mathcal{M} は素子の感じる局所平均

場^{*2}で、結合関数 G とともに次で定義される。

$$\mathcal{M}(r) \equiv \sum_i A_i G(r_i - r), \quad (7)$$

$$G(r) \equiv \int \frac{dq}{(2\pi)^D} \frac{be^{iq \cdot r}}{\rho^2 + q^2}. \quad (8)$$

D は空間次元、 c は実定数、 χ 、 b 、 ρ は複素定数である。これらの変数、定数は、前節の X_i 、 S 系の変数、定数と付録に記載の関係にある。

ラフにいうなら、 \mathcal{M} は先の S に対応する情報伝達場である。この場を、Stuart-Landau 振動する各素子が感受率 χ で感じる。素子 i は、場所 r に $A_i G(r_i - r)$ という量の情報伝達物質を与えている。この量を全素子で足し合わせたものが、場 $\mathcal{M}(r)$ である。

なおこの標準形で慣性項^{*3}が現れないことに注意されたい。この標準形は超臨界分岐後の緩慢な時間変化を記述する式であるため、時間の2階微分を持つ慣性項は微小になり、粘性極限^{*4}をとらなくても慣性項は無視できるようになる。同様に、結合関数 G には時間非局所性が含まれない^{*5}。本来 S は X の汎関数であり、時空間非局所性を持つ。しかし、 A_i 、 r_i の臨界減速^{*6}による長い時間スケールに比べ、 S の表式に現れる時間積分範囲は無限小となり、結局 \mathcal{M} には空間非局所性のみが残る。ただし、後に述べるように、 S の時定数 τ が零でない効果は、結合関数 G に重要な性質を与える。

標準形は分岐点近傍で導出された。このため標準形は、前提モデルの狭いパラメータ空間のみを記述すると思われるかもしれない。しかし、他の分岐が起きるまでの広いパラメータ空間での定性をとらえ、また、いくつかの定量的性質までも明らかにできるのが標準形である。一般的な前提モデルにおいて、解析すべき重要なパラメータ空間を絞り出せたともいえる。さらにいうなれば、前提モデルと同様の組織中心を持つ他の系さえも記述できるのが標準形であり、これをもって普遍的数理構造の探求が可能になるのである。

2.3 位相縮約

前述のように、強すぎる素子間相互作用によって、素子内ダイナミクスが素子の孤立状態と大きく異なる場合は、本稿の趣旨に沿わない。すなわち、素子の内部状態がリミットサ

*1 結合振動子系とは、振動子が相互作用する系のこと。隣接振動子間の相互作用のみがある場合、局所結合振動子系と呼ぶ。どの振動子も他のすべての振動子と相互作用している場合、大域結合振動子系と呼ぶ。非局所結合振動子系とは、局所と大域との中間的な相互作用を持つ結合振動子系である。

*2 平均場とは、全空間での場の平均を意味する。 r における局所平均場とは、 r の近傍のある範囲で場を平均したものである。

*3 質量 m を含む項。

*4 $\gamma/m \rightarrow \infty$ の極限。

*5 G の定義式に、時間積分が現れない。

*6 分岐点近傍において、物理量の緩和時間が大きくなること。

4 駆動振動子群の創発構造

イクル近傍にある場合にこそ着目しよう。これは χ が小さい場合に実現される。このとき、リミットサイクル $A(\phi) = e^{-i c \phi}$ 上に射影されたダイナミクスを導出できれば、解析を容易たらしめるだろう。この数学手法は位相縮約と呼ばれ²⁸⁾、 χ が小さい場合に先の標準形から以下の位相方程式が導出できる。

$$\dot{\phi}_i(t) = 1 + (\kappa P_i + c.c.), \quad (9)$$

$$\dot{r}_i(t) = -\nabla_{r_i} P_i + c.c. \quad (10)$$

ϕ_i が素子 i の内部状態を表す位相である。c.c. は、その直前項の複素共役を表す。素子間相互作用は、

$$P_i \equiv \sum_{j \neq i} e^{-i c (\phi_j - \phi_i)} G(r_j - r_i) \quad (11)$$

