

非線形ダイナミカルシステムにおけるコンシステンシー

内田 淳史[†] 葉 海鵬[‡] 吉森 茂[‡]

[†]埼玉大学大学院理工学研究科 〒338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保 255

[‡]拓殖大学工学部 〒193-0985 東京都八王子市館町 815-1

E-mail: laserchaos@hotmail.com

あらまし 多くの非線形システムは繰り返し入力された信号に対してコンシステンシー(consistency)のある振る舞いを示すことが近年注目されている。コンシステンシーとは、初期状態の異なる非線形システムがある信号により繰り返し駆動される場合に得られる非線形システムの出力の再現性のことである。非線形システムにおけるコンシステンシーは生体システム内の情報伝達や流体中のパターン形成などに本質的な役割を示す。そこで本研究では、代表的な非線形システムとしてマイクロチップ固体レーザーおよびマッキー・グラス電子回路を用いて、カオスまたはノイズ信号により繰り返し駆動することでコンシステンシーの実験的観察を行った。

キーワード コンシステンシー カオス レーザ 電子回路 同期

Consistency in nonlinear dynamical systems

Atsushi UCHIDA[†] Hoipang YIP[‡] and Shigeru YOSHIMORI[‡]

[†]Department of Information and Computer Sciences, Saitama University, 255 Shimo-Okubo, Sakura-ku, Saitama city, Saitama 338-8570, Japan

[‡]Department of Electronics and Computer Systems, Takushoku University, 815-1 Tatemachi, Hachioji, Tokyo 193-0985, Japan

E-mail: laserchaos@hotmail.com

Abstract Many nonlinear dynamical systems have an ability to generate consistent outputs when driven by a repeated external signal. Consistency is defined as the reproducibility of response waveforms in a nonlinear dynamical system driven repeatedly by a signal, starting from different initial conditions of the system. Consistency of dynamics is essential for information transmission in biological and physiological systems and for reproduction of spatiotemporal patterns in nature. We experimentally investigate consistency of response output in a microchip solid-state laser and a Mackey-Glass electronic circuit driven repeatedly by chaos and colored noise.

Keyword consistency, chaos, laser, electronic circuit, synchronization

1. はじめに

レーザーや電子回路は代表的な非線形システムであり、カオス発生や分岐現象、またカオス制御[1]やカオス同期[2]等の非線形力学分野における理論的現象を、精度良く再現する実験モデルとして重要な役割を果たしてきた。特に近年、多くの非線形システムは、繰り返し入力された信号に対してコンシステンシー(consistency)のある振る舞いを示すことが注目されている[3-9]。コンシステンシーとは、初期状態の異なる非線形システムが、ある信号により繰り返し駆動され

る場合に得られる非線形システムの出力の再現性のことである[3]。非線形システムにおけるコンシステンシーは生体システム内の情報伝達や流体中のパターン形成などに本質的な役割を示す[4]。特にレーザーにおけるコンシステンシーは、レーザーカオスの超高速性を利用した GHz オーダーでの物理的一方向性関数の実現に有用である[10]。さらにコンシステンシーは、生体システムのような関数定義の困難な高次元非線形システムにおいて本質的に有用な道具であり、脳の学習機能の解明[4]や生体模倣ロボットへの応用に繋がる可能

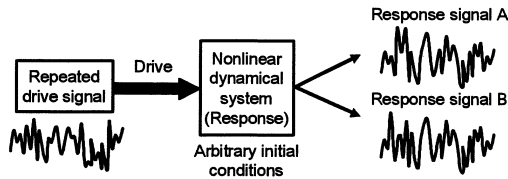


Fig. 1 Concept of consistency.

