社団法人 情報処理学会 研究報告
IPSJ SIG Technical Report

2008－MPS－72 (7)
2008－BIO－15 (7)
2008／12／17

# 完全K分木の同一階層内で単純閉路を構成する辺追加問題

澤田 清
流通科学大学 情報学部 経営情報学科

**概要** 本研究では，高さ $H$ の完全 $K$ 分木（$K \geq 3$）に対して，最深共通祖先の深い頂点間を優先して，深さ $N$ の全頂点で一つの単純閉路を構成するように辺を追加する問題を考える．ここでは，完全 $K$ 分木の全頂点対について，辺追加による最短経路の短縮長を合計した総頂点間短縮経路長を最大にする深さ $N^*$ を求めることを意図して，総頂点間短縮経路長の定式化を行う．

# Adding Edges of Forming a Simple Cycle in the Same Level of a Complete K-ary Tree

Kiyoshi Sawada
Department of Information and Management Science, Faculty of Information Science,
University of Marketing and Distribution Sciences

**Abstract** This study proposes a problem of adding edges of forming a simple cycle in the same level $N$ of a complete $K$-ary ($K \geq 3$) tree of height $H$ under giving priority to edges between two nodes of which the deepest common ancestor is deeper. The total shortening path length which is the sum of shortening lengths of shortest paths between every pair of all nodes is formulated with the intention of obtaining the optimal depth $N^*$ by maximizing the total shortening path length.

## 1. はじめに

ピラミッド組織は上下間の一元的な命令系統に基づく階層構造を持つ組織であり，上司と直属の部下との間にのみ情報交換を行える関係が存在する [1, 2, 3]．しかし，直接の上下関係を飛び越えた指示命令や他部門との協力が必要な場合には，事前に直接の上下間以外の関係形成を行うことが有効であると考えられる．

ピラミッド組織構造は，構成メンバーを頂点に，上下のメンバー間関係を辺に対応させると，根付き木であると考えることができる．このとき，各頂点間の経路は組織内のメンバー間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，根付き木に辺を追加することは，直接の上下関係以外の追加的関係の形成に相当する．著者らは，ピラミッド組織構造を対象として，組織全体の情報伝達が最も効率的になるような，メンバー間の関係追加位置を求めるモデルをいくつか提案した．文献 [4] では，完全２分木型組織構造に対して直系の関係を持つ異なる階層の２人のメンバー間に関係を追加するモデルを提案した．文献 [5] では，完全 $K$ 分木型組織構造を対象として，１つの同一階層内で関係を追加する３つのモデル，(i) ２人のメンバー間の関係追加，(ii) 同じ上司を持つメンバー間の関係追加，(iii) 全メンバー間の関係追加，を提案した．そこでは，完全 $K$ 分木型組織構造の全メンバー間の最短経路長の総和（以後，総頂点間経路長と呼ぶ）が最小となるような関係追加の階層を解析的に求めた．さらに文献 [6] で，２つの階層それぞれで全メンバー間の関係追加を行うモデルについても，総頂点間経路長を最小にする２つの階層を求めた．

本論文では，完全 $K$ 分木型組織構造の同一階層内の全メンバーで，経路長の小さいメンバー間を優先して，一つの単純閉路を構成するように関係を追加する問題を考える．

## 2.　問題設定

高さ $H(H=1,2,\cdots)$ の完全 $K$ 分木 $(K=3,4,\cdots)$ に対して，深さ $N(N=1,2,\cdots,H)$ の全頂点で，一つの単純閉路を構成するように辺を追加する．ここで，完全 $K$ 分木は，すべての葉の深さが同じで，かつすべての内部頂点の子の数が $K$ である $K$ 分木を指す [7]．また，深さは根からその頂点までの経路の長さを表す．ここでは，$K=2$，すなわち完全2分木は問題の対象から除外する．また，深さ $N$ の全頂点で構成される単純閉路は複数の同型でないグラフを生成するが，ここでは経路長の小さい頂点間すなわち最深共通祖先が深い頂点間を優先して隣接化することにより単純閉路を構成することとする．

