情報処理学会論文誌　プログラミング　Vol. 2　No. 2　97–104 (Mar. 2009)

組合せ子の非循環性と関連する性質について

岩　見　宗　弘[†1]

Sumllyan は，書き換え規則 $\mathbf{L}xy \to x(yy)$ を持つ組合せ子 **L** と書き換え規則 $\mathbf{O}xy \to y(xy)$ を持つ組合せ子 **O** を提案した．本稿では最初に，Bergstra らの手法を一般化した組合せ子の非循環性に対する十分条件を与える．その十分条件を用いて，組合せ子 **L** と **O** の非循環性を示す．次に，組合せ子 **O** は停止性を持たないことを示す．さらに，Waldmann と同様の手法により組合せ子 **O** は非基礎ループ性を持つことを示す[⋆1]．

On the Acyclic and Related Properties of Combinators

Munehiro Iwami[†1]

Sumllyan proposed that combinator **L** with rewrite rule $\mathbf{L}xy \to x(yy)$ and combinator **O** with rewrite rule $\mathbf{O}xy \to y(xy)$. First, we give a sufficient condition for acyclic of combinators using the generalized method of Bergstra et al in this paper. We show that acyclic of combinators **L** and **O** using this condition. Next, we show that combinator **O** is not terminating. Furthermore, we show that combinator **O** admits no ground loops by similar method of Waldmann.

1. はじめに

組合せ子論理（combinatory logic）は，Curry ら[3]により考案され，帰納的関数の研究において歴史的に重要な役割を果たしてきた計算体系であり，論理や計算の基礎として重要である．組合せ子論理の計算対象は，組合せ子（combinator）と呼ばれる 2 つの定数 **S**, **K** と関数適用から構成される項であり，2 つの計算規則 $\mathbf{S}xyz \to xz(yz)$ と $\mathbf{K}xy \to x$ だけを持つ．組合せ子論理は λ 計算と深い関連があり，その性質や λ 計算との対応関係について様々な研究が行われている[1),3),4)]．また，組合せ子論理は関数型プログラミング言語の効率的な実装に応用されている．

Klop は λ 計算と組合せ子論理の違いの 1 つが循環書き換え（cyclic reduction），すなわち，項 M から同じ項 M へ到達するような書き換え $M \to M' \to \cdots \to M$ にあることを示した[7)]．書き換え $\to$ により項 M から得られる項全体の集合を書き換え関係 $\to$ に基づく M の書き換えグラフと呼び，$G(M)$ と表す．このとき，λ 計算においては，$G(M)$ が有限でありかつ循環書き換えを含むような項 M が存在する．その一方で，組合せ子論理においては，$G(M)$ が有限でありかつ循環書き換えを含むような項 M は存在しない[7)]．

組合せ子 **K** のみからなる計算体系を考えると，どのような計算も停止する．したがって，組合せ子 **K** のみからなる計算体系は循環性を持たない．一方，組合せ子 **S** のみからなる計算体系は停止性を持たない[1)]ため，循環性を持つか否かは自明ではない．そこで Bergstra らは組合せ子 **S** が非循環性（acyclic）を持つ（循環性を持たない）ことを示した[2)]．近年，Waldmann は，循環性より強い性質である基礎ループ性（ground loop）を提案し，組合せ子 **S** が非基礎ループ性を持つことを示した．さらに，組合せ子 **S** のみからなる項が正規形を持つか否かを決定する手続きを与えている[21)]．

一般の項を扱う計算モデルとして，項書き換えシステム（TRS）がよく知られている．組合せ子論理や組合せ子の書き換え規則は，TRS と見なすことができる．TRS に対する非循環性についても様々な研究が行われている．Plaisted は TRS の非循環性が一般的に決定不能であることを示している[14)]．一方，Ketema らは正則 TRS が弱停止性を持つならば非循環性を持つことを示している[6)]．また，非循環性をより強くした性質として非ループ性（non-loop）があるが，Middeldorp らは書き換え規則が 1 つの TRS の場合でさえ非ループ性が決定不能であることを示している[10)]．彼らの非ループ性の決定不能性の証明から，書き換え規則が 1 つの TRS の非基礎ループ性も決定不能であることが分かる．また，部分システムの性質から全体システムの性質が導かれることをモジュラ性と呼ぶが，正則 TRS において非循環性がモジュラであること[8)]や，(等式付き）TRS の非循環性と非ループ性のモジュラ性に関する研究も Middeldorp らにより行われている[12)]．

TRS では，様々な書き換え規則を一般的に取り扱う．同様に，様々な書き換え規則を持つ組合せ子を考えた場合，その性質はどのようになるのであろうか．このため，組合せ子 **S**，**K** 以外にも，論理学における構造に関する推論規則[16)]に関連する組合せ子 **B**，**C**，**W** や λ**I** 計算と密接な関係を持つ組合せ子 **J** 等，様々な組合せ子に関する研究が行われてい

---

†1 島根大学総合理工学部
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University

⋆1 本稿は，第 6 回 FIT 情報科学技術レターズ，pp.25–26 (2007)[5)]の拡張版である．

る[4),15)]．また，組合せ子 **L**，**O** で Turing の不動点組合せ子 **U**[1)] を表すことができる[17)]．組合せ子の書き換えが停止性を持つ場合はその非循環性は自明であるが，停止性を持たない組合せ子の非循環性は明らかでない場合も多い．

単純な書き換え規則を持つ組合せ子であるが停止性を持たない組合せ子として，書き換え規則 $\mathbf{L}xy \to x(yy)$ を持つ組合せ子 **L** がある[17)]．組合せ子 **L** が停止性を持たないことは Sprenger ら等により示されている[18),19)]．また，単純な書き換え規則 $\mathbf{O}xy \to y(xy)$ を持つ組合せ子 **O**[17)] は本稿で示すように停止性を持たない．これらの組合せ子の書き換え規則は，弱停止性と強停止性が一致するクラスに含まれるため[9),20)]，Ketema らの結果[6)] を利用して非循環性を示すこともできない．

本稿では，組合せ子 **L** および組合せ子 **O** に着目し，非循環性や非循環性に関連する性質について調べる．上記のように，組合せ子に基づく計算体系において非循環性は非常に重要な性質であると考えられる．このため，単純な書き換え規則を持つ組合せ子の非循環性について考察を行うことは，λ 計算や組合せ子に基づく計算体系やその関連性を考えるうえで重要である．

本稿は次のように構成される．3 章では，Bergstra ら[2)] の手法を一般化した組合せ子の非循環性に対する十分条件を与える．その十分条件を用いて，組合せ子 **L** と **O** の非循環性を示す．4 章では，組合せ子 **O** が停止性を持たないことを示す．5 章では，Waldmann が非基礎ループ性を示すために提案した手法[21)] を適用し，組合せ子 **O** が非基礎ループ性を持つことを示す．