性を有している。

コンシステンシーの概念図を Fig. 1 に示す。決定論的カオスや統計的ノイズのような複雑な信号を駆動信号と仮定する。この信号で非線形システムを繰り返し駆動し、その時得られる応答出力信号（レスポンス信号と呼ぶ）を観測する。同一の駆動信号に対して得られたレスポンス信号を比較し、レスポンス信号同士が同一の波形であればコンシステンシーがあると定義する。一般に非線形システムの応答は初期値に強く依存することから（初期値鋭敏性）、同一の信号で非線形システムを駆動しても同一のレスポンス信号が得られるとは限らない。非線形システムにおけるコンシステンシーは一般化カオス同期に類似した現象ではあるが [11]、入力信号に制限が無い点においてより普遍的な概念であり、学術的にも非常に興味深い問題である。

本研究ではカオスまたは有色ノイズ信号により駆動された Nd:YAG マイクロチップ固体レーザーおよび時間遅延を有するマッキー・グラス電子回路を用いて、コンシステンシーを実験的に観測し、その条件について詳細に調査した。

2. レーザ実験

2.1. 実験装置

はじめに代表的な非線形システムとして半導体レーザー励起 Nd:YAG マイクロチップレーザーを用いた [3,12]。Fig. 2 に実験装置図を示す。マイクロチップレーザーの共振器内に音響光学素子 (Acousto-optic modulator: AOM) を配置し、レーザー強度に変調を加えている。レーザー出力振動波形はフォトダイオードで検出され、オシロスコープを通じてコンピュータ内のハードディスクに保存される。

コンシステンシーの実験に際して、駆動信号を用意した。本実験ではカオス信号および有色ノイズ信号(有限の相関時間を持つノイズ信号)を駆動信号として用いた。カオス信号の場合には、フォトダイオードで検出されたレーザー光強度を音響光学素子へフィードバックさせることでカオスを生成し [3,12]、それをコンピュータ内に保存して駆動信号とした。有色ノイズの場合

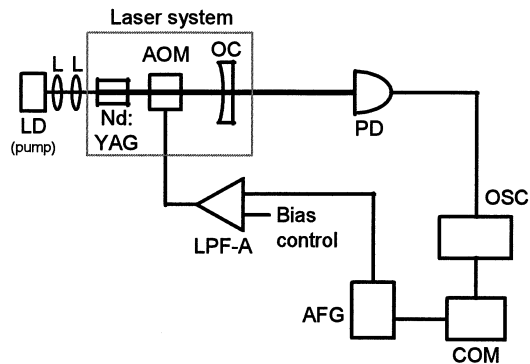


Fig. 2 Experimental setup of a diode-pumped Nd:YAG microchip laser for consistency. AFG: arbitrary function generator, AOM: acousto-optic modulator, COM: computer, L: lens, LD: laser diode for pumping, LPF-A: low pass filter and amplifier, Nd:YAG: Nd:YAG laser crystal, OC: output coupler, OSC: digital oscilloscope, PD: photodiode.

には数値計算によりコンピュータ内部で生成した [13]。ここで任意波形生成器にて駆動信号を作成し、ローパスフィルタおよび増幅器を通して音響光学素子により共振器内レーザー強度を変調した。変調により得られたレーザー出力振動波形をフォトダイオードで検出し、オシロスコープを経由してコンピュータ内のハードディスクに保存した。ここで重要なのが、レーザー自身も非線形ダイナミクスを有しているため、変調により得られるレーザー出力（レスポンス信号）は必ずしも駆動信号に一致しないということである。ハードディスクに保存されている駆動信号を完全なエンドレス信号としてファンクションジェネレータにより繰り返し再生し、音響光学素子へ送ることで複数のレスポンス信号が得られるが、このレスポンス信号同士が同一波形であればコンシステンシーが得られたと言える。

