

ドビー織機の綜統枠数最小化問題に対する 集合被覆アプローチ

松浦 勇^{†1} 柳浦 睦憲^{†2} 平田 富夫^{†2}

ドビー織機では、織機に装備された綜統枠の枚数が多いほど複雑な織物組織を製織することができる。ドビー織機に長目綜統を導入すると、普通綜統のみを使用する場合と比較して、所望の織物組織を製織するための綜統枠枚数を減少させることができる。このときの最小綜統枠枚数を求める問題は NP 困難であり、グラフ彩色アルゴリズムを用いた発見的アルゴリズムが提案されている。本論文ではこの問題を集合被覆問題に変換し整数計画ソルバで解くという方法を提案する。実際にドビー織機で製織されている織物組織に対して実験を行い提案手法の性能を調べた。集合被覆問題に変換せずに直接的に整数計画問題として定式化し整数計画ソルバで解くという方法と比較すると、本論文の方法は格段に少ない変数、制約式で問題を記述することができ、計算時間を大幅に短縮できた。一部の例外を除き、すべての問題例に対し最小綜統枠枚数を厳密に求めることができた。

A Set Covering Approach for Minimizing the Number of Heald Frames in a Dobby Loom

ISAMU MATSUURA,^{†1} MUTSUNORI YAGIURA^{†2}
and TOMIO HIRATA^{†2}

A dobby loom is a weaving machine prevailing in the textile industry. The more heald frames a dobby loom is equipped with, the more complicated designs of cloth can be woven. By introducing long-eye healds into a dobby loom, we can reduce the number of heald frames required for a given weave design. The problem of finding the minimum number of heald frames is NP-hard, and an algorithm using graph coloring heuristics was proposed. In this paper, we transform this problem to the set covering problem and solve it with an integer programming solver. We have conducted experiments on various weave designs. Comparing to a direct formulation into an integer programming problem, we could formulate it with fewer variables and fewer constraints, and thus computation time was reduced drastically. We could find the optimal numbers of heald frames for almost all weave designs.

1. まえがき

織機では、たて糸を上下2つの層に分離して、その間によこ糸を通すことにより織物を製造する。たて糸の2つの層への分け方を変化させることにより織物の文様（織物組織）が形成される。たて糸を2つの層に分けることを開口といい、装着した開口装置の機構の違いにより、タペット織機、ドビー織機、ジャカード織機に分類される。

タペット織機は安価であるが、簡単な織物組織しか製織することができない。ジャカード織機では複雑な織物組織を製織することができるが、きわめて高価である。ドビー織機ではジャカード織機ほど複雑な織物組織を製織することができないが、たて糸の太さ、密度等の変更が容易で小ロット生産にも対応しやすいという利点がある。ドビー織機で複雑な組織の織物を織ることができれば、新たな商品開発に寄与することができる。本論文で対象とするのはドビー織機である。

ドビー織機では、織機に装備された綜統枠の枚数が多いほど複雑な織物組織を製織することができる。長目綜統とは、目が上下方向に長い綜統であり、通常、ジャカード織機で大きな模様の織物を織る際に用いるが、これをドビー織機に導入することにより、与えられた綜統枠枚数で製織可能な織物組織数を増加させることができる^{1)–3)}。文献 4) では、3枚の綜統枠を使う場合に、完全組織（織物組織の基本パターン、2.2 節参照）がたて糸とよこ糸それぞれ4本の織物組織では、製織可能な織物組織数が約2倍に増えることを示している。文献 5) は、長目綜統を導入したドビー織機において、与えられた織物組織を製織するときの最小綜統枠枚数が、織物組織図をブール行列と見なしたときのブール階数（Boolean rank）であることを示し、グラフ彩色アルゴリズムを用いてブール階数を求める発見的方法を提案している。

ブール階数を求める問題は2部クリーク被覆問題と等価であることが知られている⁶⁾。本論文では、2部クリーク被覆問題を集合被覆問題として定式化する。2部グラフの極大クリークを列挙できると、この集合被覆問題を整数計画ソルバを用いて解くことができる。この定式化では、変数の個数は列挙される極大クリークの個数に一致する。そのため、極大クリーク

^{†1} 愛知県産業技術研究所
Aichi Industrial Technology Institute

^{†2} 名古屋大学
Nagoya University

クの数が多いと計算時間が爆発的に増えてしまう。しかし、実験の対象とした問題例では極大クリークの個数は比較的少なく、実際にドビー織機で製織されている 706 の織物組織に対して実験を行ったところ、すべての問題例に対して極大クリークの列挙が短時間で完了することが確認できた。この集合被覆問題への定式化を、プール階数を求める問題を直接的に整数計画問題へと定式化する方法と比べると計算時間を大幅に短縮することができた。そのため、わずかな例外を除き実験の対象としたすべての織物組織に対し、最小綜統枠枚数を厳密に求めることができた。この結果を用いて、文献 5) で提案されたアルゴリズムの性能を評価した。

本論文の構成は次のようである。2章で長目綜統の使い方と織方図の行列表現、2部クリーク被覆問題への変換について解説する。3章で集合被覆問題への変換について述べ、4章で実験結果を示す。5章はまとめである。