2. 準　　備

本稿の定義は文献 2)，20)，21) に準ずる．本章では，組合せ子論理と項書き換えシステムの定義を与える．

2.1 組合せ子論理

組合せ子論理ついては文献 1) の第 7 章および文献 3)，4) を参照していただきたい．

以下では，記号 Z をある組合せ子とする．構文的等式を $\equiv$ で表す．**変数**の可算無限集合を $\mathcal{V}$ とする ($\{Z\} \cap \mathcal{V} = \emptyset$)． 組合せ子 Z 上の項の集合 $CL(Z,\mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する．(1) $\mathcal{V} \subseteq CL(Z,\mathcal{V})$，(2) $Z \in CL(Z,\mathcal{V})$，(3) s，$t \in CL(Z,\mathcal{V})$ ならば $(st) \in CL(Z,\mathcal{V})$． 集合 $CL(Z,\mathcal{V})$ の項を Z-**項**という．また，変数を含まない Z-項を**基礎** Z-**項**といい，基礎 Z-項全体の集合を $CL(Z)$ で表す．Z-**文脈**，すなわち，0 個以上のホール $\Box$ を含む Z-項の集合 $CL(\{Z,\Box\},\mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する．(1) $\mathcal{V} \subseteq CL(\{Z,\Box\},\mathcal{V})$，(2) $Z \in CL(\{Z,\Box\},\mathcal{V})$，(3) $\Box \in CL(\{Z,\Box\},\mathcal{V})$，(4) s，$t \in CL(\{Z,\Box\},\mathcal{V})$ ならば $(st) \in CL(\{Z,\Box\},\mathcal{V})$．1 つのホール $\Box$ を含む Z-文脈を $C[\,]$ で表す．$C[t]$ は Z-文脈 $C[\,]$ のホール $\Box$ を Z-項 t で置き換えた結果である．(st) を括弧を省略して単に st と書く．括弧は左結合である，すなわち，$s_1 s_2 \cdots s_n$ は $(\cdots(s_1 s_2)\cdots s_n)$ を意味する．Z-項 t に含まれている変数の集合を $Var(t)$ と表す．**代入** σ を $\mathcal{V}$ から $CL(Z,\mathcal{V})$ への定義域 $Dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \not\equiv x\}$ が有限である写像とする．代入 σ を $\{x \leftarrow \sigma(x) \mid x \in Dom(\sigma)\}$ と表す．すべての代入 σ はある組合せ子 Z と Z-項 $B_1,\cdots,B_n$ に対して，$\sigma(ZB_1\cdots B_n) = Z\sigma(B_1)\cdots\sigma(B_n)$ を満たす写像 $\sigma : CL(Z,\mathcal{V}) \to CL(Z,\mathcal{V})$ へ拡張できる．以下では，$\sigma(t)$ の代わりに $t\sigma$ という記法を使用する．書き換え規則 $Zx_1\cdots x_n \to t$ は組合せ子 Z が持つ方向付けられた等式であり，次の条件を満たす：(1) 変数 $x_1,\cdots,x_n$ は互いに相異なる，(2) $Var(t) \subseteq \{x_1,\cdots,x_n\}$，(3) 組合せ子 Z は Z-項 t に出現しない．書き換え規則 $Zx_1\cdots x_n \to t$ による $CL(Z,\mathcal{V})$ 上の書き換え $\to$ を次のように定義する：$s \to t \iff$ ある Z-文脈 $C[\,]$，$B_1,\cdots,B_n \in CL(Z,\mathcal{V})$ に対して，$s \equiv C[ZB_1\cdots B_n]$ かつ $t \equiv C[t\{x_1 \leftarrow B_1,\cdots,x_n \leftarrow B_n\}]$．このとき，$ZB_1\cdots B_n$ を Z-**リデックス**という．書き換え $\to$ が無限書き換え列 $t_0 \to t_1 \to t_2 \to \cdots$ を持たないとき，**停止性を持つ**という．書き換え $\to$ の推移的閉包を $\to^+$ で表す．書き換え $t \to^+ t$ を**循環（cyclic）**であるという．書き換え $\to$ が循環書き換えを持たないとき，組合せ子 Z は**非循環性を持つ（acyclic）**という．$C[\,]$ を Z-文脈，σ を代入とする．書き換え $t \to^+ C[t\sigma]$ を**ループ（loop）**という．書き換え $\to$ がループを持たないとき，組合せ子 Z は非ループ性を持つという．書き換え $t \to^+ C[t]$ を**基礎ループ（ground loop）**という．書き換え $\to$ が基礎ループを持たないとき，組合せ子 Z は非基礎ループ性を持つという．組合せ子 Z が停止性を持つならば非ループ性を持つ．逆に，組合せ子 Z が非ループ性を持つとき停止性を持つとは限らない．また，組合せ子 Z が非ループ性を持つならば非基礎ループ性を持つ．さらに，組合せ子 Z が非基礎ループ性を持つならば非循環性を持つ．本稿では文献 17) に掲載されている停止性を持たない組合せ子[⋆1]と組合せ子 **K**，**I**，**J**[⋆2]のみを取り扱う．本稿で使用する組合せ子と書き換え規則を**表 1** にまとめる．

2.2 項書き換えシステム

項書き換えシステムの詳細については文献 13)，20) を参照していただきたい．項書き換

⋆1 ただし，Turing の不動点組合せ子 **U** は本稿では取り扱わない．
⋆2 停止性を持つ代表的な組合せ子として **K**，**I**，**J** を取り扱う．

表 1　組合せ子と書き換え規則[17)]
Table 1　Combinators and rewrite rules[17)].

S	$\mathbf{S}xyz \to xz(yz)$	**H**	$\mathbf{H}xyz \to xyzy$
K	$\mathbf{K}xy \to x$	**M**	$\mathbf{M}x \to xx$
I	$\mathbf{I}x \to x$	**W**	$\mathbf{W}xy \to xyy$
L	$\mathbf{L}xy \to x(yy)$	$\mathbf{W}^1$	$\mathbf{W}^1\, xy \to yxx$
O	$\mathbf{O}xy \to y(xy)$	$\mathbf{W}^*$	$\mathbf{W}^*\, xyz \to xyzz$
J	$\mathbf{J}xyzw \to xy(xwz)$	$\mathbf{W}^{**}$	$\mathbf{W}^{**}\, xyzw \to xyzww$

