

電子メディアを利用した数理パズル

山川総司 慶應義塾大学 政策・メディア研究科 1年
有澤誠 慶應義塾大学環境情報学部, 政策・メディア研究科

abstract

コンピュータグラフィックスやマルチメディアなどの新しい電子情報メディアを利用した、数理パズルの構築について述べる。実環境では制作が困難なパズル「ハイゼンベルグボックス」も、コンピュータ上の仮想環境では容易に実現できる。また、四次元の世界を扱う数理パズル、たとえば「四次元の女王配置」や「四次元ハイパーキューブ迷路」なども、電子情報メディアの特性を有効に利用して制作できる。本研究では、われわれの研究室で開発した Blue Impulse Library という CG パッケージを用いて、作品の制作を行っており、このライブラリの使い勝手のよさを実証する事例にもなった。

キーワード:

電子情報メディア上の数理パズル, Blue Impulse Library, ハイゼンベルグボックス, 四次元の女王配置, 四次元ハイパーキューブ

連絡先:

252 藤沢市遠藤 5322 慶應義塾大学 SFC 政策・メディア研究科
Tel: 0466-47-5111 (代表) Fax: 0466-47-5041 (事務室)
E-mail: ys11@sfc.keio.ac.jp, arith@sfc.keio.ac.jp

The development of Mathematical Puzzles using electronic media.

Soji Yamakawa, Keio Graduate School of Media and Governance

Makoto Arisawa, Faculty of Environmental Information, Keio University, Keio Graduate School of
Media and Governance

abstract

This paper describes the structure of mathematical puzzles that use the latest electronic media like computer graphics and multimedia. The Heisenberg Box Puzzle that would be difficult to construct as a physical model, was easily made using an computer based virtual environment. Four dimensional puzzles like the "4D Queen Setting" and the "4D Hyper Cube Maze" can also be developed using the computer based virtual environment and will hold the distinctive characteristics of the electronic media. In this research, we have developed puzzles using the CG(Computer Graphics) package known as the "Blue Impulse Library", and have proved its usefulness and excellence in the various capability the library holds.

Keyword: The mathematical puzzles using electronic media, Blue Impulse Library Heisenberg Box, 4D 8 Queen Setting, 4D Hyper Cube

Address: Keio Graduate School of Media and Governance 5322 Endo, Fujisawa-shi, 252
Tel: 0466-47-5111 Fax: 0466-47-5041
E-mail: ys11@sfc.keio.ac.jp, arith@sfc.keio.ac.jp

1. はじめに

コンピュータグラフィックスの応用分野のひとつに、数理パズルの視覚化をとりあげる。実環境では組み立てが困難であったり、材質や音、重さといった、本来のパズルの意図には存在しない要因で制作が困難なパズルも、コンピュータ上の仮想空間であれば容易に実現できる。

本研究では、コンピュータグラフィックスを利用した数理パズルの構築例として、次の4種類のプログラムを開発した。

- ハイゼンベルグボックス
- 三次元ライフゲーム
- 四次元の女王配置
- 四次元ハイパーキューブ迷路

これらのパズルは、コンピュータ上の仮想空間に実装したことによって、音や材質、表現方法などの問題を解決することができた。

また、これらのプログラムは、われわれの研究室で開発したグラフィックスライブラリである Blue Impulse Library[1] を使用した。Blue Impulse Library は、クロスプラットフォームで、かつ高速な三次元グラフィックス描画を可能とするライブラリである。今回開発したプログラムでも、Blue Impulse Library の高速性を活かして、インタラクティブにパズルを視覚化することに成功した。

本論文の構成は以下の通りである。まず、2章~5章で開発した数理パズルの内容について述べ、6章で、開発に用いた Blue Impulse Library の特徴について述べる。そして、7章で数理パズルのコンピュータ上での実装と、数理パズル視覚化に関するリアルタイム三次元グラフィックスの効果についてまとめる。なお、実物はカラー情報を利用しているが、本稿の図版はモノクロになっている。文章中にはカラーにかんする言及を残してある。

2. 「ハイゼンベルグボックス」の開発

ハイゼンベルグボックス [2] とは、次のようなパズルである。 n 段の引き出しをもつ棚があるとす。そして、引き出しの各段には0個以上のボールが入っている。一番下以外の引き出しを開けると、その中に入っていたボールがひとつだけ、音もなく下の段に落ちる。もちろん、最初から何も入っていなかったときは落下しない。引き出しを開けたとき、ひとつ以上のボールが入っていたときは、もともとその数よりひとつだけ多い数のボールが入っていたことになる。引き出しを開けたとき、ひとつもボールがなかったときは、最初からひとつも入っていなかったか、または、ひとつだけ入っていたことになる。ただし一番下の引き出しについては、ボールが落ちていく先がないため、直前に入っていた数そのものが観察できる。この条件で、最初引き出しの各段にくつつつのボールが入っていたのかを当てるのがハイゼンベルグボックスパズルである。観察によって対象の状態が変化するという意味で、この命名がつけられた。