を通してなされる。 κ は複素数パラメータで $\kappa \equiv (1 + i/c)\chi/2$ である。

2.4 結合関数

あらゆる空間次元において結合関数 G は次式を満たす。

$$(\rho^2 - \nabla^2)G(r) = b\delta(r). \quad (12)$$

空間 1, 2, 3 次元での G の具体形は次のとおりである。

$$G^{D=1}(r) = \frac{b}{2\rho} e^{-\rho|r|}, \quad (13)$$

$$G^{D=2}(r) = \frac{b}{2\pi} K_0(\rho|r|), \quad (14)$$

$$G^{D=3}(r) = \frac{b}{4\pi} \frac{e^{-\rho|r|}}{|r|}. \quad (15)$$

ここで、 K_0 は複素指数を持つ第 2 種変形ベッセル関数である。Hopf 振動数を ω と表せば、付録に記載のとおり、

$$\rho = \sqrt{(1 + i\omega\tau)/d} \quad (16)$$

であるから、 S の時定数 τ が零でない限り ρ は虚部を持つ。このため $\tau \neq 0$ では、あらゆる空間次元で $G(r)$ は距離 $|r|$ が変化すると振動する。また、 $G(r)$ は距離 $|r|$ が増すと減衰し、その減衰長は $r_c \equiv 1/\text{Re}\rho$ である。このように結合関数の重要な性質として、距離の増加で減衰振動する点があげられる。実際この性質によって系に多様な創発構造が生まれる。図 1 は数値計算による空間パターンの例である。

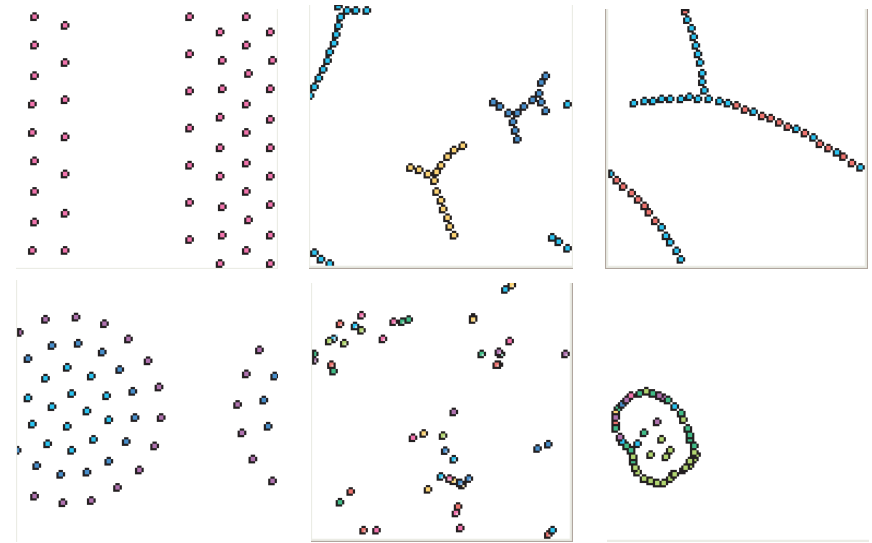


図 1 素子の 2 次元空間における分布のスナップショット。色は、素子の内部状態 ϕ を表す。今回、素子として質点を採用したが、可視化のため大きさを持たせて図示している。周期境界条件（ただし、結合関数 G は距離が増すと指数関数的に減衰するため、十分大きな系において境界条件は重要ではない）。上段は左から、crystal, branch (small), branch (large)、下段左は firework の各相の典型的漸近状態で、素子の空間配置は時間的にほとんど変化しない。下段中は gas, 下段右は cell membrane の各相の典型的漸近状態で、素子の空間配置は時間的に変化し、特に cell membrane は素子群の集合形態をほぼ保持したまま動きまわる（間欠的な変化はある）。初期条件は一様乱数で与えている。ノイズは印加していない

Fig. 1 Snapshots of particle distribution in two-dimensional space. Color represents intra-particle state ϕ . Although we have adopted a point particle in this paper, we plot its position with a finite size to facilitate visualization. Boundary conditions are periodic (Because $G(r)$ decreases exponentially as the distance of elements r increases, the boundary conditions are not important in sufficiently large system size). Top figures, from left to right, show crystal, branch (small), branch (large). Bottom figures, from left to right, show firework, gas, cell membrane.