2. 準備

2.1 製織のメカニズム

図 1 に製織の原理を示す。綜統枠 (heald frame) に取り付けられたヘルドロッド (heald rod) が図 2 (a) に示す綜統 (heald) の耳 (end loop) に通されている。たて糸は綜統の目 (eye) に通されており、綜統の上下運動によって、2つの層に分けられ、開口部が形成される (本論文では綜統枠が上に動いて開口部を形成する上口開口を仮定する)。よこ糸は杼 (ひ, shuttle) によって開口部に通され、筈 (おさ, reed) によって織前に押し付けられる。

織機には、複数の綜統枠が装着されており、綜統は、そのうちの 1 つに取り付けられているため、同じ綜統枠の綜統を通るたて糸はつねに同じ動きをする。ドビー式開口装置の綜統枠枚数は 30 枚程度までで、製織工場においては 8 枚または 16 枚の綜統枠を装備したドビー織機が多く使われている。

2.2 織物組織図と等価組織

織物における糸の交差の状態は、通常、たて糸本数、よこ糸本数で表される大きさを 1 つの単位として、その繰返しとなっている。その単位を完全組織と呼ぶ⁷⁾。図 3 の織物では、黒で示すたて糸 3 本、白色で示すよこ糸 3 本からなる完全組織が繰返されていることが分かる。糸の交差の状態は、織物組織図 (weave diagram, 以下、組織図と呼ぶ) で表現される。たて糸がよこ糸の上を通っている交差点を ■ で表し、よこ糸がたて糸の上を通っている交差点を □ で表す。完全組織は同一織物内でも位置の取り方によって違って見える。これらを等価組織と称する。その中で、上下左右に平行移動すると同じ組織になるものは第一

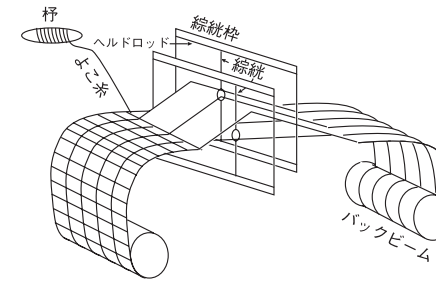


図 1 製織の原理
Fig. 1 Schematic diagram of a loom.

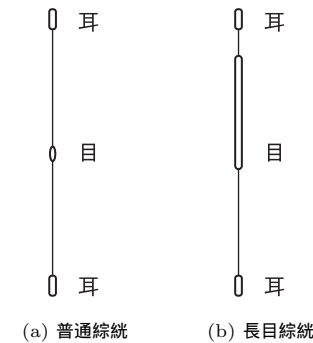


図 2 普通綜統と長目綜統
Fig. 2 Normal and long-eye healds.

種等価組織と呼ぶ⁸⁾。図 3 の織物の 3 通りの第一種等価組織を図 4 に示す。

2.3 織方図

織物組織を織るための、たて糸の綜統への通し方を示すのが綜統通図 (threading draft diagram) であり、開口装置 (綜統枠) の運動順序を示すのが紋枠図 (peg plan diagram) である。組織図、綜統通図、紋枠図を合わせて、織方図 (lifting plan diagram) と呼ぶ。図 5 に織方図の例を示す。よこ糸が F 本、たて糸が E 本からなる完全組織で、綜統枠枚数が H 枚であれば、組織図は F 行 E 列、紋枠図は F 行 H 列、綜統通図は H 行 E 列となる。綜統枠は織前に近いものから順に、 h_1 から h_H で表す。紋枠図はよこ糸 f_j が入るときに綜統枠 h_i が上昇する場合に、 (h_i, f_j) を ■ で表す。綜統通図は、たて糸 w_i が第 j 綜統枠 h_j に

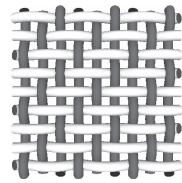


図 3 織物における糸の交差
Fig. 3 Yarn interlacement in fabric.

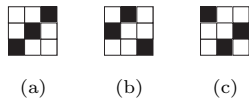


図 4 第一種等価組織
Fig. 4 Equivalent weave diagrams.

取り付けられた綜統の目を通る場合に、 (w_i, h_j) を \times で表す．普通綜統のみを用いる製織では、たて糸はそれぞれ 1 本の綜統のみに通されるため、綜統通図の各列にはただ 1 つの \times が現れる．以降、織方図を示す場合には、図 5 のように、組織図の左に紋柱図を描き、組織図の下に綜統通図を描くこととする．

たとえば、図 5 の紋柱図のよこ糸 f_2 に対応する行において綜統枠 h_1, h_2 に対応する列が \blacksquare となっている．これは杼によって、よこ糸 f_2 が通されるとき、綜統枠 h_1, h_2 が上昇していることを意味している．次に綜統通図中の h_1, h_2 に対応する行を見ると、たて糸 w_1, w_2, w_5, w_6 に対応する列でそれぞれ \times になっている．これは綜統枠 h_1, h_2 が上昇しているとき、たて糸 w_1, w_2, w_5, w_6 が開口していることを意味している．このときに杼を通すと、たて糸 w_1, w_2, w_5, w_6 がよこ糸の上方に位置する．この状態を表しているのが組織図の f_2 に対応する行である．