2.2. 時間波形

コンシステンシーの実験結果を Fig. 3 に示す。Fig. 3 はレーザー自身から得られたカオス波形を駆動信号として用いた場合の、駆動信号（ドライブ信号）およびレスポンス信号の時間波形を示している。駆動信号は二回レーザーへ送られ、それぞれ対応するレーザー出力を二つのレスポンス信号として表示している。Fig. 3(a) に示すように、通常の変調では二つのレスポンス信号は異なっており、コンシステンシーが得られていない。しかしながら駆動信号の振幅を調整すると（この場合には振幅を減少させた）、Fig. 3(b) のような結果が得られた。駆動信号を入力した直後ではレーザーシステムの初期値鋭敏性によりレーザー出力は異なっているが、

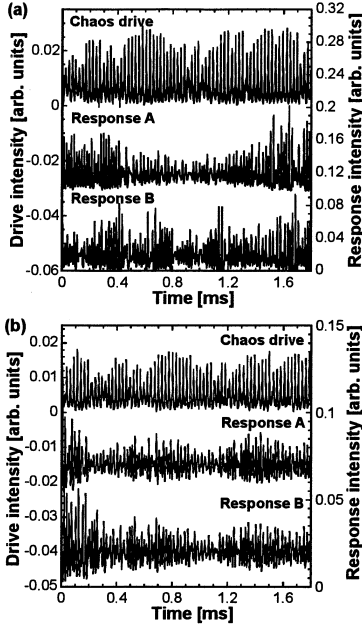


Fig. 3 Temporal waveforms of the chaotic drive signal and two corresponding response laser outputs. The amplitudes of the drive signals (measured as the standard deviation) are (a) $\sigma = 0.12$ (large) and (b) $\sigma = 0.035$ (small). (a) Inconsistent outputs are observed for large drive signals. (b) Consistent outputs are observed for small drive signals after transient.

0.5 ms 程度時間が経過すると二つのレスポンス信号は同一の波形になることが分かる。つまり過渡時間の経過後、二つのレスポンス信号間にはコンシステンシーが得られることが分かった。ここで興味深いのは、駆動信号とレスポンス信号の間にはほぼ相関が無いにも関わらず、二つのレスポンス信号同士は高い相関を示している点である。

同様に、コンピュータ内で数値的に生成された有色ノイズ波形を駆動信号として用いた場合の実験を行った。その結果を Fig. 4 に示す。駆動信号の振幅が大きい場合にはコンシステンシーが得られないが (Fig. 4(a))、振幅を減少させると過渡時間の経過後に二つのレスポンス信号が同一波形となり、コンシステンシーが得られた (Fig. 4(b))。以上より、駆動信号がカオスの場合もノイズの場合もコンシステンシーが得られることが明らかとなった。

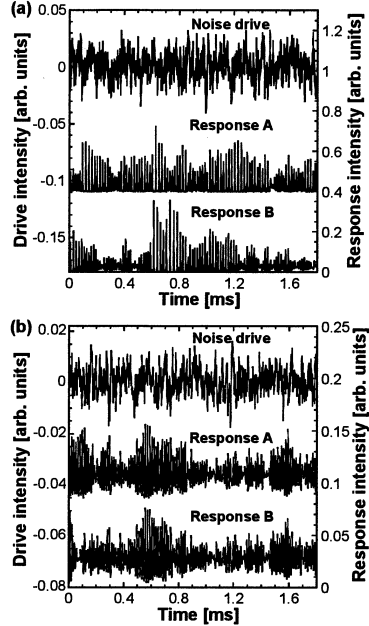


Fig. 4 Temporal waveforms of the colored noise drive signal and two corresponding response laser outputs. The amplitudes of the drive signals (measured as the standard deviation) are (a) $\sigma = 0.15$ (large) and (b) $\sigma = 0.045$ (small). (a) Inconsistent outputs are observed for large drive signals. (b) Consistent outputs are observed for small drive signals after transient.