えシステムは，5 章で使用する．

シグネチャ$\mathcal{F}$ を引数を持つ**関数記号**の集合とする．引数が 0 の関数記号を**定数**と呼ぶ．**変数**の可算無限集合を $\mathcal{V}$ とする（$\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \emptyset$）．構文的等式を $\equiv$ で表す．$\mathcal{F}$ 上の**項**の集合 $T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する．(1) $\mathcal{V} \subseteq T(\mathcal{F},\mathcal{V})$，(2) f を n 引数関数記号（$n \geq 0$），$t_1,\cdots,t_n \in T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ ならば $f(t_1,\cdots,t_n) \in T(\mathcal{F},\mathcal{V})$．変数を含まない項を**基礎項**といい，基礎項全体の集合を $T(\mathcal{F})$ により表す．シグネチャ$\mathcal{F} \cup \{\Box\}$ 上の項を**文脈**という．すなわち，0 個以上のホール $\Box$ を含む項の集合 $T(\mathcal{F} \cup \{\Box\},\mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する．(1) $\mathcal{V} \subseteq T(\mathcal{F} \cup \{\Box\},\mathcal{V})$，(2) $\Box \in T(\mathcal{F} \cup \{\Box\},\mathcal{V})$，(3) f を n 引数関数記号（$n \geq 0$），$t_1,\cdots,t_n \in T(\mathcal{F} \cup \{\Box\},\mathcal{V})$ ならば $f(t_1,\cdots,t_n) \in T(\mathcal{F} \cup \{\Box\},\mathcal{V})$．文脈 C がホール $\Box$ を 1 つだけ含むとき，$C[\,]$ と表す．$C[t]$ は文脈 $C[\,]$ のホール $\Box$ を項 t で置き換えた結果である．$t \equiv C[s]$ として表すことができるならば，s は t の**部分項**であるといい，$s \trianglelefteq t$ と表す．項 t に出現する変数の集合を $Var(t)$ と表す．**代入** σ を $\mathcal{V}$ から $T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ への定義域 $Dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \not\equiv x\}$ が有限である写像とする．すべての代入 σ は項 $f(t_1,\cdots,t_n) \in T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ に対して，$\sigma(f(t_1,\cdots,t_n)) = f(\sigma(t_1),\cdots,\sigma(t_n))$ を満たす写像 $\sigma : T(\mathcal{F},\mathcal{V}) \to T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ へ拡張できる．以下では，$\sigma(t)$ の代わりに $t\sigma$ という記法を使用する．書き換え規則 $l \to r$ は $T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ 上の方向付けられた等式であり，次の条件を満たす：$l \notin \mathcal{V}$ かつ $Var(r) \subseteq Var(l)$．**項書き換えシステム（TRS）**は書き換え規則の集合である．TRS $\mathcal{R}$ により項 s が t に書き換えられるとは，ある代入 σ, 文脈 $C[\,]$ と書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ が存在し $s \equiv C[l\sigma]$ かつ $t \equiv C[r\sigma]$ を満たすときをいい，$s \to_{\mathcal{R}} t$ と表す．項 $l\sigma$ を**リデックス**という．項 s 中のリデックス Δ を書き換えることにより t が得られるとき，$s \to^{\Delta} t$ と表す．項 t の**根記号**を次のように定義する：t が変数のとき $root(t) \equiv t$，$t \equiv f(t_1,\cdots,t_n)$（$n \geq 0$）のとき $root(t) \equiv f$．TRS $\mathcal{R}$ が無限書き換え列 $t_0 \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{R}} \cdots$ を持たないとき，**停止性を持つ**という．TRS $\mathcal{R}$ の書き換え $\to_{\mathcal{R}}$ の推移的閉包を $\to^+_{\mathcal{R}}$ で表す．TRS $\mathcal{R}$ において，書き換え $t \to^+_{\mathcal{R}} t$ を**循環**であるという．TRS $\mathcal{R}$ が循環書き換えを持たないとき，**非循環性を持つ**という．$C[\,]$ を文脈，σ を代入とする．TRS $\mathcal{R}$ において，書き換え $t \to^+_{\mathcal{R}} C[t\sigma]$ を**ループ**という．TRS $\mathcal{R}$ がループを持たないとき，非ループ性を持つという．TRS $\mathcal{R}$ において，書き換え $t \to^+_{\mathcal{R}} C[t]$ を**基礎ループ**という．TRS $\mathcal{R}$ が基礎ループを持たないとき，非基礎ループ性を持つという．シグネチャ$\mathcal{F}$ 上の**半順序**は非反射的かつ推移的な関係である．シグネチャ$\mathcal{F}$ 上の半順序 $>$ が**整礎**であるとは次のような無限減少列が存在しないときをいう：$t_0 > t_1 > t_2 > \cdots$．

3. 組合せ子の非循環性に対する十分条件

TRS の非循環性は一般に決定不能である[13),14)]．しかしながら，書き換え規則が 1 つの TRS の非循環性の決定可能性問題は未解決であると考えられる．

本章では，Bergstra ら[2)] の手法を一般化し組合せ子が非循環性を持つための十分条件を与える．この十分条件を用いて組合せ子 **L** と **O** の非循環性を示す．以下では，記号 Z を書き換え規則 $Zx_1\cdots x_n \to t$ を持つ組合せ子とする．

文献 2) では，組合せ子 **S** の非循環性を示すために基礎 **S**-項に対して長さと重みを定義している．基礎 Z-項に対する長さと重みを同様に定義する．

定義 3.1　$s \in CL(Z)$ とする．s の**長さ** $|s|$ を次のように再帰的に定義する．(1) $|Z| = 1$, (2) $|(st)| = |s| + |t|$．s の**重み** $\|s\|$ を次のように再帰的に定義する．(1) $\|Z\| = 1$，(2) $\|(st)\| = 2\|s\| + \|t\|$．

定義 3.2　組合せ子 Z の条件を以下のように与える．
(1) $Zx_1\cdots x_n \to t$ を組合せ子 Z の書き換え規則とするとき，$\forall B_i \in CL(Z)$（$i = 1,\cdots,n$）に対して，$|ZB_1\cdots B_n| \leq |t\{x_1 \leftarrow B_1,\cdots,x_n \leftarrow B_n\}|$．
(2) $s \equiv C[\Delta] \to C[\Delta'] \equiv t$ かつ $|s| = |t|$（s，$t \in CL(Z)$）ならば $\|\Delta\| > \|\Delta'\|$（ここで Δ は Z-リデックスとする）．

表 1 の書き換え規則を持つ組合せ子 **L**，**O**，**S** は次のように定義 3.2 の条件を満たす．

組合せ子 L　(1) $|\mathbf{L}B_1B_2| = 1 + |B_1| + |B_2| \leq |B_1| + |B_2| + |B_2| = |B_1(B_2B_2)|$．

(2) $s \to t$ (s，$t \in CL(\mathbf{L})$) とする．ある B_1，$B_2 \in CL(\mathbf{L})$ に対して，$s \equiv C[\mathbf{L}B_1B_2]$，$t \equiv C[B_1(B_2B_2)]$ と表される．このとき，$|s| = |t|$ を満たすならば，$B_2 \equiv \mathbf{L}$ が成立することを基礎 **L**-文脈 $C[\,]$ の構造に関する帰納法により示す．

- $C[\,] \equiv \Box$ のとき；$s \equiv LB_1B_2 \to B_1(B_2B_2) \equiv t$. $|s| = 1 + |B_1| + |B_2| = |B_1| + 2|B_2| = |t|$ より，$|B_2| = 1$，すなわち，$B_2 \equiv \mathbf{L}$ である．
- $C[\,] \equiv (B_3C'[\,])$ のとき；このとき，$s \equiv (B_3\ C'[\mathbf{L}B_1B_2]) \to (B_3C'[B_1(B_2B_2)])$

$\equiv t$. $|s|=|t|$ から $|C'[\mathbf{L}B_1B_2]|=|C'[B_1(B_2B_2)]|$. 帰納法の仮定から，$B_2\equiv\mathbf{L}$.

- $C[\,]\equiv(C'[\,]B_3)$ のとき；前項と同様.