完全組織のよこ糸本数が F 本の場合、組織図の考えうる列のパターンは $2^F - 2$ 通りであるが、そのうち可能なものは、 H 枚の綜統枠を装着した織機では H 通り以下である．図 5 の組織図の各列について見ると 4 通りのパターンが存在するので、製織するためには織機の綜統枠は 4 枚必要である．

2.4 長目綜統を用いた製織

長目綜統とは、図 2 (b) に示す形状の、目が上下方向に長い綜統であり、通常、ジャカー

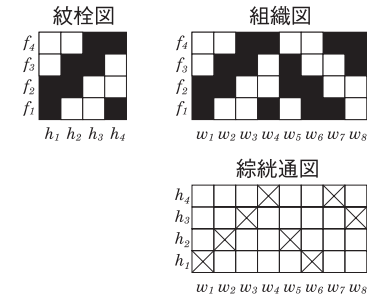


図 5 織方図
Fig. 5 A lifting plan diagram.

ド織機で大きな文様の織物を織る際に用いる⁹⁾．ドビー織機において、長目綜統と普通綜統をともに用いて、必要綜統枠枚数を減らすことができる．

普通綜統のみを用いる製織では、たて糸はそれぞれ 1 本の綜統に通されるが、長目綜統を導入した場合は、たて糸は複数の綜統を通ることができる．織機を側面から見た 4 つの模式図を図 6 に示す．各模式図において、左側が織前側で、右側がバックピーム側である．ここでは、2 本の長目綜統 A, B を考え、太線で示したたて糸は両方の長目綜統に通っているとする．図 6 (a) に示すように、A, B とも上昇していない状態では、たて糸は静止している．A, B いずれか一方が上昇するとたて糸は開口する（同図 (b), (c)）．綜統の目が長い場合、他方の綜統がたて糸の上昇を妨げることがない．A, B とも上昇した場合も、たて糸は開口する（同図 (d)）．

長目綜統を使うことで綜統枠枚数を減らすことができる簡単な例を示す．普通綜統を使った場合の織方図を図 7 (a) に示す．組織図を見ると、4 本のたて糸はすべて異なる動きをするため、普通綜統を使った場合には、綜統枠が 4 枚必要である．図 7 (b) に長目綜統を併用した場合の織方図を示す．左から 1 番目のたて糸は第 1 綜統枠の綜統のみに通っているが、2 番目のたて糸は第 1 綜統枠と第 2 綜統枠の 2 つの綜統を通っている．3 番目のたて糸は第 2 綜統枠、第 3 綜統枠の 2 つの綜統を通っている．そして、4 番目のたて糸は第 3 綜統枠の綜統のみに通している．これにより、綜統枠が 3 枚で済むことが分かる．組織図が与えられたとき、長目綜統を導入したドビー織機によりその織物を製織するのに必要な最小の綜統枠の数を求める問題を綜統枠数最小化問題と呼ぶ．

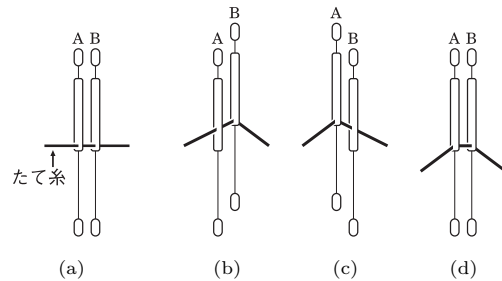
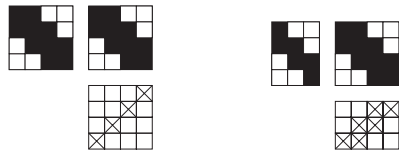


図 6 長目綜統を用いた製織の模式図
Fig. 6 Movements of long-eye healds.



(a) 普通綜統のみを使う場合 (b) 長目綜統を導入した場合
図 7 同じ組織の織方図

Fig. 7 Introducing long-eye healds, we can produce the same pattern with fewer heald frames.

2.5 織方図の行列表現

以下では、組織図、紋枠図、綜統通図をそれぞれ行列で表す。組織図、紋枠図における ■ と □ をそれぞれ 1 と 0 で表し、綜統通図における × と □ をそれぞれ 1 と 0 で表す。組織図、紋枠図、綜統通図を行列で表したものをそれぞれ W, P, T と表記する。ただし、行列 T の行の順序は綜統通図の行のそれと逆にする。これは、これらの行列の間に $W = PT$ の関係が成立するためである（これについては後で詳しく述べる）。図 5 の織方図に対応する 3 つの行列を図 8 に示す。

図 8 の行列のように、すべての成分が 0 または 1 である行列をブール行列と呼ぶ。ブール行列 A, B の和 $A + B$ と積 AB をそれぞれ通常の行列の和と積と同様に定義する。ただし、成分の計算はブール代数に従うものとする。つまり、+ は論理和に、 \cdot は論理積に置き換えて演算を行う。行列 A の (i, j) 成分を $A_{i,j}$ で表す。 A の i 行目の行ベクトルを A_{i*} 、 j 列目の列ベクトルを A_{*j} で表す。以降では W, P, T をブール行列とする。

$$\begin{matrix}
 P & W \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & T \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

図 8 織方図の行列表現
Fig. 8 Boolean matrices representing a lifting plan diagram.