完全 $K$ 分木の2頂点 $v_i$ と $v_j$ $(i,j=1,2,\cdots,(K^{H+1}-1)/(K-1))$ の間の最短経路の長さを $l_{i,j}$ とすると（ただし $l_{i,j}=l_{j,i}$，$l_{i,i}=0$），$\sum_{i<j} l_{i,j}$ は総頂点間経路長を表す．また，上述したような辺の追加を行った後の2頂点 $v_i$，$v_j$ 間の最短経路の長さを $l'_{i,j}$ とすると，$l_{i,j}-l'_{i,j}$ は辺追加により2頂点間の最短経路の長さがどれだけ短縮されたかを表す．ここでは，これを2頂点間の短縮経路長と呼ぶ．さらに，全頂点間の短縮経路長の総和 $\sum_{i<j}(l_{i,j}-l'_{i,j})$ を，総頂点間短縮経路長と定義する．ここで，総頂点間短縮経路長を最大にすることは，総頂点間経路長を最小にすることを意味する．

以下では，上述したように，同一階層内で単純閉路を構成するように辺を追加した場合に，総頂点間短縮経路長を最大にする深さ $N^*$ を求めることを意図して，総頂点間短縮経路長の定式化を行う．

## 3.　総頂点間短縮経路長の定式化

定式の手順は次の通りである．まず，最深共通祖先の深さが $N-1$ の頂点間すなわち兄弟間でそれぞれ1本ずつの道ができるように辺を追加したときの短縮経路長の総和を求める．次に，最深共通祖先の深さが $N-2$ の頂点間で，先ほどの追加辺と合わせてそれぞれ1本ずつの道ができるように辺を追加したときの短縮経路長の総和を求める．これを，最深共通祖先の深さが0の頂点間まで繰り返したときの短縮経路長の総和を求めると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&A_H(N)\\
=\ & (K-1)\Big\{M(H-N)\Big\}^2\sum_{i=1}^{N}(2i-1)K^{N-i}+2(K-1)\Big\{M(H-N)\Big\}^2\sum_{i=1}^{N-1}2iK^{N-i-1}\\
&+2(K-1)M(H-N)\Big\{(K-2)M(H-N)+1\Big\}\sum_{i=1}^{N-1}(2i-1)K^{N-i-1}\\
&+2(K-1)\Big\{M(H-N)\Big\}^2\sum_{i=1}^{N-2}K^{N-i-2}\sum_{j=1}^{i}(2i-2j+2)\\
&+2(K-1)M(H-N)\sum_{i=1}^{N-2}K^{N-i-2}\sum_{j=1}^{i}\Big\{(K-1)M(H-N+j)-M(H-N)+1\Big\}\\
&\times(2i-2j+1)\\
&+(K-1)\Big\{M(H-N)\Big\}^2\sum_{i=1}^{N-1}(2i-1)K^{N-i-1}\\
&+2(K-1)M(H-N)\Big\{(K-2)M(H-N)+1\Big\}\sum_{i=1}^{N-2}2iK^{N-i-2}\\
&+2(K-1)\Big\{M(H-N)\Big\}^2\sum_{i=1}^{N-2}K^{N-i-2}\sum_{j=1}^{i}(2i-2j+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2(K-1)M(H-N)\sum_{i=1}^{N-3}K^{N-i-3}\sum_{j=1}^{i}\Big\{(K-1)M(H-N+j)-M(H-N)+1\Big\} \\
&\times(2i-2j+2) \\
&+(K-1)\Big\{(K-2)M(H-N)+1\Big\}^2\sum_{i=1}^{N-2}(2i-1)K^{N-i-2} \\
&+2(K-1)M(H-N)\Big\{(K-2)M(H-N)+1\Big\}\sum_{i=1}^{N-3}K^{N-i-3}\sum_{j=1}^{i}(2i-2j+2) \\
&+2(K-1)\Big\{(K-2)M(H-N)+1\Big\}\sum_{i=1}^{N-3}K^{N-i-3} \\
&\times\sum_{j=1}^{i}\Big\{(K-1)M(H-N+j)-M(H-N)+1\Big\}(2i-2j+1) \\
&+(K-1)\Big\{M(H-N)\Big\}^2\sum_{i=1}^{N-3}K^{N-i-3}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i-j+1}(2i-2j-2k+3) \\
&+2(K-1)M(H-N)\sum_{i=1}^{N-4}K^{N-i-4}\sum_{j=1}^{i}\Big\{(K-1)M(H-N+j)-M(H-N)+1\Big\} \\
&\times\sum_{k=1}^{i-j+1}(2i-2j-2k+4) \\
&+(K-1)\sum_{i=1}^{N-4}K^{N-i-4}\sum_{j=1}^{i}\Big\{(K-1)M(H-N+j)-M(H-N)+1\Big\} \\
&\times\sum_{k=1}^{i-j+1}\Big\{(K-1)M(H-N+k)-M(H-N)+1\Big\}(2i-2j-2k+3) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ただし，$M(h)(h=0,1,2,\cdots)$ は，高さ $h$ の完全 $K$ 分木の頂点数を表す．また，$\sum_{i=1}^{0}\cdot=0$，$\sum_{i=1}^{-1}\cdot=0$，$\sum_{i=1}^{-2}\cdot=0$，$\sum_{i=1}^{-3}\cdot=0$ と定義する．ここで，単純閉路を構成するためには，最深共通祖先の深さが 0 の頂点間にさらに 1 辺追加する必要があるので，その短縮経路長の総和を加えて，本問題の総頂点間短縮経路長 $S_H(N)$ は次のように定式化される．