したがって，任意の $B_1\in CL(\mathbf{L})$ に対して，$\|\mathbf{L}B_1\mathbf{L}\|>\|B_1(\mathbf{LL})\|$ を示せばよいが，これは $\|\mathbf{L}B_1\mathbf{L}\|=5+2\|B_1\|>3+2\|B_1\|=\|B_1(\mathbf{LL})\|$ より成立する.

組合せ子 O　(1) $|\mathbf{O}B_1B_2|=1+|B_1|+|B_2|\le|B_2|+|B_1|+|B_2|=|B_2(B_1B_2)|$.

(2) $s\to t$（s，$t\in CL(\mathbf{O})$）とする．ある B_1，$B_2\in CL(\mathbf{O})$ に対して，$s\equiv C[\mathbf{O}B_1B_2]$，$t\equiv C[B_2(B_1B_2)]$ と表される．このとき，$|s|=|t|$ を満たすならば，$B_2\equiv\mathbf{O}$ が成立することを基礎 $\mathbf{O}$-文脈 $C[\,]$ の構造に関する帰納法により示す.

- $C[\,]\equiv\Box$ のとき；$s\equiv\mathbf{O}B_1B_2\to B_2(B_1B_2)\equiv t$. $|s|=1+|B_1|+|B_2|=|B_1|+2|B_2|=|t|$ より，$|B_2|=1$，すなわち，$B_2\equiv\mathbf{O}$ である.
- $C[\,]\equiv(B_3\ C'[\,])$ のとき；$s\equiv(B_3\ C'[\mathbf{O}B_1B_2])\to(B_3\ C'[B_2(B_1B_2)])\equiv t$. $|s|=|t|$ から $|C'\ [\mathbf{O}B_1B_2]|=|C'\ [B_2(B_1B_2)]|$. よって，帰納法の仮定から，$B_2\equiv\mathbf{O}$.
- $C[\,]\equiv(C'[\,]B_3)$ のとき；前項と同様.

したがって，任意の $B_1\in CL(\mathbf{O})$ に対して，$\|\mathbf{O}B_1\mathbf{O}\|>\|\mathbf{O}(B_1\mathbf{O})\|$ を示せばよいが，これは，$\|\mathbf{O}B_1\mathbf{O}\|=5+2\|B_1\|>3+2\|B_1\|=\|\mathbf{O}(B_1\mathbf{O})\|$ より成立する.

組合せ子 S　(1) $|\mathbf{S}B_1B_2B_3|=1+|B_1|+|B_2|+|B_3|\le|B_1|+|B_3|+|B_2|+|B_3|=|B_1B_3(B_2B_3)|$.

(2) 組合せ子 $\mathbf{L}$，$\mathbf{O}$ の場合と同様にして，すべての $s\to t$（s，$t\in CL(\mathbf{S})$）かつ $|s|=|t|$ を満たす s と t に対して，$s\equiv C[\mathbf{S}B_1B_2\mathbf{S}]$，$t\equiv C[B_1\mathbf{S}(B_2\mathbf{S})]$ が成立する．さらに，任意の B_1，$B_2\in CL(\mathbf{S})$ に対して，$\|\mathbf{S}B_1B_2\mathbf{S}\|=9+4\|B_1\|+2\|B_2\|>3+4\|B_1\|+2\|B_2\|=\|B_1\mathbf{S}(B_2\mathbf{S})\|$ となる.

補題 3.3　s，$t\in CL(Z)$ とする．$s\to t$ かつ組合せ子 Z が定義 3.2 の条件を満たすならば，$|s|\le|t|$.

(証明)　組合せ子 Z の書き換え $\to$ の定義かつ定義 3.2 (1) より自明.　$\Box$

補題 3.4　$C[\,]$ を基礎 Z-文脈とする．このとき $\|s\|>\|t\|$ ならば $\|C[s]\|>\|C[t]\|$（ここで s，$t\in CL(Z)$ である）.

(証明) $\|s\|>\|t\|$ と仮定し基礎 Z-文脈 $C[\,]$ の構造に関する帰納法により示す．$C[\,]\equiv\Box$ のとき；自明．$C[\,]\equiv(MC'[\,])$ のとき；$\|C[s]\|=2\ \|M\|+\|C'[s]\|$，$\|C[t]\|=2\ \|M\|+\|C'[t]\|$. 帰納法の仮定より $\|C'[s]\|>\|C'[t]\|$. したがって $\|C[s]\|>\|C[t]\|$. $C[\,]\equiv(C'[\,]M)$ のときも同様に示すことができる.　$\Box$

次に本章の主定理を示す.

定理 3.5　定義 3.2 の条件を満たす組合せ子 Z は，$CL(Z)$ 上で非循環性を持つ.

(証明) 循環書き換え $M_0\to M_1\to M_2\to\cdots\to M_n\equiv M_0$　$(n\ge1)$ が存在すると仮定する．このとき，$|M_0|=|M_n|$. 補題 3.3 より，$|M_0|=|M_1|=|M_2|=\cdots=|M_n|$. 定義 3.2(2) から，$M_i\equiv C[\Delta_i]\to C[\Delta'_{i+1}]\equiv M_{i+1}$ かつ $|M_i|=|M_{i+1}|$ より $\|\Delta_i\|>\|\Delta'_{i+1}\|$ $(i=0,\cdots,n-1)$. 補題 3.4 より，$\|M_0\|>\|M_1\|>\|M_2\|>\cdots>\|M_n\|=\|M_0\|$. よって矛盾する.　$\Box$

補題 3.6　組合せ子 Z が $CL(Z,\mathcal{V})$ 上で非循環性を持つことと $CL(Z)$ 上で非循環性を持つことは同値である.

(証明) 組合せ子 Z が $CL(Z)$ 上で循環書き換え $t\to^+t$ を持つと仮定する．$t\in CL(Z,\mathcal{V})$ より，$CL(Z,\mathcal{V})$ 上でも循環書き換えを持つ．組合せ子 Z が $CL(Z,\mathcal{V})$ 上で循環書き換え $t\to^+t$ を持つと仮定する．$Var(t)=\{x_1,\cdots,x_m\}$ であるとする．代入 $\theta=\{x_1\leftarrow Z,\cdots,x_m\leftarrow Z\}$ とすると，$t\theta\in CL(Z)$ であり，$CL(Z)$ 上の循環書き換え $t\theta\to^+t\theta$ を持つ.　$\Box$

したがって，定理 3.5 と補題 3.6 から次の結果が得られる.

系 3.7　$Z\in\{\mathbf{L},\mathbf{O},\mathbf{S}\}$ とする．このとき，組合せ子 Z は $CL(Z,\mathcal{V})$ 上で非循環性を持つ.

例 3.8　表 1 の書き換え規則を持つ組合せ子 $Z\in\{\mathbf{H},\mathbf{M},\mathbf{W},\mathbf{W}^1,\mathbf{W}^*,\mathbf{W}^{**}\}$ はそれぞれ $CL(Z,\mathcal{V})$ 上で次のような循環書き換えを持つ.