2 つの n 次行ベクトル $a = (a_1, \dots, a_n)$ と $b = (b_1, \dots, b_n)$ の論理和 $a \vee b$ とは、その成分ごとの論理和を成分とする n 次行ベクトル $(a_1 \vee b_1, \dots, a_n \vee b_n)$ のことである。列ベクトルの論理和も同様に定義する。

普通綜統のみを使用する場合、各たて糸はただ 1 つの綜統を通るので T の列 T_{*j} にはちょうど 1 つの 1 が現れる。この 1 を $T_{i,j}$ とすると、 P の列 P_{*i} が、 T_{*j} に対応するたて糸 w_j が通る綜統に対応している。つまり、 P_{*i} で表される綜統 h_i の動きにより、たて糸 w_j に所望の動きをさせている。このことから、組織図 W 、紋枠図 P 、綜統通図 T の間には $W = PT$ の関係が成立する。与えられた W を P と T の積で表したとき、 P の列の数 (= T の行の数) が、 W で表される織物組織を製織するための綜統枠の数である。図 5 で見たように、この値は行列 W の異なるパターンの列の数である。

長目綜統を導入すると 1 本のたて糸が複数の長目綜統を通るので、 T には複数の 1 が現れる列が存在する。 T の列 T_{*j} において、1 が i_1 行目と i_2 行目に現れるとすると、列 P_{*i_1} 、列 P_{*i_2} の論理和が T_{*j} に対応するたて糸 w_j の動きを表している。3 つ以上の 1 が存在する T の列についても同様である。したがって、長目綜統を使用する場合も、普通綜統のみを使用する場合と同様に、組織図 W 、紋枠図 P 、綜統通図 T の間には $W = PT$ の関係が成り立つ。

2.6 ブール階数

A を m 行 n 列のブール行列とする。 A のブール階数 (Boolean rank) とは、 A を m 行 r 列のブール行列 B と r 行 n 列のブール行列 C のブール積 $A = BC$ として表現することができる最小の r のことをいう。ブール階数はシャイン階数 (Schein rank) とも呼ばれ

る¹⁰⁾．以下では，ブール階数を単に階数と呼ぶ．列ベクトルの集合 S があり，行列 A の任意の列を S の列ベクトルのいくつかの論理和で表現できるとする．そのような S の最小サイズが A の階数であると考えられることができる． B に現れる各列が S の元である．同様に，行ベクトルの集合 S' があり，行列 A の任意の行を S' の行ベクトルのいくつかの論理和で表現できるとする．そのような S' の最小サイズが A の階数であると考えられることもできる． C に現れる各行が S' の元である．したがって，綜統枠数最小化問題を解くには組織図 W の階数を求めればよいことになる．

ブール行列の階数を求める問題は NP 困難である⁶⁾．ブール行列の階数を求める問題を，0-1 整数計画問題として定式化したものを付録 A.1 に示す．

2.7 2部クリーク被覆問題

グラフ $G = (V, E)$ のクリークとは，頂点集合 V の部分集合 $V_S \subset V$ を頂点集合とする部分グラフで， V_S の任意の2頂点が隣接しているものをいう．グラフ $G = (V, E)$ が2部グラフであるとは，頂点集合 V が2つの集合 X, Y に分割され， E の各辺は一方の端点を X に，他方の端点を Y に持っているときをいう．このような2部グラフを $B = (X, Y, E)$ と表記する．2部グラフ $B = (X, Y, E)$ において， X の部分集合 $X_S = \{x_1, \dots, x_p\}$ ，と Y の部分集合 $Y_S = \{y_1, \dots, y_q\}$ を頂点集合とする部分グラフ $B' = (X_S, Y_S, E_S)$ で，任意の2頂点 $x_i \in X_S, y_j \in Y_S$ が隣接しているものを2部クリークという．以降，グラフが2部グラフの場合にクリークといえば，2部クリークのことを指す．また， B の部分グラフ $B'' = (X, Y, E_S)$ を B' と同一視して，2部クリークと呼ぶこともある．

ブール行列の階数を求める問題は，2部クリーク被覆問題と等価である⁶⁾．2部グラフ B のクリーク被覆とは， B の2部クリークの集合 C で， B のどの辺も C の少なくとも1つの2部クリークに含まれているものをいう．2部クリーク被覆問題とは，与えられた2部グラフ B に対し最小サイズのクリーク被覆 C を求める問題である．行列 W から2部グラフへの変換は次のように行う． m 行 n 列のブール行列 W から， m 個の頂点からなる頂点集合 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ と， n 個の頂点からなる頂点集合 $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ を作る． $W_{i,j}$ が1のとき，そしてそのときだけ，2部グラフの頂点 x_i と頂点 y_j を辺で結ぶ．こうしてできた2部グラフを B_W とする．図9に例を示す．この例で行列 W のブール階数は3である．また， B_W は3個の2部クリークで被覆できる．

定理1 ブール行列 W のブール階数は，2部グラフ B_W の最小クリーク被覆のサイズに等しい．

証明は文献5)，6)を参照されたい．

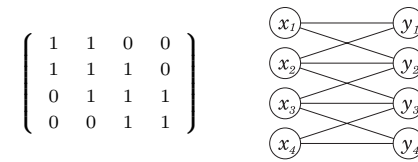


図9 ブール行列 W と対応する2部グラフ B_W
Fig. 9 Boolean matrix W and the bipartite graph B_W .