Fig.2-1 は今回開発したハイゼンベルグボックスの画面である。このハイゼンベルグボックスプログラムには、次のような3通りの特徴がある。

- 1 インタラクティブに視点を変えて好きな角度から棚を見ることができる
- 2 ユーザがどの順に引き出しを開けたか履歴を取ることができる
- 3 引き出しを開けてボールが落ちる様子を透視図のようにして観察することができる

第1点目の特徴によって、ユーザにあたかも実世界に存在する本物の棚であるかのような印象を与えることができる。第2点目の特徴によって、ユーザが引き出しを開けた順序を後から考察して、よりよい解法を探ることができる。第3点目にあげた機能を使えば、ハイゼンベルグボックスのルールを容易に説明することができる。Fig.2-2 にこのプログラムを使ったハイゼンベルグボックスの透視図をあげる。

このパズルは、実環境で物理的なモデルを作ることとは容易ではない。特に、引き出しを開けたときボールが落下する音がしてしまうという問題を解決することは困難である。このため、引き出しを開けて、中に入っているボールの数が0だったとき、最初から0だったのか、ひとつ入っていたのかがわかってしまう。しかし、これをCGモデルで開発することによって容易に解決できる。また、頭の中で考えるパズルを、このようなモデルにすることによってインタラクティブに楽しめるものとなった点も特筆に値する。

3. 「三次元ライフゲーム」の開発

ライフゲームは、コンウェイが考察した2状態セルオートマトンのモデルである。通常は二次元平面の格子状セル空間でパターンの変化を楽しむが、三次元に拡張することも興味深い。

Fig.3-1 は本研究で開発した三次元ライフゲームプログラム [3,4] の画面である。三次元空間でのライフゲームの試みはこれまでもいくつかあるが [5], このプログラムの特徴は次の2点である。

- 1 セルの状態をインタラクティブに回転・拡大・縮小して観察することができる
- 2 セルの初期状態を容易にエディットすることができる

第1点目の特徴による利点は、三次元空間のセルの状態を把握しやすくなったという点である。三次元空間上のライフゲームでは、セルの状態をどのように見せるかという問題がある。特に、一方向からしか観察できないものはセルの陰の部分が非常に把握しにくい。今回開発したライフゲームプログラムでは、セルをリアルタイムかつインタラクティブに回転・拡大・縮小できるようにして、この問題をほぼ解決することができた。

また、第2点目の特徴によって、セルの組み合わせの試行錯誤が容易になった。多くの三次元ライフゲームプログラムは、初期状態をテキストエディタ等を使って作成する。このため、エディット中に、初期状態の三次元的なイメージをつかみにくく、また

ライフゲームプログラムとテキストエディタの行き来が煩雑であるという問題がある。本研究で開発したプログラムでは、インタラクティブに初期状態をエディットすることが可能で、プログラムを切り替える必要もなく、エディットに関する問題を解決することができた。Fig.3-2 がエディット画面である。キーボードでグリーンのカursorをセルを生成または削除したい位置に移動し、スペースキーを押すことでエディットできる。また、この状態で、自由に回転・拡大・縮小が可能で、三次元的なイメージを把握しやすくなっている。

このプログラムを、CPUがPentium90MHzのDOSマシン上のWindows95で実行した場合、大きさが $16 \times 16 \times 16$ のセル空間に、セル個数250個で約6フレーム毎秒の速度で動作する。プログラムが快適に動作する限界点を明確に決めることはできないが、Pentium90MHzではこの値がおおよその限界点である。

4. 「四次元の女王配置」の開発

「四次元の女王配置」とは、エイト・クイーンパズルとして知られるパズルを四次元に拡張したものである。もとのエイト・クイーンパズルは、二次元のチェス盤上に8個のクイーンを互いに取合うことのできない位置に置くというものであった。このパズルの三次元への応用もあるが、ここではもうひとつ次元を増した四次元版を扱う。「四次元の女王配置」では、互いに取合わない位置に配置することのできるクイーンの個数の最大値と、すべてのセルをきき筋に収めることのできるクイーンの個数の最小値を求めることを目的とする。