2.3. パラメータ依存性

コンシステンシーを定量的に評価するために、相互相関関数を導入する。相互相関関数は、以下のように表わされる。

$$C = \frac{\langle (I_1 - \bar{I}_1)(I_2 - \bar{I}_2) \rangle}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \dots (1)$$

ここで $I_{1,2}$ はレーザ出力強度、 $\bar{I}_{1,2}$ は出力強度の平均値、 $\sigma_{1,2}$ は出力強度の標準偏差、 $\langle \rangle$ は時間平均を意味する。相互相関関数が 1 に近いほどコンシステンシーが得られていると言える。時間波形の過渡応答を除去し、13 ms の時間長の波形に対して二つのレスポンス信号間の相互相関関数を計算した。

ここで相互相関関数を用いて駆動信号の振幅に対

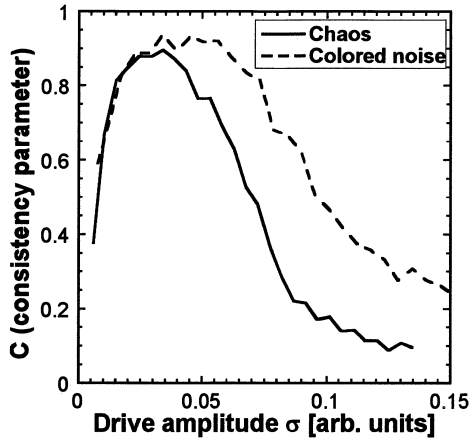


Fig. 5 Cross correlation between two response waveforms as a function of the amplitude (measured as the standard deviation) of the chaos (solid curve) and colored noise (dashed curve) drive signals.

する依存性を調査した。駆動信号の振幅の大きさを変化させた時の二つのレスポンス波形間の相互相関関数の実験結果を Fig. 5 に示す。カオスおよび有色ノイズを駆動信号として用いた場合の結果であり、横軸は駆動信号の振幅の大きさを標準偏差で示している。駆動信号が非常に小さい場合にはコンシステンシーが低いが、駆動信号の振幅を徐々に増大させるとコンシステンシーが向上することが明らかとなった。さらに駆動信号を大きくすると、再びコンシステンシーが低下することが分かった。つまりカオス駆動および有色ノイズ駆動のどちらの場合でも、最も良いコンシステンシーを得るための駆動信号の振幅には最適値が存在することが明らかとなった。

3. 電子回路実験

3.1. 実験装置

続いて、別の非線形システムとして時間遅延を有するマッキー・グラス電子回路[14]を用いた。実験装置図を Fig. 6 に示す。はじめにマッキー・グラス電子回路にてパラメータを調整し、カオスを発生させた[14]。本実験では有色ノイズ信号を駆動信号として使用した。前章と同様に、有色ノイズは計算機にて数値計算により生成した[13]。生成された有色ノイズ信号はファンクションジェネレータを用いて繰り返し出力され、回路か

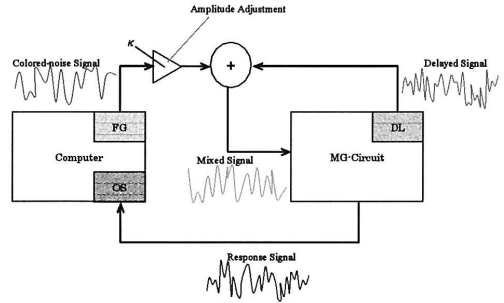


Fig. 6 Experimental setup of the Mackey-Glass electronic circuit with time delayed feedback for consistency.

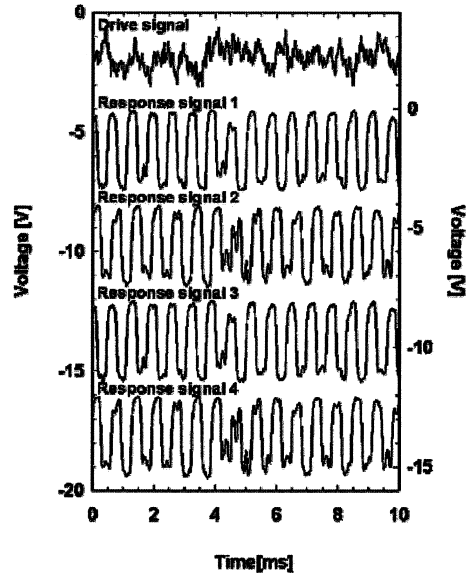


Fig. 7 Temporal waveforms of response output in the Mackey-Glass circuit driven by the same colored-noise signal.