3. 集合被覆問題への変換

文献5)では，2部グラフの最小クリーク被覆問題をグラフ彩色問題に変換し，発見的アルゴリズムを用いて解いている．本論文では，2部クリーク被覆問題を集合被覆問題として定式化し，2部グラフの極大クリークを列挙することにより整数計画ソルバを用いて解く．

3.1 2部クリーク被覆問題から集合被覆問題への変換

集合被覆問題とは，台集合 S とその部分集合の族 S' が与えられたときに， S の任意の要素が S' の少なくとも1つの部分集合に含まれるような最小サイズの集合族 $S' \subseteq S$ を求める問題である¹¹⁾．

$B = (X, Y, E)$ を2部グラフとし， C を B のクリーク被覆とする． C の各2部クリークを，それを含む任意の極大2部クリークと置き換えて得られるクリーク被覆 C' は，元のクリーク被覆 C と同じサイズである．そのため，2部クリーク被覆問題は極大な2部クリークのみによる最小サイズの2部クリーク被覆を求める問題と考えることができる．

$\{C_1, \dots, C_q\}$ を B のすべての極大2部クリークの集合とする．極大クリーク C_i の辺集合を E_i で表すと， B の極大2部クリーク被覆問題は， B の辺の集合 E を台集合とし，その部分集合の族を $\{E_1, \dots, E_q\}$ としたときの集合被覆問題ととらえることができる．

3.2 極大2部クリーク列挙アルゴリズム

グラフ G の極大クリークは補グラフ \bar{G} の極大安定集合であるため，極大安定集合の列挙アルゴリズムを用いて極大クリークを列挙することができる．

2部グラフ $B = (X, Y, E)$ に対して， B の補グラフ \bar{B} を作成し，両端点が X に含まれるすべての辺と，両端点が Y に含まれるすべての辺を削除して得られるグラフを B' とする． B' に極大安定集合列挙アルゴリズムを適用することで，2部グラフ B の極大2部クリークを列挙することができる．Unoらは極大2部クリーク1つあたりの列挙時間が B の頂点数，辺の数に依存しない極大2部クリーク列挙アルゴリズムを提案している¹²⁾．

3.3 集合被覆問題の 0-1 整数計画問題としての定式化

集合被覆問題 (S, \mathcal{S}) を考える. $S = \{s_1, \dots, s_s\}$, $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_t\}$ とすると, 集合被覆問題は s 行 t 列の行列 $A = [a_{i,j}]$ を用いて以下のように 0-1 整数計画問題として定式化できる.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^t x_j \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq 1, \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad (1 \leq j \leq t). \end{aligned} \tag{1}$$

ここで, A は $s_i \in S_j$ のとき $a_{i,j} = 1$ で, $s_i \notin S_j$ のとき $a_{i,j} = 0$ である.

2部グラフ $B = (X, Y, E)$ の2部クリーク被覆問題に対しては, $S = E, \mathcal{S} = \{E_1, \dots, E_q\}$ とすれば, 0-1 整数計画問題として定式化することができる.

4. 実験および考察

整数計画問題を解くために整数計画ソルバを利用することには, 次のような利点がある¹³⁾. 整数計画ソルバは内部で分枝限定法により解を求めているため, 最適解を得るまでの時間を見積もることは困難であるが, 時間さえ十分にかければ原理的には最適解を求めることができる. もし制限時間内に計算が終了しなくても, 計算を打ち切った時点での上界と下界を得ることができる.

本論文では2部クリーク被覆問題を集合被覆問題として定式化し, 整数計画ソルバを用いて解く(以下, 提案法という). 極大2部クリークの列挙には宇野のプログラム¹⁴⁾を使用した. 提案法との比較のために, ブール階数を求める問題を直接0-1整数計画問題として定式化し, 整数計画ソルバを用いて解く方法(以下, 直接法と呼ぶ)も試みた(付録A.1参照).

実験の対象とした織物組織は, 実際にドビー織機で製織されているものを網羅的に集めた747種類の織物組織である¹⁵⁾⁻²³⁾. このうち, 長目綜統導入の効果が無いことが明らかなものは除外し, さらに第一種等価組織を除いた. こうして得られた706種類を対象に実験を行った. これらの織物組織のたて糸本数, よこ糸本数の分布を図10に示す. 使用した計算機のCPUはXeon 3.00 [GHz], メモリ容量は8 [GHz]である. 整数計画ソルバにはILog社のCPLEX10.0を使用し, 制限時間を1時間とした.

4.1 実験結果

織物組織に対応する2部グラフの極大2部クリークの列挙は706種類すべての問題例で

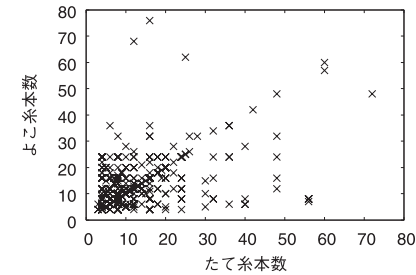


図 10 たて糸本数とよこ糸本数の分布

Fig. 10 The distribution of the number of warp yarns and weft yarns.