$\mathbf{HHHH}\to\mathbf{HHHH}$，$\mathbf{MM}\to\mathbf{MM}$，$\mathbf{WWW}\to\mathbf{WWW}$，$\mathbf{W}^1\mathbf{W}^1\mathbf{W}^1\to\mathbf{W}^1\mathbf{W}^1\mathbf{W}^1$，$\mathbf{W}^*\ \mathbf{W}^*\ \mathbf{W}^*\ \mathbf{W}^*\to\mathbf{W}^*\ \mathbf{W}^*\ \mathbf{W}^*\ \mathbf{W}^*$，$\mathbf{W}^{**}\ \mathbf{W}^{**}\ \mathbf{W}^{**}\ \mathbf{W}^{**}\ \mathbf{W}^{**}\to\mathbf{W}^{**}\ \mathbf{W}^{**}\ \mathbf{W}^{**}\ \mathbf{W}^{**}\ \mathbf{W}^{**}$.

しかしながら，これらの組合せ子は，次のように定義 3.2 の条件を満たさないから定理 3.5 の反例ではない.

- $s\equiv C[\mathbf{H}B_1\mathbf{H}B_3]\to C[B_1\mathbf{H}B_3\mathbf{H}]\equiv t$ かつ $|s|=|t|$ であるが，$\|\mathbf{H}B_1\mathbf{H}B_3\|=10+4\|B_1\|+\|B_3\|\not>5+8\|B_1\|+2\|B_3\|=\|B_1\mathbf{H}B_3\mathbf{H}\|$（ここで B_1，$B_3\in CL(\mathbf{H})$ である）.
- $s\equiv C[\mathbf{MM}]\to C[\mathbf{MM}]\equiv t$ かつ $|s|=|t|$ であるが，$\|\mathbf{MM}\|\not>\|\mathbf{MM}\|$.
- $s\equiv C[\mathbf{W}B_1\mathbf{W}]\to C[B_1\mathbf{WW}]\equiv t$ かつ $|s|=|t|$ であるが，$\|\mathbf{W}B_1\mathbf{W}\|=5+2\|B_1\|\not>3+4\|B_1\|=\|B_1\mathbf{WW}\|$（ここで $B_1\in CL(\mathbf{W})$ である）.
- $s\equiv C[\mathbf{W}^1\mathbf{W}^1B_2]\to C[B_2\mathbf{W}^1\mathbf{W}^1]\equiv t$ かつ $|s|=|t|$ であるが，$\|\mathbf{W}^1\mathbf{W}^1B_2\|=6+\|B_2\|\not>3+4\|B_2\|=\|B_2\mathbf{W}^1\mathbf{W}^1\|$（ここで $B_2\in CL(\mathbf{W}^1)$ である）.
- $s\equiv C[\mathbf{W}^*B_1B_2\mathbf{W}^*]\to C[B_1B_2\mathbf{W}^*\mathbf{W}^*]\equiv t$ かつ $|s|=|t|$ であるが，$\|\mathbf{W}^*B_1B_2\mathbf{W}^*\|=9+4\|B_1\|+2\|B_2\|\not>3+8\|B_1\|+4\|B_2\|=\|B_1B_2\mathbf{W}^*\mathbf{W}^*\|$

（ここで B_1，$B_2 \in CL(\mathbf{W}^*)$ である）．

- $s \equiv C[\mathbf{W}^{**}\ B_1\ B_2\ B_3\ \mathbf{W}^{**}] \to C[B_1\ B_2\ B_3\ \mathbf{W}^{**}\ \mathbf{W}^{**}] \equiv t$ かつ $|s| = |t|$ であるが，$\|\mathbf{W}^{**}B_1B_2B_3\mathbf{W}^{**}\| = 17+8\|B_1\|+4\|B_2\|+2\|B_3\| \not> 3+16\|B_1\|+8\|B_2\|+4\|B_3\| = \|B_1B_2B_3\mathbf{W}^{**}\mathbf{W}^{**}\|$（ここで B_1，B_2，$B_3 \in CL(\mathbf{W}^{**})$ である）．

4. 組合せ子 O の非停止性

前章で示したように，組合せ子 **L**，**O**，**S** は非循環性を持つ．組合せ子が停止性を持つならば，非循環性を持つことは明らかであるため，組合せ子 **L**，**O**，**S** が停止性を持たないときに初めて，前章の結果が自明な結果ではないといえる．

組合せ子 **S** が停止性を持たないことは文献 1)，21) により示されている．また，組合せ子 **L** が停止性を持たないことは文献 18)，19) により示されている．しかしながら，組合せ子 **O** の非停止性についてはまだ知られていない．そこで，本章では，組合せ子 **O** が停止性を持たないことを示す．

定義 4.1　$X_0, X_1, \ldots \in CL(\mathbf{O})$ を次のように帰納的に定義する．(1) $X_0 \equiv \mathbf{OO}$，(2) $X_{n+1} \equiv \mathbf{O}X_n$．

補題 4.2　任意の自然数 k，n に対して，ある基礎 **O**-文脈 $C[\,]$ が存在して，$X_kX_n \to^+ C[X_nX_{n+1}]$ を満たす．

（証明） k に関する帰納法で示す．$k=0$ のとき，$X_0X_n \equiv \mathbf{OO}X_n \to X_n(\mathbf{O}X_n) \equiv X_nX_{n+1}$ より明らか．$k = m+1$ のとき，$X_{m+1}X_n \equiv \mathbf{O}X_mX_n \to X_n(X_mX_n)$．帰納法の仮定より，ある基礎 **O**-文脈 $C'[\,]$ が存在して，$X_mX_n \to^+ C'[X_nX_{n+1}]$ が成立する．したがって，$X_n(X_mX_n) \to^+ X_n(C'[X_nX_{n+1}])$．　□

定理 4.3　組合せ子 **O** は $CL(\mathbf{O})$ 上で停止性を持たない．

（証明） 補題 4.2 を繰り返し用いることにより，次のような無限書き換え列が得られる．

$$\begin{aligned}\underline{X_0X_0} &\to^+ C_0[\underline{X_0X_1}]\\ &\to^+ C_0[C_1[\underline{X_1X_2}]]\\ &\to^+ C_0[C_1[C_2[\underline{X_2X_3}]]]\\ &\to^+ \cdots\end{aligned}$$

したがって，組合せ子 **O** は $CL(\mathbf{O})$ 上で停止性を持たない．　□

5. 組合せ子 O の非基礎ループ性

書き換え規則が 1 つの場合でさえ TRS の非ループ性は，決定不能である[10]．Middeldorp らの非ループ性の決定不能性の証明から，書き換え規則が 1 つの場合でさえ TRS の非基礎ループ性も決定不能である．Waldmann は組合せ子 **S** の非循環性[2] を拡張し，組合せ子 **S** の非基礎ループ性を示し，さらに，基礎 **S**-項が正規形を持つことが決定可能であることを示している[21]．