3. 解 析

3.1 近似： $G = G^{D=1}$

結合関数の重要な性質は距離が増すと減衰振動することである。この性質は空間 1 次元における $G^{D=1}$ にも現れている。そこで簡単のために、あらゆる空間次元で $G = G^{D=1}$ と

する近似を行う．

$\psi_i \equiv c\{\phi_i - [1 + (\kappa G(0) + c.c.)]t\}$ と変数変換し，座標変換 $r_i \rightarrow r'_i \equiv \text{Re}\rho r_i$ ， $t \rightarrow t' \equiv |\kappa b/\rho|t$ をしてから，プライム記号を省くと，

$$\dot{\psi}_i(t) = \sum_{j \neq i} e^{-|R_{ji}|} \sin(\Psi_{ji} + \alpha|R_{ji}| - c_1), \quad (17)$$

$$\dot{r}_i(t) = c_3 \sum_{j \neq i} \hat{R}_{ji} e^{-|R_{ji}|} \sin(\Psi_{ji} + \alpha|R_{ji}| - c_2), \quad (18)$$

となる．ここで $R_{ji} \equiv r_j - r_i$ ， $\hat{R}_{ji} \equiv R_{ji}/|R_{ji}|$ ， $\Psi_{ji} \equiv \psi_j - \psi_i$ である．パラメータは素子数とシステムサイズと以下の4つの計6つである． $c_1 \equiv \arg(c\kappa b/\rho) - \pi/2$ ， $c_2 \equiv \arg(-b) - \pi/2$ ， $c_3 \equiv \text{Re}\rho/|c\kappa| (> 0)$ ， $\alpha \equiv \text{Im}\rho/\text{Re}\rho (> 0)$ ．

3.2 2体問題

多体系のメソスケールの数理構造を解析することは一般に難しい．そこで，2体問題を考える．すなわち，素子が2つしかない場合，あるいは，ある素子の近傍に1つの素子しかない場合を考える．この解析で図2の状態に対する部分的な解釈を与えられる．

2体系においては， \dot{r}_i は \hat{R}_{ji} と平行であるから，素子はいつも \hat{R}_{ji} に沿って動き，このラインは時間的に変化しない．そこでスカラー $\hat{R}_{21}|_{t=0} \cdot r_i$ を改めて r_i と定義すると，2体の相対関係 $\Psi \equiv \psi_2 - \psi_1$ と $R \equiv r_2 - r_1$ は

$$\dot{\Psi} = -2e^{-|R|} \cos(\alpha|R| - c_1) \sin \Psi, \quad (19)$$

$$\dot{R} = -2c_3 \frac{R}{|R|} e^{-|R|} \sin(\alpha|R| - c_2) \cos \Psi \quad (20)$$

に従う．第1式を第2式で割れば変数分離できて第1積分が求まる：

$$|\sin \Psi| = E e^{a_1|R|} |\sin(\alpha|R| - c_2)|^{a_2}. \quad (21)$$

ここで $a_1 \equiv \sin(c_1 - c_2)/c_3$ ， $a_2 \equiv \cos(c_1 - c_2)/(\alpha c_3)$ である ($\alpha = 0$ や $c_3 = 0$ の場合も

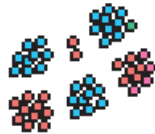


図2 図1と同様に図示した clustered clusters 相の典型的スナップショット．素子の空間配置は時間的に変化し，素子群の集合形態をほぼ保持したまま動きまわる（間欠的な変化はある）

Fig.2 Clustered clusters shown in the same manner as Fig.1.

同様に計算できる)． E は初期値 $\Psi(0)$ ， $R(0)$ で決まる保存量^{*1}である．このように，2体の相対関係は不変曲線 Eq.(21) 上を動く．すなわち，ひとたび位相，位置の初期値が与えられると1つの E が決まり，この E の値に対応する不変曲線が1本引ける．そしてこの不変曲線上に2体の相対関係は拘束される．曲線上での代表点の動きは，Eq.(19) と Eq.(20) で決まる．図3は不変曲線の一例である．

図脚注に述べたように，同期状態では $R = c_2/\alpha \bmod (\pi/\alpha)$ である．実際 clustered clusters で，同位相の近傍素子は c_2/α 程度の距離を保って離れている．また，同期したクラスタ^{*2}は，それと反位相に同期したクラスタと $c_2/\alpha + \pi/\alpha$ 程度のスペースを空けて配置されている．