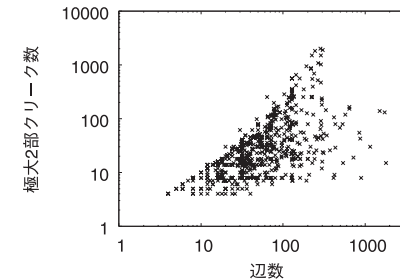


図 11 2部グラフの辺数と極大2部クリーク数の関係

Fig. 11 The relation between the number of edges and the number of maximal bipartite cliques.

0.01秒以内に完了した. それらの2部グラフの辺の数と極大2部クリーク数の分布を図11に示す. 大半の(実際688の)問題例で極大クリークの個数は500以下であった. 極大クリークが最も多い問題例では, その数は1,993であった. また, この図より辺の数と極大2部クリーク数には相関関係があることが見てとれる.

表1には, 提案法と直接法で各制限時間内で計算が終了した問題例の数を示す. ここで計算が終了したとは, ある解を発見し, かつ, その解が最適であることが判明したことである. 提案法では706の織物組織のうち, 702の織物組織で1時間以内に計算が終了した. 直接法では1時間以内に計算が終了したのは670で, 計算が終了しなかった問題例が35であった. なお, この670の問題例は, 提案法ではすべて2秒以内に計算が終了している.

表2には, 提案法と直接法のそれぞれについて, 2部グラフ B_W の辺数ごとの変数の個数(平均)と制約式の数(平均)を示す. 直接法の定式化では, ブール階数の上界を u とす

表 1 提案法と直接法の計算終了時間と問題例の数

Table 1 The number of problem instances solved by the two methods in each time span.

計算時間	提案法	直接法
1 秒未満	681	604
1 秒以上 60 秒未満	17	44
60 秒以上 3,600 秒未満	4	22
合計	702	670

表 2 変数と制約式の数 (平均)

Table 2 The average number of variables and constraints in the two formulations

B_W の辺数	問題例	提案法		直接法	
		変数	制約式	変数	制約式
4-99	528	25	39	709	1,947
100-199	110	137	133	2,790	7,985
200-299	40	252	250	6,579	19,087
300-1,800	28	814	641	13,313	40,440

ると変数の個数と制約式の個数はともに $O(mnu)$ 個である。提案法での定式化では、部分集合の数を t とすると変数の個数は $O(t)$ 個であり、制約式の数は $O(mn)$ 個である。 t が B_W の頂点数の指数関数となるような問題例も考えられるが、実験の対象とした問題例の中では t は比較的小さく t が最大である問題例でも、その値は 1,993 であった。 mnu の値が最大である問題例では、 $m = 60, n = 57, u = 14$ であり、提案法と直接法との変数の個数には大きな差があった。

提案法で 1 時間以内に最適値が判明しなかった 4 つの組織図を図 12 に示す。これらの問題例を対象に、制限時間 24 時間として提案法を実行したところ図 12 (a), 図 12 (b) は計算が終了しなかったが、図 12 (c) は約 4 時間 30 分、図 12 (d) は約 1 時間 10 分で計算が終了した。これより、実験の対象とした 706 種類の織物組織のうち 2 つの織物組織を除いて、すべての織物組織について提案法により最適解が判明した。

上の結果を用いて、文献 5) の発見的解法では、いくつかの問題例で最適値を求めることができたかを検証した。その結果、文献 5) の方法で得られた 706 の解のうち、約 9 割である 633 の問題例では最適解が求まっていたことが判明した。したがって 71 の問題例では解を改善することができた。その 71 の問題例のうち 61 の問題例では解のサイズを 1 または 2 改善することができ、残りの 10 の問題例では解のサイズを 3 から 5 改善することができた。

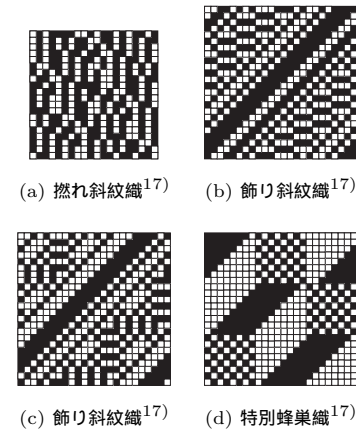


図 12 提案法により 1 時間以内に計算が終了しなかった 4 つの組織図

Fig. 12 Four weave diagrams which could not be solved by the proposed method in one hour.

5. 結 言

本論文では、ドビー織機の綜統枚数最小化問題を集合被覆問題に変換して整数計画ソルバで解く方法を提案した。また、実際にドビー織機で製織されている織物組織に対して実験を行い、その有効性を確認した。集合被覆問題に変換せずに直接的に整数計画問題として定式化し整数計画ソルバで解く方法と比べ、格段に少ない変数、制約式で問題を記述することができ、計算時間を大幅に短縮することができた。実験の対象とした問題例のうち、2 つの問題例を除きすべての問題例に対し最小綜統枚数を厳密に求めることができた。