$$
\begin{aligned}
&S_H(N) \\
&= A_H(N)+\alpha_H(N)+\beta_H(N) \\
&\quad+\Big\{M(H-N)\Big\}^2(6N-5)+2\Big\{M(H-N)\Big\}^2\sum_{i=1}^{N-2}(2N-2i-2) \\
&\quad+2M(H-N)\sum_{i=1}^{N-2}\Big\{(K-1)M(H-N+i)-M(H-N)+1\Big\}(2N-2i-3) \\
&\quad+2\Big\{M(H-N)\Big\}^2\sum_{i=1}^{N-2}(2N-2i-3) \\
&\quad+2M(H-N)\sum_{i=1}^{N-3}\Big\{(K-1)M(H-N+i)-M(H-N)+1\Big\}(2N-2i-4) \\
&\quad+2M(H-N)\Big\{(K-2)M(H-N)+1\Big\}\sum_{i=1}^{N-3}(2N-2i-4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2\Big\{(K-2)M(H-N)+1\Big\}\sum_{i=1}^{N-3}\Big\{(K-1)M(H-N+i)-M(H-N)+1\Big\} \\
&\times(2N-2i-5) \\
&+\Big\{M(H-N)\Big\}^2\sum_{i=1}^{N-3}\sum_{j=1}^{N-i-2}(2N-2i-2j-3) \\
&+2M(H-N)\sum_{i=1}^{N-4}\Big\{(K-1)M(H-N+i)-M(H-N)+1\Big\}\sum_{j=1}^{N-i-3}(2N-2i-2j-4) \\
&+\sum_{i=1}^{N-4}\Big\{(K-1)M(H-N+i)-M(H-N)+1\Big\} \\
&\times\sum_{j=1}^{N-i-3}\Big\{(K-1)M(H-N+j)-M(H-N)+1\Big\}(2N-2i-2j-5)\,. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

ただし，$\alpha_H(N)$，$\beta_H(N)$ は，

$$
\alpha_H(N)=\begin{cases} 0 & (N=1) \\ 2M(H-N)\Big\{(K-2)M(H-N)+1\Big\}(4N-7) & \\ +\Big\{M(H-N)\Big\}^2(2N-3) & (N\geq 2)\end{cases}, \qquad (3)
$$

$$
\beta_H(N)=\begin{cases} 0 & (N\leq 2) \\ \Big\{(K-2)M(H-N)+1\Big\}^2(2N-5) & (N\geq 3)\end{cases} \qquad (4)
$$

である．

総頂点間短縮経路長 $S_H(N)$ を最大にする深さ $N^*$ に関する理論的な解析結果は，発表時に報告する．

## 参考文献


[1] S. P. Robbins, Essentials of Organizational Behavior, 7th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2003.

[2] Y. Takahara, M. Mesarovic, Organization Structure: Cybernetic Systems Foundation, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003.

[3] N. Takahashi, “Sequential analysis of organization design: a model and a case of Japanese firms”, European Journal of Operational Research, vol.36, pp.297–310, 1988.

[4] 澤田 清, “総頂点間経路長を最小にする完全２分木の階層間隣接化”, 日本応用数理学会論文誌, vol.13, no.3, pp.353–360, 2003.

[5] K. Sawada, R. Wilson, “Models of adding relations to an organization structure of a complete $K$-ary tree”, European Journal of Operational Research, vol.174, pp.1491–1500, 2006.

[6] K. Sawada, “A model of adding relations in two levels to an organization structure of a complete binary tree”, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol.4, no.5, pp.1135–1140, 2008.

[7] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, Introduction to Algorithms, 2nd ed., MIT Press, Cambridge, Mass., 2001.