当然ながら，図2は多体相互作用により形成されている構造である．この形成過程などの理解には，本節の2体系の解析を超えたアプローチが必要だろう．

3.3 パラメータ解釈

3.3.1 同期時のオフセット距離 c_1 の決定要因

1. 素子固有振動数の振幅依存性
2. X と S の時定数比
3. 素子内ケミカルのうち， S の影響を受ける成分と S へ影響を及ぼす成分との相違性

3.3.2 同期時のオフセット距離 c_2 の決定要因

1. 素子内ケミカルのうち，素子移動に関わる成分と S へ影響を及ぼす成分との相違性

3.3.3 素子の位置と内部状態の時定数比 c_3 の決定要因

1. 「素子内ケミカルのうち，どの成分が S へ影響を及ぼすか」以外のすべて

3.4 遅延相互作用が生む空間スケール

素子が互いに自発的に有限距離を保つという，実効的な排除体積効果が生じることは先に述べたとおりである．そこでは， $1/\alpha$ という空間スケールが現れた．これは，Eq.(17)，Eq.(18) で， α が波数^{*3}の役割を果たしていることから理解できる．

$\alpha (\equiv \text{Im}\rho/\text{Re}\rho)$ で， $\rho \equiv \sqrt{(1+i\omega\tau)/d}$ であるから， $\omega\tau \neq 0$ においてのみ $\alpha \neq 0$ となる． $\omega\tau$ は素子内状態の時間スケール $1/\omega$ と，素子間相互作用を媒介する場の時間スケール τ との比である．すなわち，情報伝達の遅延 $\tau \neq 0$ が，相互作用長 $r_c (\equiv 1/\text{Re}\rho)$ 以外の新たな空間スケールを生んでいる．