参 考 文 献

- 1) 渡辺健人：綜統を減少して紋ブロードの千鳥模様を織成する方法，特許公告昭 39-000185 (1964)。
- 2) 渡辺健人：既設ドビー機で平織を主体とした組織で構成されたジャカード模様を織成する方法，特許公告昭 39-000186 (1964)。
- 3) 渡辺健人：綜統を減少して柄出経糸の飛模様をドビー機により織成する装置，実用公告昭 40-021018 (1965)。
- 4) 松浦 勇，安藤正好，平田富夫：長目綜統導入による製織可能な織物組織の増加，*Journal of Textile Engineering*, Vol.53, No.2, pp.69-77 (2007)。

- 5) 松浦 勇, 安藤正好, 平田富夫: 長目綜統を導入したトビー織機における綜統枠数
の最小化, *Journal of Textile Engineering*, Vol.53, No.5, pp.185-195 (2007).
- 6) Orlin, J.: Contentment in graph theory: Covering graphs with cliques, *Proceedings.
Series A, Mathematical sciences / Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetens-
schappen*, Vol.80, pp.406-424 (1977).
- 7) 日本繊維機械学会繊維工学刊行委員会 (編): 繊維工学 (IV) 布の製造・性能及び物性,
日本繊維機械学会 (2002).
- 8) 高寺政行, 篠原 昭: 織物組織に関する研究 (3) 4 枚組織の数学的性質, 繊維学会昭
和 61 年度年次大会研究発表会講演要旨集, p.194 (1986).
- 9) 文部省 (編): 織機 3, 実教出版 (1960).
- 10) Kim, K.H.: *Boolean Matrix Theory and Applications*, Marcel Dekker (1982).
- 11) Garey, M.R. and Johnson, D.S.: *Computers and Intractability: A Guide to the
Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman (1979).
- 12) Uno, T., Kiyomi, M. and Arimura, H.: LCM ver.2: Efficient Mining Algorithms for
Frequent/Closed/Maximal Itemsets, *IEEE ICDM'04 Workshop FIMI'04* (2004).
- 13) 宮代隆平, 松井知己: ここまで解ける整数計画, システム/制御/情報, Vol.50, No.9,
pp.363-368 (2006).
- 14) 宇野毅明: 公開プログラム, 宇野毅明のホームページ. 入手先 <http://research.nii.ac.jp/uno/> (参照 2008-12-06).
- 15) 大野一郎: 毛織物事典, 丸善 (1953).
- 16) 久世栄一: 最新毛織技術と毛織物解説, 日本羊毛工業会連合会「羊毛」編集部 (1956).
- 17) 文部省 (編): 織機 1, 実教出版 (1958).
- 18) 文部省 (編): 織機 2, 実教出版 (1959).
- 19) 井上 孝: 現代繊維辞典, センイ・ジャナル (1965).
- 20) 寺田商太郎: やさしい織物の解説, 繊維研究社 (1979).
- 21) 一宮地場産業ファッションデザインセンター (編): テキスタイル&ファッション,
一宮地場産業ファッションデザインセンター (2000).
- 22) 一宮地場産業ファッションデザインセンター (編): テキスタイル&ファッション,
一宮地場産業ファッションデザインセンター (2001).
- 23) 一宮地場産業ファッションデザインセンター (編): テキスタイル&ファッション,
一宮地場産業ファッションデザインセンター (2002).

付 録

A.1 クロスベクトルに基づく 0-1 整数計画問題としての定式化

W を m 行 n 列のプール行列, P を m 行 r 列のプール行列, T を r 行 n 列のプール行列として $W = PT$ であるとする. このとき $PT = P_{*1}T_{1*} + P_{*2}T_{2*} + \dots + P_{*r}T_{r*}$ である¹⁰⁾. $P_{*k}T_{k*}$ のように m 次列ベクトルと n 次行ベクトルの積によって得られる m 行 n 列

の 0-1 行列をクロスベクトルと呼ぶ. クロスベクトルのプール階数は 1 である. クロスベクトルを用いると, W のプール階数を求める問題は W を最小個数のクロスベクトルの論理和で表す問題であるといえる. $P_{*k}T_{k*}$ を Y^k と表記し, u をプール階数の上界とすると, プール階数を求める問題を次のように定式化することができる.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^u x_k \\ \text{s.t.} \quad & u W_{i,j} \geq \sum_{k=1}^u Y_{i,j}^k \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \\ & W_{i,j} \leq \sum_{k=1}^u Y_{i,j}^k \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \quad (2) \\ & Y^k = P_{*k}T_{k*} \quad (1 \leq k \leq u) \\ & x_k = 0 \text{ iff } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Y_{i,j}^k = 0 \quad (1 \leq k \leq u) \\ & x_k \in \{0, 1\} \quad (1 \leq k \leq u). \end{aligned}$$

ここで, x_k は非ゼロのクロスベクトルの個数を数えるための変数である. 式 (2) を 0-1 整数計画問題に変形する. まず Y^k がクロスベクトル $P_{*k}T_{k*}$ であるという条件は $P_{i,k} + T_{k,j} \leq Y_{i,j}^k + 1$, $Y_{i,j}^k \leq P_{i,k}$, $Y_{i,j}^k \leq T_{k,j}$ という制約式により記述することができる. 次に, 任意の i, j について $Y_{i,j}^k = 0$ のとき, そして, そのときに限り $x_k = 0$ であるという条件は $P_{i,k} \leq x_k$, $T_{k,j} \leq x_k$ という式により記述する. これらの変更を施した定式化を示す.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^u x_k \\ \text{s.t.} \quad & u W_{i,j} \geq \sum_{k=1}^u Y_{i,j}^k \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \\ & W_{i,j} \leq \sum_{k=1}^u Y_{i,j}^k \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \\ & P_{i,k} + T_{k,j} \leq Y_{i,j}^k + 1 \\ & \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq u) \\ & Y_{i,j}^k \leq P_{i,k} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq u) \\ & Y_{i,j}^k \leq T_{k,j} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq u) \quad (3) \end{aligned}$$