四次元の女王配置の場合、ひとつのクイーンを (X, Y, Z, W) に置いたときのききすじは次のようになる。

$$(X + P, Y + Q, Z + R, W + S) \\ \{P, Q, R, S : -1 \text{ to } 1, \\ \text{ただしすべてが0の場合を除く}\}$$

Fig.4-1 が本研究で開発した四次元の女王配置のプログラムの画面である。このプログラムでは、四次元のセル空間を可視化するために、 $n \times n \times n \times n$

n のセルを、 $n \times n$ 個の 2 次元のセル空間に分割した。大きな横軸が Z 軸、大きな縦軸が W 軸、それぞれの小さな 2 次元のセルの横軸が X 軸、縦軸が Y 軸である。例えば、Fig.4-1 の太線 A で囲んだセルは $(x,y,1,2)0_i=x_i=3,0_j=y_j=3$ である。また、セル B の座標は $(3,0,1,2)$ である。

このプログラムでは、それぞれのセルの状態を色分けして表示する。クイーンが存在せず、ききすじにも入らないセルはグレーで表示する。そして、クイーンが存在するセルをダークグリーン、クイーンのかきすじにあたるセルをライトグリーンで表示する。ただし、直前に置いたクイーンは赤、直前に置いたクイーンのかきすじはピンクで表示する。

二次元のエイトクイーンパズルの場合は、コンピュータを使って何通りの配置があるのかを計算することができた。しかし、四次元の女王配置の場合、組み合わせの数膨大になるため、すべての可能性を試行することは事実上不可能である。仮に、 $4 \times 4 \times 4 \times 4$ のセル空間を仮定すると、組み合わせの数は 2 の 256 乗となる。対称性の除去などを工夫しても、組み合わせ数はまだ大きすぎる。Fig.4-2 に、 $4 \times 4 \times 4 \times 4$ のセルで、これまでに確認した最小個数ですべてをかきすじの収めるパターンと、置くことのできる最大個数のパターンをあげる。

また、このプログラムでは、最大 $10 \times 10 \times 10 \times 10$ のセル空間でパズルを試行することができる。しかし、すべてのセルをかき筋におさめるために配置しなくてはならないクイーンの個数が多くなりすぎないためには、現実的に楽しめる大きさは、 $5 \times 5 \times 5 \times 5$ が限界である。

5. 「四次元ハイパーキューブ迷路」の開発

ハイパーキューブとは、四次元の立方体である。 N 次元のオブジェクトは、いくつかの $N-1$ 次元のオブジェクトの集合であらわすことができる。二次元のオブジェクトである正方形は一次元のオブジェクトである直線 4 本からできている。三次元のオブジェクトの立方体は、二次元のオブジェクトである正方形 6 枚からできている。同様に、四次元の立方体の

ハイパーキューブは、8 個の立方体からできている。

Fig.5-1 がハイパーキューブの三次元イメージである。ハイパーキューブの内外の立方体の各辺が (x,y,z) 軸をあらわし、外側と内側をむすぶ直線が w 軸をあらわす。

本研究では、このハイパーキューブの中をウォークスルーすることができるプログラムを開発した。Fig.5-2 が本研究で開発したハイパーキューブのウォークスループログラムの画面である。ハイパーキューブは 8 個の立方体からできているから、合計 48 個の正方形の面がある。このプログラムでは、その各面にギリシア文字をあてはめた。ギリシア文字は、全部で 24 種類の文字があり、それぞれに大文字と小文字があるから、ちょうどハイパーキューブの面の数と一致する。また、ギリシア文字は大文字の面の裏は同じ文字の小文字が、小文字の面の裏は同じ文字の大文字がくるように文字を割り振っている。対称性をもつ文字の上下左右を区別するために、すべての文字に下線を付して方向を明示した。

このプログラムには、ウォークスルーしていて、自分がハイパーキューブのどのキューブにいるのかをわかりやすくするために、SHIFT キーを押している間、自分の位置を表示する機能がある。Fig.5-2(b) は、Fig.5-2(a) の位置で SHIFT キーを押して、自分の位置を表示したものである。青で表示したキューブが、自分のいるキューブである。

また、ハイパーキューブのもうひとつ重要な性質として、 X, Y, Z, W のそれぞれが等価であるという点がある。三次元グラフィックスアニメーションも、 X, Y, Z に加えて時間軸が入るため、四次元であると見ることができ、この場合、時間軸に特殊な役割があるため、本当の意味での四次元の可視化とは言えない。これに対して、ハイパーキューブの X, Y, Z, W は等価なので、互いに軸を入れ替えても各軸の独立性は変わらない。この軸の入れ替えを可視化すると、ちょうどハイパーキューブが歪んで、キューブが入れ替わるように見える。上のプログラムには、ハイパーキューブが歪むようすをアニメーションとして表示する機能がある。Fig.5-3 に、本プログラムを使って作成した軸の入れ替えの図をあげる。