*1 時間的に変化しない量．

*2 いくつかの素子が寄り集まったもの．

*3 単位空間にいくつの波があるかを表す量．波長を λ とすると，波数は $2\pi/\lambda$ で定義される．

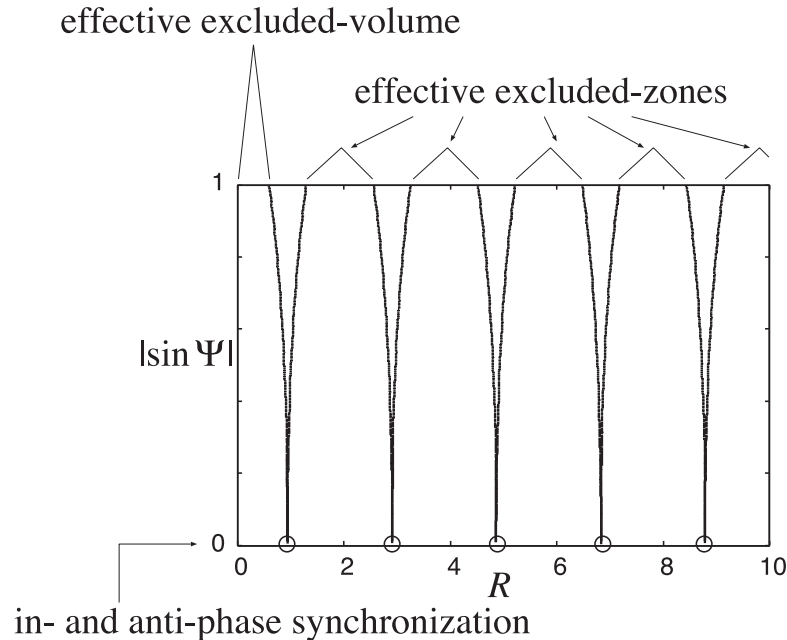


図 3 $E = 1.3$ での不変曲線 Eq. (21). パラメータは clustered clusters の場合と同一. 2 素子が同位相 $\Psi = 0$ または逆位相 $\Psi = \pi$ で同期している場合は, $\sin \Psi = 0$ であるから, 2 素子間距離 R は近似的に $1, 3, 5, \dots$ でなければならない. 他方, \sin 関数の値域から $|\sin \Psi| \leq 1$ でなければならないので, 不変曲線の存在しない $R \sim 0, 2, 4, \dots$ は実現しない. すなわち, 実効的な排除体積や実効的な進入禁止範囲があることになる. 不変曲線上の代表点の流れは Eq. (19) と Eq. (20) で決まる. この式は 2 変数常微分方程式なので, 代表点は閉軌道を描くか, 固定点へ至る. 図では縦軸を $|\sin \Psi|$ としたため, 代表点の流れは縮退する. Eq. (19) と Eq. (20) から, $R \sim 1, 3, 5, \dots$ に安定固定点があることが分かる. すなわち 2 素子系では, 2 素子が上記の奇数程度の距離を保ちつつ, 同位相または逆位相で同期する状態が安定である

Fig. 3 Invariant curve Eq. (21) with $E = 1.3$. \circ represent stable fixed points.

4. ま と め

走化性を示すリミットサイクル振動子の集合体に対し, 振動子の超臨界 Hopf 分岐点近傍において中心多様体縮約を実行した. その過程では, 素子内ダイナミクスと素子間相互作用のバランスを意味する $k = O(\mu)$ という条件が必然的に要求された. この条件以外にはなんら仮定は置かれていない. 導出された標準形はパラメータ変化のみで多様な創発構造を呈す

る. 系の挙動を豊かにする重要な要因は, 素子の内部振動と, 振動性の素子間相互作用である.

標準形を位相縮約し, いくつかの解析を紹介した. そこでは, 質点素子間^{*1}に実効的な排除体積が生じることや, 情報伝達の遅れが付加的な空間スケールを生むことを示した.

5. 今後の展開

テレビ中継放送などの通信一般において, 情報伝達は速い方が便利であるが, 本稿の系のように遅れを積極的に利用することで, 豊かな構造創発を可能たらしめるということは興味深い. このような機構の実現例を探索し, なんらかの数理的提言ができればと考えている.

前提とした走化性リミットサイクル振動子群のモデル自体, 広いクラスをなす一般的なものであるが, 縮約系を議論するときその前提モデルにしばられることはない. 実際, 導出した位相モデルは流動的なスピングラス系ととらえられる: 図 4 (b)^{31),32)}. スピングラス系は広く研究されているが, スピンの重心運動を考慮したモデルの研究は, あまりみかけない. 走化性振動子系が, このような系と同一になることは興味深い. 本稿で紹介した豊かな創発構造のいくつか, スピン系での新たな物理現象に対応し, 有益で重要な物性の発見に結び付く可能性がある. なお, 空間は便宜的なものであって, $r_i - r_j$ をネットワーク上の素子 i, j 間のリンク強度ととらえれば, 導出された位相モデルはダイナミカルネットワークととらえられる: 図 4 (a). こうとらえれば, 本稿で紹介した cell membrane や clustered clusters は, 自発的に形成されたスモールワールド “的” ネットワークとモジュラーネットワークといえる^{*2, 33)-35)}. 場合分けや閾値などを用いて, 離散的にこのようなネットワークを構成できることは知られている. しかし, 連続的な偏微分方程式系でこのようなネットワークを自己組織化するモデルは, 著者の知る限り先例がない. 偏微分方程式系ならではの数学手法も多いため, 本稿のモデルを用いて, このような特徴的ネットワークの形成過程の解析が進むと期待される. 近年急速に発展しているソーシャルネットワーキングサービスは, 旧来のウェブページに比べ, 個々のサイト更新と, サイト間リンクの更新とが速いと思われる. これは, ネットワークの静的構造だけでなく動的構造が注目されつつある傾向を示しているように思える. このようなダイナミカルネットワークの解析は, 今後ますます重要

*1 質点とは, 体積を持たない理想的な点のこと.

*2 当然ながら, これらの相は 2 次元空間におけるものであるため, ネットワークを議論するには高次元空間における振舞いをみなければならない. また, スモールワールドであると断定するには, その定義に沿うことを定量的に示さなければならないのは当然であるが, 本稿では割愛する.