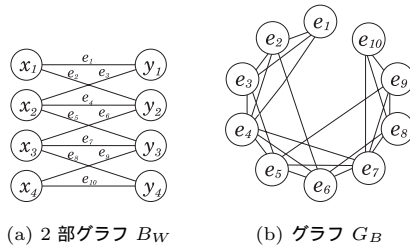


図 13 2部グラフ B_W と対応するグラフ G_B
 Fig. 13 Bipartite graph B_W and the graph G_B .

$$\begin{aligned}
 P_{i,k} &\leq x_k \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq u) \\
 T_{k,j} &\leq x_k \quad (1 \leq k \leq u, 1 \leq j \leq n) \\
 P_{i,k} &\in \{0, 1\} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq u) \\
 T_{k,j} &\in \{0, 1\} \quad (1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq u) \\
 Y_{i,j}^k &\in \{0, 1\} \\
 &\quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq u) \\
 x_k &\in \{0, 1\} \quad (1 \leq k \leq u).
 \end{aligned}$$

この定式化ではプール階数の上限 u が必要であるが、文献 5) で提案した発見的アルゴリズムにより得られた綜統枠枚数を u の値として用いた。

この記述には変数間に対称性が存在し、整数計画ソルバで解く場合には計算時間の増大を招く¹³⁾。そのため対称性を除くために下のような制約式を追加する。

まず、クロスベクトルの個数を数えるための変数である x_k のうち、1 となるものと、0 となるもの間の対称性を除去するために $x_k \geq x_{k+1} \quad (1 \leq k \leq u - 1)$ を追加する。

さらに、 $x_k = 1$ となる相連なる k について Y^k 間の区別をつけることで対称性を除去することを考える。このために、1 つのクロスベクトルで表される W の 1-要素は 2 部グラフ B_W の 2 部クリークに対応することに注意する。したがって、同一の 2 部クリークに含まれない 2 つの辺 e_1, e_2 に対応する W の 2 つの 1-要素は異なるクロスベクトルで表さなければならない。今、グラフ $G_B = (V_B, E_B)$ を 2 部グラフ $B_W = (X, Y, E)$ から次のように構成する。 B_W の辺 e_i を G_B の頂点と見なす。つまり $V_B = E$ とする。 B_W において異なる 2 つの辺 e_i, e_j が 1 つの 2 部クリークに含まれるとき、そして、そのときだけ G_B において頂点 e_i と e_j を隣接させる。図 13 に例を示す。

S を G_B の安定集合とすると、 S の任意の 2 頂点に対応する B_W の 2 辺は同一の 2 部クリークには含まれない。我々は G_B の最大安定集合を見つけ、そこに含まれる頂点に対応する B_W の辺 (W の 1-要素) がそれぞれ異なる 2 部クリークに属することを制約式として加えた。具体的には、 G_B の最大安定集合に対応する、 W の 1-要素の集合 $\{W_{i_1, j_1}, W_{i_2, j_2}, \dots, W_{i_l, j_l}\}$ から $Y_{i_a, j_a}^a = 1, P_{i_a, a} = 1, T_{a, j_a} = 1, x_a = 1 \quad (1 \leq a \leq l)$ という制約式を追加した。

なお我々の実験では 706 すべての問題例に対して整数計画ソルバにより G_B の最大安定集合を求めることができた。その計算時間は 703 の問題例で 60 秒以内であり、最も時間がかかった問題例でも約 12 分であった。この最大安定集合のサイズを l とした。

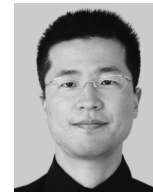
(平成 21 年 1 月 10 日受付)

(平成 21 年 3 月 6 日採録)



松浦 勇 (正会員)

昭和 49 年生。平成 11 年名古屋大学工学研究科電子機械工学専攻修士課程修了。平成 13 年愛知県庁入庁。現在、愛知県産業技術研究所尾張繊維技術センター勤務。



柳浦 睦憲 (正会員)

平成 5 年 3 月京都大学大学院工学研究科数理工学専攻修士課程修了。現在、名古屋大学大学院情報科学研究科准教授。メタヒューリスティクスの研究等に従事。京都大学博士(工学)。日本オペレーションズ・リサーチ学会、電子情報通信学会、スケジューリング学会、INFORMS、ACM 等の会員。



平田 富夫 (正会員)

昭和 24 年生。昭和 56 年東北大学大学院工学研究科博士課程修了。昭和 56 年豊橋技術科学大学助手，昭和 61 年名古屋大学工学部講師，現在，名古屋大学情報科学研究科教授。グラフアルゴリズム，近似アルゴリズムの研究に従事。工学博士。IEEE，ACM，電子情報通信学会，各会員