らの遅延フィードバック信号と加算されて電子回路を駆動した。駆動信号の振幅を調節しながら、同一の時系列を複数回繰り返して入力し、対応する電子回路からの応答出力信号（レスポンス信号）が同一であるか否かを比較して、コンシステンシーの有無を調査した。

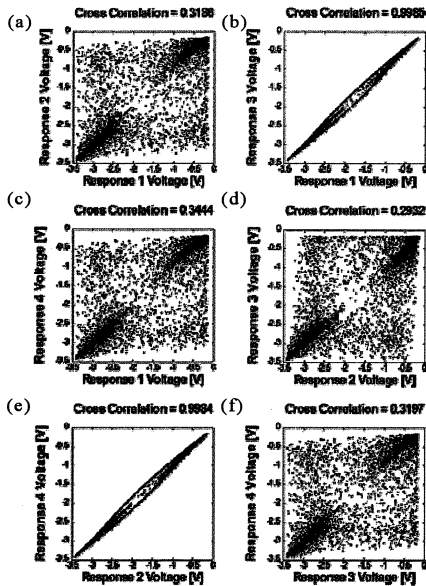


Fig. 8 Correlation plots between (a) Response 1 and 2, (b) Response 1 and 3 (consistency), (c) Response 1 and 4, (d) Response 2 and 3, (e) Response 2 and 4 (consistency), (f) Response 3 and 4.

3.2. 実験結果

同一の有色ノイズ信号により4回駆動されたマッキー・グラス電子回路のレスポンス信号をFig. 7に示す。この結果より、ノイズ信号駆動されたマッキー・グラス電子回路においてもコンシステンシーが得られることが実験により明らかとなった。しかしながら同一の駆動信号に対し、二種類の安定したレスポンス信号が得られていることが分かる。4つのレスポンス信号のうち2つの時間波形の組み合わせに対する相関図をFig. 8に示す。これより、Response 1と3の波形はほぼ同一であり(Fig. 8(b))、Response 2と4の波形も等しいことがわかる(Fig. 8(e))。一方でそれ以外の組み合わせでは異なる出力波形であることが明らかとなった。つまり2つの異なる安定したレスポンス信号が存在し、それぞれの波形に対してコンシステンシーが観測されることが分かった。このような実験的観測は本実験が初めてであり、Multiple basins of consistencyと呼ぶことにする。これは Multi stability のような複数のアトラクタが共存する状態に関連していると考えられる。どちらのレスポンス信号へ収束するかは電子回路の初期値に強く依存していることが分かった。

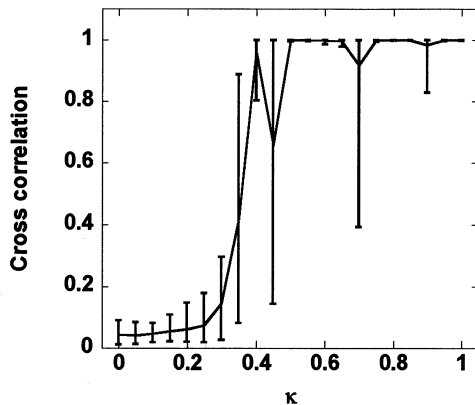


Fig. 9 Average cross correlation as a function of the strength of the colored-noise drive signal. Vertical lines indicate error bars (maximum and minimum values of cross correlation).