7 駆動振動子群の創発構造

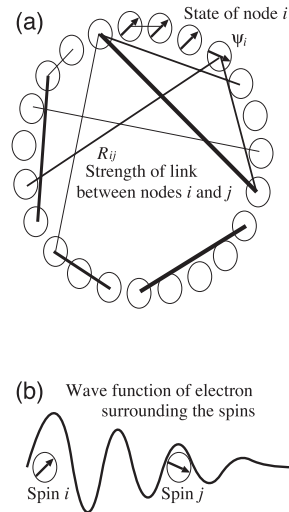


図 4 本稿で導出したモデルと多様な系との関連 . (a) ダイナミカルネットワーク (b) 流動的なスピングラス
 Fig. 4 Relation to various systems. (a) Dynamical network, (b) Fluid spin glass.

になると予想され、本稿で導出したモデルやそれにまつわる今後の研究の進展にともない、なんらかの新たな視点を提供できればと考えている。

謝辞 We thank H. Daido, K. Fujimoto and A. Pikovsky for valuable comments, S. K. Han, M. Nagayama and H. Nagao for suggestions for possible application of our models, Y. Kawamura, H. Kori, H. Nakao and H. Kiatahata for critical reading of the manuscript and I. Tsuda, A.S. Mikhailov, K. Showalter, H. Fujisaka, T. Nakagaki, K. Aihara, D. Kurabayashi, A. Ishiguro, A. Awazu, S. Nakata, M. Sano, K. Sato, T. Shibata and Y. Kuramoto for encouragement. This work was partially supported by a Grant-in-Aid for Young Scientists (Start Up), No.18840020, 2006, from the Japan Society for the Promotion of Science. また、査読していただいた方々には、貴重なご意見をいただきました。ここに感謝いたします。

参 考 文 献

1) Zhou, T., Chen, L. and Aihara, K.: Molecular communication through stochastic synchronization induced by extracellular fluctuations, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.95,

p.178103 (2005).
 2) Mimura, M., Nagayama, M. and Ohta, T.: Non-annihilation of travelling pulses in reaction-diffusion systems, *Methods and Applications of Analysis*, Vol.9, pp.493–516 (2002).
 3) Nishiura, Y., Teramoto, T. and Ueda, K.I.: Scattering of traveling spots in dissipative systems, *Chaos*, Vol.15, p.047509 (2005).
 4) Vicsek, T., Czirók, A., Ben-Jacob, E., Cohen, I. and Shochet, O.: Novel type of phase transition in a system of self-driven particles, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.75, pp.1226–1229 (1995).
 5) Jop, P., Forterre, Y. and Pouliquen, O.: A constitutive law for dense granular flows, *Nature*, Vol.441, pp.727–730 (2006).
 6) Vanag, V.K. and Epstein, I.R.: Inwardly rotating spiral waves in a reaction-diffusion system, *Science*, Vol.294, pp.835–837 (2001).
 7) Matsushita, M., et al.: Colony formation in bacteria: Experiments and modeling, *Biofilm*, Vol.1, pp.305–317 (2004).
 8) Rappel, W.J., Nicol, A., Sarkissian, A., Levine, H. and Loomis, W.F.: Self-organized vortex state in two-dimensional dictyostelium dynamics, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.83, pp.1247–1250 (1999).
 9) Götmark, F., Winkler, D.W. and Andersson, M.: Flock-feeding on fish schools increases individual success in gulls, *Nature*, Vol.319, pp.589–591 (1986).
 10) Dano, S., Sorensen, P.G. and Hynne, F.: Sustained oscillations in living cells, *Nature*, Vol.402, pp.320–322 (1999).
 11) Velicer, G.J. and Yu, Y.T.: Evolution of novel cooperative swarming in the bacterium *Myxococcus xanthus*, *Nature*, Vol.425, pp.75–78 (2003).
 12) Huang, S., Brangwynne, C.P., Parker, K.K. and Ingber, D.E.: Symmetry-breaking in mammalian cell cohort migration during tissue pattern formation: Role of random-walk persistence, *Cell Motil Cytoskeleton*, Vol.61, pp.201–213 (2005).
 13) Allison, C., Coleman, N., Jones, P.L. and Hughes, C.: Ability of *Proteus mirabilis* to invade human urothelial cells is coupled to motility and swarming differentiation, *Infect Immun*, Vol.60, pp.4740–4746 (1992).
 14) Bonabeau, E., Dorigo, M. and Theraulaz, G.: *Swarm Intelligence: From Natural to Artificial Systems*, Oxford Univ. Press, New York, USA (1999).
 15) Funakoshi, M.: Lagrangian chaos and mixing of fluids, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Vol.18, pp.613–626 (2001).
 16) Zanette, D.H. and Mikhailov, A.S.: Dynamical systems with time-dependent coupling: Clustering and critical behaviour, *Physica D*, Vol.194, pp.203–218 (2004).
 17) Shibata, T. and Kaneko, K.: Coupled map gas: Structural formation and dynamics of interacting motile elements with internal dynamics, *Physica D*, Vol.181, pp.197–