上記のような機能により、このプログラムを使うと四次元のオブジェクトであるハイパーキューブの

構造をわかりやすく把握することができる。このような点により、このプログラムは、パズルとして楽しむことができるだけでなく、四次元の認知の例題としても使うことができる。

6.Blue Impulse Library について

上に述べたプログラムは、すべて Blue Impulse Library[1] というグラフィックスパッケージを利用して開発した.Blue Impulse Library は、当研究室で独自に開発したグラフィックスパッケージである。この章では、この Blue Impulse Library の特徴と、今回のプログラム開発における利点について述べる。

Blue Impulse Library には、次の三通りの特徴がある。

- 1 高速な三次元グラフィックス描画が可能である
- 2 クロスプラットフォームでの開発ができる
- 3 関数セットがシンプルである

第1点目の特徴は、高速な三次元グラフィックス描画が可能であるという点である。この点は、インタラクティブなプログラムの開発において重要である。Blue Impulse Library では、次の3点を工夫して高速性能を実現している。

- Z-Sort 法のアルゴリズムの工夫
- 三次元グラフィックス専用ハードウェアを搭載したプラットフォームでのバイパス機能
- カリング (見えないことが明らかなオブジェクトをあらかじめ描画対象から除外する)

第2点目はクロスプラットフォームでの開発が可能であるという点である。Blue Impulse Library は、現在以下の7種類のプラットフォームで利用することができる。

- Windows3.1
- Windows95

- Macintosh
- Macintosh PowerPC
- Silicon Graphics(IRIX)
- FM-TOWNS(TownsOS)
- X-Window

これにより、開発したアプリケーションを多く利用してもらうことができる。さらに、複数のプラットフォームでプログラムを実行することによって、潜在している障害を洗い出すことができるという利点もある。

第3点目は関数セットがシンプルであるという点である。関数セットが複雑過ぎるという点が、現行の多くの三次元グラフィックスライブラリのもつ問題点である。極端なものでは一枚のポリゴンを描画するためだけでかなり長いプログラムを必要とするものがある。IRIS Performer[6] がその例で、高性能ながら複雑すぎる点が問題であった。BlueImpulse Library は、この点を考慮して、関数セットをシンプルにした。このことにより、プロトタイプの開発が容易になり、完成版までの開発工程を大きく短縮することができる。

これらのポイントは、今回の数理パズルプログラムという題材についても、開発を非常に容易にした。これまでに述べた数理パズルプログラムに共通する重要な点は、リアルタイムに反応するという点である。数理パズルをプログラムするとき、把握しにくい概念をいかに可視化するかという問題があった。今回の開発では、リアルタイムでインタラクティブな操作感によってこの問題をほぼ解決することができた。

また、それぞれのプログラムは、非常に短期間で骨格部分を開発することができた。複数のプラットフォームで動作を確認することで、完成度を高くすることができた。また、関数セットがシンプルで、骨格部分の開発後の機能拡張等も容易であった。

このように、今回の開発で、Blue Impulse Library は、数理パズルの可視化をはじめ、リアルタイムでインタラクティブなプログラムの開発に有効であるということを証明することができた。「リアルタイ

ム「インタラクティブ」は、今後の遊びやエンタテインメントにとって重要なキーワードである。

7. おわりに

本論文では、実環境で制作が困難な数理パズルをコンピュータ上の仮想空間を使うことによって実現した事例について述べた。また、数理パズルを可視化するにあたって、リアルタイム・インタラクティブであることが重要であることを述べた。

このように頭の中にあるパズルをこのような形のモデルで制作することで、実際に楽しめる形のものにすることができた。また、把握しにくい四次元のパズルも可視化することによって把握することができる。

リアルタイム・インタラクティブなプログラムを書くにあたって、本研究室で独自に開発したライブラリ Blue Impulse Library を利用した。さらに、Blue Impulse Library が今回の開発にとってどのような利点があったかを述べた。

本研究室では、今後とも Blue Impulse Library の開発と数理パズルの制作を続けてゆく予定である。さらに、今後は、コンピュータ上で表現できる動きを活かした作品を制作する予定である。