さらに駆動信号強度 κ を変化させた場合の、10個のレスポンス信号に対する相互相関関数の平均値を求めた結果をFig. 9に示す。駆動信号強度を増大させるにつれて、相互相関関数の平均値は大きくなり、1へと収束した。ここで注目すべきは、中程度の駆動信号強度の場合である。Fig. 9は相互相関関数の平均値のみならず、最大値および最小値をエラーバーにて示している。つまりFigs. 7, 8に示すような相関の組み合わせを持つ場合には、エラーバーの最大が1でかつエラーバーが長くなる。これは複数のレスポンス信号のうち、同一のレスポンス信号間では相関がほぼ1になるが、異なるレスポンス信号間では相関が低くなるためである。このようにエラーバーの最大値が1でかつ長いエラーバーを有する領域は、Multiple basins of consistencyが観測される領域であり、中程度の駆動信号強度において見られることが分かる。つまり Multiple basins of consistency は比較的広範囲において存在していることが実験的に明らかとなった。

4. まとめ

本研究では外部駆動された非線形システムに普遍的に存在するコンシステンシーを、レーザおよび電子回路を用いて実験的に観測した。カオスおよび有色ノイズを駆動信号としてレーザを駆動した場合、同一の駆動信号に対して同じ波形の応答出力信号が得られ、コンシステンシーが観測された。また駆動信号の振幅

を変化させた場合、二つの応答出力信号間の相互相関関数は変化し、最も良いコンシステンシーを得るための最適な振幅値が存在していることが明らかとなった。

また、有色ノイズ信号により駆動されたマッキー・グラス電子回路を用いて、コンシステンシーの実験的観測を行った。その結果、同一の駆動信号に対して、複数の安定した応答出力信号が得られる場合が存在することが明らかとなった。このように非線形システムの応答出力信号が複数安定に存在する現象(Multiple basins of consistency)を実験的に初めて観測した。

コンシステンシーは、入力信号を再現性のある複雑な出力信号へと変換する非線形信号処理と捉えることができる。従ってコンシステンシーは、レーザや電子回路のような物理システムのみならず、生体システムや流体系など様々な分野において共通の普遍的概念であり、特に脳内での学習機能の解明や流体のパターン形成の理解に対する道具としても有用であると考えられる。このように工学的・学術的観点からもコンシステンシーの研究は非常に重要であり、今後の発展が期待される分野である。

5. 謝辞

本研究は、文部科学省科学研究費補助金若手研究(B)および(財)テレコム先端技術研究支援センターのご支援により行われた。

参考文献

- [1] E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196 (1990).
- [2] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 821 (1990).
- [3] A. Uchida, R. McAllister, and R. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 244102 (2004).
- [4] Z. F. Mainen and T. J. Sejnowski, *Science* **268**, 1503 (1995).
- [5] R. V. Jensen, *Phys. Rev. E* **58**, R6907 (1998).
- [6] C. Zhou and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 230602 (2002).
- [7] J. N. Teramae and D. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 204103 (2004).
- [8] H. Nakao, K. Arai, K. Nagai, Y. Tsubo, and Y. Kuramoto, *Phys. Rev. E* **72**, 026220 (2005).
- [9] K. Yoshimura, I. Valiusaityte, and P. Davis, *Phys. Rev. E* **75**, 026208 (2007).
- [10] R. Pappu, B. Recht, J. Taylor, and N. Gershenfeld, *Science* **297**, 2026 (2002).
- [11] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring and H. D. I. Abarbanel, *Phys. Rev. E* **51**, 980 (1995).
- [12] A. Uchida, R. McAllister, R. Meucci, and R. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 174101 (2003).

[13] R. F. Fox, I. R. Gatland, R. Roy, and G. Vemuri, *Phys. Rev. A* **38**, 5938 (1988).

[14] S. Sano, A. Uchida, S. Yoshimori, and R. Roy, *Phys. Rev. E* **75**, (2007) 016207.