- 214 (2003).
- 18) Shimoyama, N., Sugawara, K., Mizuguchi, T., Hayakawa, Y. and Sano, M.: Collective motion in a system of motile elements, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.76, pp.3870–3873 (1996).
- 19) Ito, J. and Kaneko, K.: Spontaneous structure formation in a network of chaotic units with variable connection strengths, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.88, p.028701 (2002).
- 20) Sawai, S. and Aizawa, Y.: Coupled oscillators with chemotaxis, *J. Phys. Soc. Japan*, Vol.67, pp.2557–2560 (1998).
- 21) Seliger, P., Young, S.C. and Tsimring, L.S.: Plasticity and learning in a network of coupled phase oscillators, *Phys. Rev. E*, Vol.65, p.041906 (2002).
- 22) Inoue, M. and Kaneko, K.: Condition for intracellular adaptive dynamics for chemotaxis, *Phys. Rev. E*, Vol.74, p.011903 (2006).
- 23) Czirók, A. and Vicsek, T.: Collective behavior of interacting self-propelled particles, *Physica A*, Vol.281, pp.17–29 (2000).
- 24) Tanaka, D.: General Chemotactic Model of Oscillators, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.99, p.134103 (2007).
- 25) Pikovsky, A., Rosenblum, M. and Kurths, J.: *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (2001).
- 26) Miyake, Y., Tabata, S., Murakami, H., Yano, M. and Shimizu, H.: Environment-dependent self-organization of positional information field in chemotaxis of *Physarum Plasmodium*, *J. Theor. Biol.*, Vol.178, pp.341–353 (1996).
- 27) Mimura, M. and Tsujikawa, T.: Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth, *Physica A*, Vol.230, pp.499–543 (1996).
- 28) Kuramoto, Y.: *Chemical Oscillation, Waves, and Turbulence*, Springer, New York, USA (1984); Dover Edition (2003).
- 29) Tanaka, D. and Kuramoto, Y.: Complex Ginzburg-Landau equation with nonlocal coupling, *Phys. Rev. E*, Vol.68, p.026219 (2003).
- 30) Tanaka, D.: Chemical turbulence equivalent to Nikolavskii turbulence, *Phys. Rev. E*, Vol.70, p.015202(R) (2004).
- 31) Hatchett, J.P.L., Castillo, I.P., Coolen, A.C.C. and Skantzos, N.S.: Dynamical replica analysis of disordered Ising spin systems on finitely connected random graphs, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.95, p.117204 (2005).
- 32) Wemmenhove, B., Nikolettopoulos, T. and Hatchett, J.P.L.: Replica symmetry breaking in the ‘small world’ spin glass, *J. Stat. Mech.: Theory and Experiment*, Vol.2005, p.11007 (2005).
- 33) Watts, D. and Strogatz, S.: Collective dynamics of ‘small-world’ networks, *Nature*, Vol.393, pp.440–442 (1998).
- 34) Barabási, A.L. and Albert, R.: Emergence of scaling in random networks, *Science*,

Vol.286, pp.509–512 (1999).

- 35) Holme, P., Kim, B.J., Yoon, C.N. and Han, S.K.: Attack vulnerability of complex networks, *Phys. Rev. E*, Vol.65, p.056109 (2002).