本章では，Waldmann が組合せ子 **S** の非基礎ループ性を示すのに提案した手法[21] を適用して組合せ子 **O** の非基礎ループ性を示す．

定義 5.1　TRS $\mathcal{R}(\mathbf{O})$ のシグネチャ $\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathbf{O}))$ を定数 **O** と 2 引数関数記号 $\circ$ からなる集合とし，TRS $\mathcal{R}(\mathbf{O})$ を次のように定義する：
$\mathcal{R}(\mathbf{O}) = \{(\mathbf{O} \circ x) \circ y \to y \circ (x \circ y)\}$．

定義 5.2　次のように定義されるラベル付き TRS $\mathcal{R}_n(\mathbf{O})$ は無限シグネチャ$\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O})) = \{\mathbf{O}, \circ_1, \circ_2, \cdots, \circ_n, \circ_{n+1}, \cdots\}$ を持つ（ここで $\circ_i$（$1 \le i$）はラベル付 2 引数関数記号である）：
$\mathcal{R}_n(\mathbf{O}) = \{(\mathbf{O} \circ_l x) \circ_k y \to y \circ_{k+1} (x \circ_k y) | 1 \le k \le n, 1 \le l\}$．

注意：$\circ_{n+1}$ を左辺の根記号とする書き換え規則は存在しない．また，$i \le j$ ならば，$\mathcal{R}_i(\mathbf{O}) \subseteq \mathcal{R}_j(\mathbf{O})$．

補題 5.3　任意の n（≥ 1）に対して，$\mathcal{R}_n(\mathbf{O})$ は停止性を持つ．

（証明） 無限シグネチャ$\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O}))$ 上の整礎な半順序 $>$ を次のように与える：$\circ_1 > \circ_2 > \cdots > \circ_n > \circ_{n+1}$．このとき再帰経路順序を用いて，$\mathcal{R}_n(\mathbf{O})$ の停止性を示すことができる[11]．　□

次に，文献 21) にならって，組合せ子 **O** に対する右側の深さを定義する．

定義 5.4　$T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathbf{O})))$ または $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O})))$ における項の**右側の深さ（right depth）**を次のように定義する：$d_r(\mathbf{O}) = 0$, $d_r(X \circ_l Y) = 1 + d_r(Y)$．

補題 5.5　$T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O}))) \ni X \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} Y$ ならば，$d_r(X) \le d_r(Y)$．

（証明） $X \equiv C[\Delta] \equiv C[(\mathbf{O} \circ_l A) \circ_k B] \to^{\Delta}_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} C[B \circ_{k+1} (A \circ_k B)] \equiv C[\Delta'] \equiv Y$ とおき，基礎 **O**-文脈 $C[\,]$ の構造に関する帰納法により示す．$C[\,] \equiv \Box$ のとき；$d_r(X) = 1 + d_r(B)$，$d_r(Y) = 1 + d_r(A \circ_k B) = 2 + d_r(B)$ より明らか．$C[\,] \equiv X' \circ_p D[\,]$ のとき；帰納法の仮定より，$d_r(X) = 1 + d_r(D[\Delta]) \le 1 + d_r(D[\Delta']) = d_r(Y)$．$C[\,] \equiv D[\,] \circ_p X'$ のとき；$d_r(X) = 1 + d_r(X') = d_r(Y)$ より明らか．　□

定義 5.6　$T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O}))) \setminus \{\mathbf{O}\}$ におけるラベル付き項の**根記号のラベル**を次のように定義する：$root(t) \equiv \circ_k$ のとき，$label(t) = k$．

定義 5.7[21] 次の条件が成立するとき，ラベル付き項 X が**無矛盾（consistent）**である

という．

$\forall X' \trianglelefteq X$（$X' \not\equiv \mathbf{O}$）に対して，$d_r(X') \geq label(X')$.

定義より，無矛盾な項の部分項は明らかに無矛盾である．また，以下で示すように，無矛盾性は TRS $\mathcal{R}_n(\mathbf{O})$ における書き換えで保存される．

補題 5.8　X $(\in T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O}))))$ が無矛盾かつ $X \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} Y$ ならば，Y は無矛盾である．

（証明） X が無矛盾かつ $X \equiv C[\Delta] \equiv C[(\mathbf{O} \circ_l A) \circ_k B] \to^{\Delta}_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} C[B \circ_{k+1} (A \circ_k B)] \equiv C[\Delta'] \equiv Y$ とおき，基礎 $\mathbf{O}$-文脈 $C[\,]$ の構造に関する帰納法により，Y が無矛盾であることを示す．

- $C[\,] \equiv \Box$ のとき;X の無矛盾性から，部分項 A, B は無矛盾である．よって，$d_r(A \circ_k B) \geq label(A \circ_k B)$ および $d_r(Y) \geq label(Y)$ を示せば十分である．X の無矛盾性から，$1 + d_r(B) = d_r(X) \geq label(X) = k$．よって，$d_r(A \circ_k B) = 1 + d_r(B) \geq k = label(A \circ_k B)$．また，これを用いて，$d_r(Y) = 2 + d_r(B) \geq k + 1 = label(Y)$.
- $C[\,] \equiv X' \circ_p D[\,]$ のとき；このとき，$X \equiv X' \circ_p D[\Delta]$ の無矛盾性から X'，$D[\Delta]$ は無矛盾である．また，$D[\Delta]$ は無矛盾かつ $D[\Delta] \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} D[\Delta']$ であるから，帰納法の仮定より $D[\Delta']$ も無矛盾である．よって，$d_r(Y) \geq label(Y)$ を示せば十分である．今，$D[\Delta] \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} D[\Delta']$ であるから，補題 5.5 より $d_r(D[\Delta]) \leq d_r(D[\Delta'])$．よって，$d_r(Y) = 1 + d_r(D[\Delta']) \geq 1 + d_r(D[\Delta]) = d_r(X) \geq label(X) = p = label(Y)$.
- $C[\,] \equiv D[\,] \circ_p X'$ のとき；このとき，$X \equiv D[\Delta] \circ_p X'$ の無矛盾性から $D[\Delta], X'$ は無矛盾である．また，$D[\Delta]$ は無矛盾かつ $D[\Delta] \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} D[\Delta']$ であるから，帰納法の仮定より $D[\Delta']$ も無矛盾である．よって，$d_r(Y) \geq label(Y)$ を示せば十分である．これは，$d_r(X) \geq label(X)$ より $d_r(Y) = 1 + d_r(X') = d_r(X)$ と $label(X) = label(Y)$ から明らか． □

定義 5.9　写像 $tag : T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathbf{O}))) \to T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O})))$ を，葉ではない任意の部分項 X の根記号 $\circ$ をラベル付き記号 $\circ_{d_r(X)}$ で置き換えると定義する．

定義 5.10　写像 $forget : T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O}))) \to T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathbf{O})))$ を，すべてのラベル付き記号 $\circ_l$ を $\circ$ で置き換えると定義する．

補題 5.11　ある n（≥ 1）に対して，$T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_n(\mathbf{O}))) \ni X \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} Y$ ならば，$forget(X) \to_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} forget(Y)$.