謝辞

本研究の一部は財団法人中山隼雄科学技術財団および慶應大学 SFC 研究コンソーシアム EEN プロジェクトの支援を受けている。ここに感謝の意を表わしたい。

日頃ご指導いただく千代倉弘明助教授、論文執筆にあたりアドバイスをしていただいた政策・メディア研究科2年の西村剛さん、英語についてのアドバイスをいただいた総合政策学部2年の大喜多優さんに感謝する。

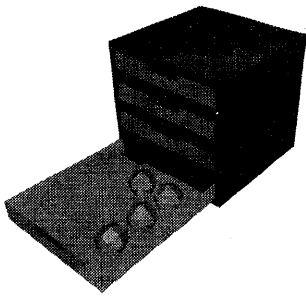


Fig.2-1 ハイゼンベルグボックスの画面

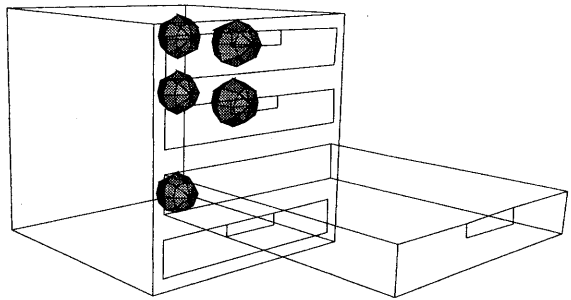


Fig.2-2 ハイゼンベルグボックスの透視図

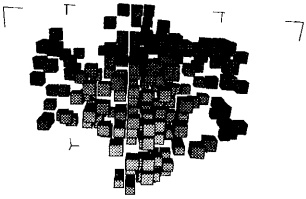


Fig.3-1 三次元ライフゲーム

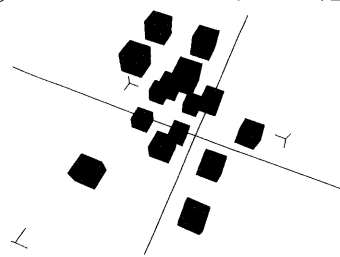


Fig.3-2 初期状態のエディット画面

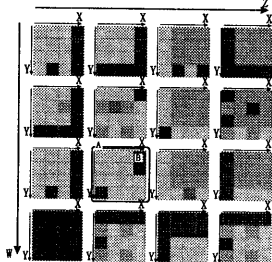


Fig.4-1 四次元の女王配置の画面

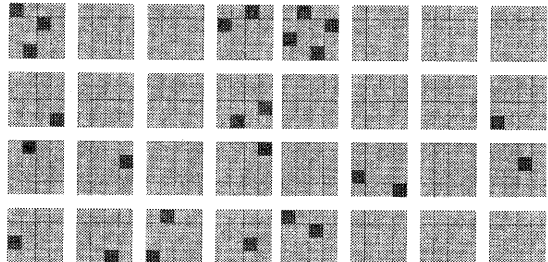


Fig.4-2 これまでの最大個数と最小個数の記録

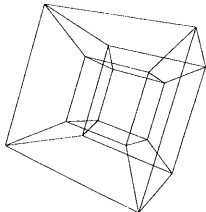
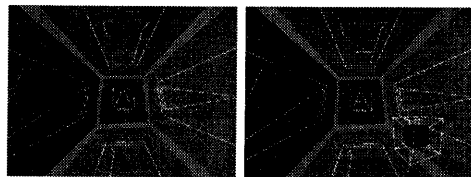


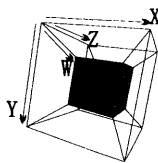
Fig.5-1 ハイパーキューブ



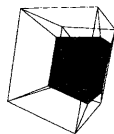
(a)

(b)

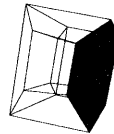
Fig.5-2 ウォークスルーの画面



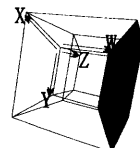
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig.5-3 ハイパーキューブにおける軸の入れ替え

参考文献

[1] 山川総司, 富田修平, 芳賀正憲, 有澤誠, クロスプラットフォーム・リアルタイム 3D グラフィックスライブラリの開発, 電子情報通信学会, 信学技報 SS95-12(1995-07), 1995

[2] 駒木悠二, 有沢誠編, ナノピコ教室, 共立出版, 1990

[3] William Poundstone, *The Recursive Universe*, International Creative Management, 1985

[4] E.R.Berlekamp, J.H.Conway, R.K.Guy, *Winning Ways 2*, Academic Press, 1982

[5] A.K.Dewdney, *Computer Recreation, 3D Life Game*, *Scientific American*, February 1987, (和訳: 日経サイエンス 1987 年 4 月号)

[6] *IRIS Performer Programming Guide*, Silicon Graphics Inc, 1992