付 録

A.1 前提モデルと標準形とのパラメータ関係

$f(X)$ を形式的に X で展開すると

$$f(X) = LX + MXX + NXXX + \dots \quad (22)$$

ここに現れる f のヤコビ行列 L を μ で展開すると

$$L = L_0 + \mu L_1 + O(\mu^2). \quad (23)$$

M, N の μ 依存性は標準形には現れないのでそのままにしておく. L_0 の純虚数固有値を $\pm i\omega$ とおく. これに対応する左右固有ベクトルを U^*, U とする. これらの複素共役を \bar{U}^*, \bar{U} とすれば, 規格直交条件は

$$U^*U = \bar{U}^*\bar{U} = 1, \quad (24)$$

$$U^*\bar{U} = \bar{U}^*U = 0. \quad (25)$$

μ 依存する L の固有値を $\pm i\omega + \mu\lambda_{\pm} + O(\mu^2)$ と書けば,

$$\lambda_+ = \bar{\lambda}_- = U^*L_1U. \quad (26)$$

$$V_+ \equiv -(L_0 - 2i\omega)^{-1}MUU, \quad (27)$$

$$V_0 \equiv -2L_0^{-1}MU\bar{U} \quad (28)$$

とおくと

$$\beta = -2U^*MUV_0 - 2U^*M\bar{U}V_+ - 3U^*NUU\bar{U}. \quad (29)$$

$$\sigma_0 \equiv \frac{d\sigma}{dX}|_{X=0}, \quad (30)$$

$$h_0 \equiv \frac{dh}{dX}|_{X=0}, \quad (31)$$

$$g_0 \equiv \frac{dg}{dS}|_{S=0} \quad (32)$$

として

$$\zeta \equiv \frac{1}{\gamma}(U^* \cdot \sigma_0)(h_0 \cdot U), \quad (33)$$

$$\eta \equiv k(U^* \cdot g_0)(h_0 \cdot U) \quad (34)$$

とおく. ζ は, 複素数の要素を持つ $D \times D$ 行列であるが, 簡単のため, 対角行列でその要

9 駆動振動子群の創発構造

素がすべて等しい行列である場合を考える*1。この複素数の要素を、改めて ζ と書くことにすると

$$c = \text{Im}\beta/\text{Re}\beta, \quad (35)$$

$$\chi = \eta\text{Re}\beta/(\zeta\mu\text{Re}\lambda_+), \quad (36)$$

$$b = \zeta/d\text{Re}\beta, \quad (37)$$

$$\rho = \sqrt{(1+i\omega\tau)/d} \quad (38)$$

である。ここで $\eta = O(\mu)$ なので、標準形に現れる変数、定数はすべて μ 依存性が（当然ながら）スケールアウトされている。また、時空間座標変換と変数変換は適宜行っている。 X は A と次の関係にある。

$$X(t) = A(t)e^{i\omega t}U + c.c. + O(\mu) \quad (39)$$

ここで ω は Hopf 振動数で、 $c.c.$ は直前項の複素共役である。

A.2 ポテンシャル系になる 2 つの場合

κ が純虚数である場合、 $(\phi_i - t, r)$ はポテンシャル系に従う。

$|\kappa| \gg 1$ の場合、 $\phi_i - t$ が断熱消去されて、 r はポテンシャル系に従う。 $|\kappa| \gg 1$ は、たとえば素子の内部振動の振幅が 1 より十分に小さい場合である。

A.3 重心運動

Eq. (9) と Eq. (10) を見れば分かるように、 N 体系において、全素子が同位相同期しているなら素子群の重心は動かない。

A.4 時空間パターンの動画

文献 24) では Auxiliary Material (EPAPS) として、創発構造の経時変化の数例を動画で公開している。

(平成 19 年 12 月 11 日受付)

(平成 20 年 6 月 2 日再受付)

(平成 20 年 7 月 11 日採録)



田中 ダン

昭和 52 年生。平成 12 年京都大学理学部理学科卒業。平成 14 年京都大学大学院理学研究科物理学・宇宙物理学専攻修士課程修了。平成 17 年同博士課程修了。平成 16, 17 年は各々、日本学術振興会特別研究員 DC2, 同 PD として、ソフトモード乱流を生じる反応拡散系の解析に従事。平成 17 年より福井大学大学院工学研究科知能システム工学専攻講師。非線形動力学、結合振動子系、創発構造に関する研究に従事。平成 19 年科学技術振興機構さきがけ「数学と諸分野の協働によるブレイクスルーの探索」研究員を兼任（第 1 期生）し、離合する粒子多体系に関する研究に従事。京都大学博士（理学）。平成 19 年第 1 回日本物理学会若手奨励賞受賞。

*1 これは、 σ が対角行列、かつ、その対角要素がすべて等しい場合に対応。