（証明） 定義 5.2 と定義 5.10 より，自明． □

補題 5.12　項 X（$\in T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathbf{O})))$）とラベル付き項 X' を考える．$forget(X') \equiv X \to^{\Delta}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} Y$ かつ X' が無矛盾ならば，$X' \to_{\mathcal{R}_{d_r(\Delta)}(\mathbf{O})} Y'$ かつ $forget(Y') \equiv Y$ を満たす Y' が存在する．

（証明） $forget(X') \equiv X \to^{\Delta}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} Y$ より，$X \equiv C[\Delta] \to^{\Delta}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} C[\Gamma] \equiv Y$ を満たす基礎 $\mathbf{O}$-文脈 $C[\,]$ が存在する．$\Delta \equiv (\mathbf{O} \circ A) \circ B$ とする．$C[\Delta] \equiv C[(\mathbf{O} \circ A) \circ B] \to^{\Delta}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} C[B \circ (A \circ B)] \equiv C[\Gamma]$．$X'$ が無矛盾より，$\forall X'' \trianglelefteq X'$（$X'' \not\equiv \mathbf{O}$）に対して，$d_r(X'') \geq label(X'')$．$forget(X') \equiv X \equiv C[\Delta]$ より，$forget(\Delta') \equiv \Delta$ を満たす $\Delta' \trianglelefteq X'$ が存在する．$forget(\Delta') \equiv \Delta$ より，$\Delta' \equiv (\mathbf{O} \circ_{L_1} A') \circ_{L_2} B'$ と表すことができる．無矛盾な項の部分項は無矛盾より，$\Delta' \trianglelefteq X'$ に対して，$d_r(\Delta') \geq label(\Delta')$．$label(\Delta') \leq d_r(\Delta') = d_r(\Delta)$．$L_2 = label(\Delta') \leq d_r(\Delta)$ より，Δ' は $\mathcal{R}_{d_r(\Delta)}(\mathbf{O})$ のリデックスである．$\Delta' \trianglelefteq X'$ より，$X' \equiv C'[\Delta']$ かつ $forget(C'[\,]) \equiv C[\,]$ を満たすラベル付き基礎 $\mathbf{O}$-文脈 $C'[\,]$ が存在する．$Y' \equiv C'[B' \circ_{L_2+1} (A' \circ_{L_2} B')]$ とすると，$X' \equiv C'[\Delta'] \equiv C'[(\mathbf{O} \circ_{L_1} A') \circ_{L_2} B'] \to_{\mathcal{R}_{d_r(\Delta)}(\mathbf{O})} C'[B' \circ_{L_2+1} (A' \circ_{L_2} B')] \equiv Y'$ かつ $forget(Y') \equiv C[B \circ (A \circ B)] \equiv Y$ を満たす． □

補題 5.13　$\mathcal{R}(\mathbf{O})$ 上の有限または無限書き換え列 $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathbf{O}))) \ni X_1 \to^{\Delta_1}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} X_2 \to^{\Delta_2}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} X_3 \to^{\Delta_3}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} \cdots$ が存在し，任意の k（≥ 1）に対して，$d_r(\Delta_k) \leq n$ と仮定する．このとき，$X'_1 \equiv tag(X_1)$ かつ任意の k（≥ 1）に対して $forget(X'_k) \equiv X_k$ を満たす $\mathcal{R}_n(\mathbf{O})$ 上の有限または無限書き換え列 $X'_1 \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} X'_2 \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} X'_3 \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} \cdots$ が存在する．

（証明） 写像 tag と $forget$ の定義から，$forget(X'_1) \equiv X_1$．また，X'_1 は定義より，無矛盾である．したがって，$X'_1 \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} X'_2 \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} \cdots \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} X'_i$, 任意の k（$1 \leq k \leq i$）に対して $forget(X'_k) \equiv X_k$ かつ X'_i は無矛盾とするとき，$X'_i \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} X'_{i+1}$，$forget(X'_{i+1}) \equiv X_{i+1}$ かつ X'_{i+1} は無矛盾を満たす X'_{i+1} が存在することを示せば十分である．今，仮定より，$forget(X'_i) \equiv X_i$，$X_i \to^{\Delta_i}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} X_{i+1}$ かつ X'_i が無矛盾であるから，補題 5.12 より，$X'_i \to_{\mathcal{R}_{d_r(\Delta_i)}(\mathbf{O})} X'_{i+1}$ かつ $forget(X'_{i+1}) \equiv X_{i+1}$ を満たす X'_{i+1} が存在する．仮定 $d_r(\Delta_i) \leq n$ より，$\mathcal{R}_{d_r(\Delta_i)}(\mathbf{O}) \subseteq \mathcal{R}_n(\mathbf{O})$．よって，$X'_i \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} X'_{i+1}$．また，$X'_i$ の無矛盾性と補題 5.8 より，X'_{i+1} は無矛盾である． □

補題 5.14　$\mathcal{R}(\mathbf{O})$ 上の無限書き換え列 $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathbf{O}))) \ni X_1 \to^{\Delta_1}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} X_2 \to^{\Delta_2}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} X_3 \to^{\Delta_3}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} \cdots$ が存在すると仮定する．このとき，$d_r(\Delta_k)$（$k = 1, 2, \cdots$）は有界ではない．

（証明） $d_r(\Delta_k)$（$k = 1, 2, \cdots$）が有界である，すなわち，任意の k（≥ 1）に対して，$d_r(\Delta_k) \leq n$ を満たす $n \in N$ が存在すると仮定する．補題 5.13 より，$\mathcal{R}_n(\mathbf{O})$ 上の無限書き換え列 $X'_1 \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} X'_2 \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} X'_3 \to_{\mathcal{R}_n(\mathbf{O})} \cdots$ が存在する．しかしながら，補題 5.3 より，$\mathcal{R}_n(\mathbf{O})$ は停止性を持つ．したがって，$\mathcal{R}_n(\mathbf{O})$ は無限書き換え列を持たない．

よって，矛盾する． □

定理 5.15　TRS $\mathcal{R}(\mathbf{O})$ は，非基礎ループ性を持つ．

（証明） 基礎ループ $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathbf{O}))) \ni X \to^{+}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} C[X]$ が存在すると仮定する．このとき，$\mathcal{R}(\mathbf{O})$ 上の無限書き換え列 $X \equiv X_1 \to^{\Delta_1}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} X_2 \to^{\Delta_2}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} \cdots X_n \to^{\Delta_n}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} C[X_1] \to^{\Delta_1}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} C[X_2] \to^{\Delta_2}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} \cdots C[X_n] \to^{\Delta_n}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} C[C[X_1]] \to^{\Delta_1}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} C[C[X_2]] \to^{\Delta_2}_{\mathcal{R}(\mathbf{O})} \cdots$ が得られる．$\mathcal{R}(\mathbf{O})$-リデックス Δ_k は有限個であるから，$d_r(\Delta_k) \leq m$ を満たす $m \in N$ が存在する $(k = 1, 2, \cdots, n)$．これは補題 5.14 に矛盾する． □

系 5.16　$CL(\mathbf{O})$ は非基礎ループ性を持つ．

補題 5.17　組合せ子 $\mathbf{O}$ が $CL(\mathbf{O}, \mathcal{V})$ 上で非基礎ループ性を持つことと $CL(\mathbf{O})$ 上で非基礎ループ性を持つことは同値である．

（証明） 組合せ子 $\mathbf{O}$ が $CL(\mathbf{O})$ 上で基礎ループ $t \to^{+} C[t]$ を持つと仮定すると，$CL(\mathbf{O}, \mathcal{V})$ 上でも基礎ループを持つ．組合せ子 $\mathbf{O}$ が $CL(\mathbf{O}, \mathcal{V})$ 上で基礎ループ $t \to^{+} C[t]$ を持つと仮定する．$Var(t) = \{x_1, \cdots, x_m\}$ であるとする．代入 $\theta = \{x_1 \leftarrow \mathbf{O}, \cdots, x_m \leftarrow \mathbf{O}\}$ を考える．このとき，$t\theta$ は基礎 $\mathbf{O}$-項であり，$CL(\mathbf{O})$ 上で基礎ループ $t\theta \to^{+} C[t]\theta$ を持つ． □

したがって，系 5.16 と補題 5.17 から次の系が得られる．

系 5.18　$CL(\mathbf{O}, \mathcal{V})$ は非基礎ループ性を持つ．

6. む す び

本稿では組合せ子 **L** と **O** の非循環性を示した．組合せ子 **L** と **O** は，Sumllyan[17] により提案された比較的単純な書き換え規則を持つ組合せ子であるが，それらの非循環性は知られていなかった．また，組合せ子 **O** について，非循環性と関連する性質である非停止性と非基礎ループ性も示した．これらは組合せ子 **L** については従来から知られていたが，組合せ子 **O** については著者の知る限り従来示されていなかった．

本稿および先行研究の結果を**表 2** にまとめる．

今後の課題は，組合せ子 **S** と **O** の非ループ性を解析することである．Waldmann は組合せ子 **S** の非ループ性を予想しているが，非基礎ループ性の証明手法が適用できないと述べており[21]，組合せ子 **S** と **O** の非ループ性は未解決である．組合せ子 **O** は **SI** で表すことが可能である．さらに，書き換え規則 $\mathbf{O}xy \to y(xy)$ の右辺 $y(xy)$ の部分項 (xy) と書き換え規則 $\mathbf{S}xyz \to xz(yz)$ の右辺 $xz(yz)$ の部分項 (yz) には類似性がある．したがって，組合せ子 **O** の非ループ性の解析手法は組合せ子 **S** の非ループ性の解析にも有用であると予想される．

表 2　組合せ子が持つ性質
Table 2　Properties of combinators.
非循環性 $\Longleftarrow$ 非基礎ループ性 $\Longleftarrow$ 非ループ性 $\Longleftarrow$ 停止性
非循環性 $\not\Longrightarrow$ 非基礎ループ性 $\not\Longrightarrow$ 非ループ性 $\not\Longrightarrow$ 停止性

組合せ子	非循環性	非基礎ループ性	非ループ性	停止性
S	○ [2]	○ [21]	?	× [1]
K	○	○	○	○
I	○	○	○	○
O	⊙	⊙	?	⊗
L	⊙	× [18),19)]	× [18),19)]	× [18),19)]
J	○ [15]	○ [15]	○ [15]	○ [15]
H	×	×	×	×
M	×	×	×	×
W	×	×	×	×
$\mathbf{W}^1$	×	×	×	×
$\mathbf{W}^*$	×	×	×	×
$\mathbf{W}^{**}$	×	×	×	×

（⊙：成立 **（本研究）**，⊗：不成立 **（本研究）**，○：成立，×：不成立，?：未解決）

謝辞　本研究に対して，有益な助言をいただいた外山芳人先生と査読者の方々に感謝いたします．

参 考 文 献

1) Barendregt, H.P.: *The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics*, *2nd revised edition*, North-Holland (1984).
2) Bergstra, J. and Klop, J.W.: Church-Rosser strategies in the lambda calculus, *Theoretical Computer Science*, Vol.9, pp.27–38 (1979).
3) Curry, H.B. and Feys, R.: *Combinatory Logic*, Vol.1, North-Holland (1958).
4) Hindley, J.R. and Seldin, J.P.: *Introduction to Combinators and λ-calculus*, Cambridge University Press (1986).
5) 岩見宗弘：組合せ子 L の非循環性，第 6 回情報科学技術フォーラム講演論文集，情報科学技術レターズ，pp.25–26 (2007).
6) Ketema, J., Klop, J.W. and van Oostrom, V.: Vicious circles in orthogonal term rewriting systems, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Vol.124, pp.65–77 (2005).
7) Klop, J.W.: Reduction cycles in combinatory logic, To Curry, H.B.: Essays on

Combinatory Logic, *Lambda Calculus and Formalism*, pp.193–214, Academic Press (1980).
8) Klop, J.W., van Oostrom, V. and van Raamsdonk, F.: Reduction strategies and acyclicity, Rewriting, Computation and Proof: Essays Dedicated to Jouannaud, J.-P. on the Occasion of his 60th Birthday, LNCS, 4600, pp.89–112 (2006).
9) Klop, J.W.: Term Rewriting Systems, *Handbook of Logic in Computer Science*, Vol.2, pp.1–116, Oxford University Press (1992).
10) Middeldorp, A. and Gramlich, B.: Simple termination is difficult, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, Vol.6, pp.115–128 (1995).
11) Middeldorp, A. and Zantema, H.: Simple termination of rewrite systems, *Theoretical Computer Science*, Vol.175, pp.127–158 (1997).
12) Middeldorp, A. and Ohsaki, H.: Type introduction for equational rewriting, *Acta Informatica*, Vol.36, pp.1007–1029 (2000).
13) Ohlebusch, E.: *Advanced Topics in Term Rewriting*, Springer-Verlag (2002).
14) Plaisted, D.A.: The undecidability of self-embedding for term rewriting systems, *Information Processing Letters*, Vol.20, pp.61–64 (1985).
15) Probst, D. and Studer, T.: How to normalize the Jay, *Theoretical Computer Science*, Vol.254, pp.677–681 (2001).
16) Schroeder-Heister, P. and Došen, K.: *Substructural Logics*, Oxford University Press (1993).
17) Smullyan, R.: *To Mock a Mockingbird*, Knopf, New York (1985).
18) Sprenger, M. and Wymann-Böni, M.: How to decide the lark, *Theoretical Computer Science*, Vol.110, pp.419–432 (1993).
19) Statman, R.: The word problem for Smullyan's lark combinator is decidable, *J. Symbolic Computation*, Vol.7, pp.103–112 (1989).
20) Terese: *Term Rewriting Systems*, Cambridge University Press (2003).
21) Waldmann, J.: The combinator S, *Information and Computation*, Vol.159, pp.2–21 (2000).

(平成 20 年 9 月 26 日受付)
(平成 20 年 12 月 26 日採録)

岩見　宗弘（正会員）
1999 年北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程修了．博士（情報科学）．同年島根大学総合理工学部助手．2007 年同助教，2008 年同講師．項書き換えシステム，プログラム理論，自動証明の研究に従事．電子情報通信学会，日本ソフトウェア科学会，EATCS，ACM 各会員．