Vol. 27　No. 4　　　　　　　　情　報　処　理　　　　　　　　Apr. 1986

解　説

有限項で不定積分と微分方程式の解を表す†
――歴史と現状――

渡　辺　隼　郎††

1. は じ め に

不定積分と常微分方程式の解を式で求めるという問題は数式処理の中の二つの比較的大きな分野としてごく初期から扱われてきた．ユーザが比較的多く，数式処理の中の基本的ライブラリとしての価値があったからと思う．

現在の数式処理システムを理解するため，現在位置を確認してみよう．

（1） 数式処理は数学とコンピュータの接点にある．数学は数百年の伝統を持つがコンピュータは 40 年の歴史しかない．

（2） 数学は受験では高い位置を占めるが一般の人の興味はコンピュータにはるかに及ばない．

（3） 数学に関心のあるのはメーカである数学者と，物理，化学，工学，経済学に携わる者またはエンジニアなどの，数学のユーザである．

（4） 数式処理を必要とする人は，今までは多量の計算を必要とする人たちであった．その大多数は（3）で述べた数学のユーザであった．

（5） 計算の内容は古典的な微積分，線型代数，微分方程式，などが中心である．これが現在の数式処理システムの主な内容である．

（6） 需要が少なかったので，数学特有の抽象的な概念操作は今までの数式処理システムにはほとんど取り入れられてはいない．

数式処理のための不定積分と微分方程式の解法について，以下のことを調べてみたい．

（1） 理論的に解法が存在するか．

（2） ある場合，それは実用的か．

（3） ない場合，どうするか．

（4） 既成のプログラムはどこまでのことができるか．

（5） 既成のプログラムはどのくらい，信頼できるか．

（6） 今後はどうなるのか．

まず次のことを注意しておこう．

（1） 広く使われる数式処理システムの種類と内容は時とともに変化する．

（2） ある数式処理システムの積分や微分方程式パッケージの内容も流動的で時間とともに変化する．

したがって，あるシステムのあるパッケージがある問題を解けなかったからといって，数年後もそうであるとは限らない．逆に解けなくなることもある．

（3） 数式処理システムのパッケージとしての使い良さは適用範囲が広いことと虫が少ないことである．

既知の理論について．

（1） 初等関数の不定積分が初等関数で表せる場合については 1830 年代には Liouville の理論があり，その具体的な形の求め方については，個々の場合については今世紀の初めには相当なことが知られている．より一般には 1969 年-1970 年の Risch の手続きがある．Risch の手続きを完全に移したプログラムが積分できない関数は初等関数で表せない証明を得たことになる．

しかし，代数的要素と初等超越関数が混在した場合などに関する理論と解法の手続きはまだ知られていない．

（2） 有理関数係数の 1 階常微分方程式に関しては，標準型に帰着させる Painlevé-Malmquist-福原-木村の理論がある（1895 年-1954 年）．

有理関数係数の 2 階線型常微分方程式の場合には，代数関数解を持つ場合に関して 1857 年の Schwartz の理論と 1979 年の Kovacic の手続きがある．

有理関数係数の n 階線型常微分方程式の解が初等関数で表せる場合については 1980 年の Singer の理論と手続きがある．しかし，初等関数を係数とする方程式の解法に関する理論と手続きはまだ知られていない．

---

† Integration and Ordinary Differential Equation in Finite Terms—Its Histry and Present Situation by Shunro WATANABE (Dept. of Mathematics, Tsuda College).

†† 津田塾大学数学科

以上の理論をプログラムに直す際の問題点

（1） 数学者とエンジニアの間の対話を円滑に進める必要がある．

（例1） Risch の手続きは数学的には高く評価されないが，プログラマには使える部分がかなりある．

（例2） Schwartz の理論は数学的に有名だが，このままでは，プログラマは使いようがない．

（2） コンピュータの記憶容量や計算時間を浪費する手続きでは実用にならない．

2. 有限項による不定積分

2.1 基本的な注意

（イ） 積分すると言うとき，どの変数で積分するかを指定する必要がある．

$$\frac{x}{\log(1-\mathrm{sqrt}(y))}$$

を積分せよと言われると難かしそうであるが，積分変数が x ならば，これは，x の定数倍を積分するだけのことである．

（ロ） 今度は x を積分変数として，関数

$$\frac{x^k}{1+x}+f(k)e^{-x^2}$$

の積分を考えよう．ここに k は未定の定数である．この関数の第1項は k が有理数のときだけ，初等関数で表される積分を持つ．一方この関数の第2項は $f(k)=0$ のときだけ初等関数で表される積分を持つ．したがってこの関数の不定積分が初等関数で表されるか否かを調べるには，任意の関数 f について

$$f(k)=0$$

が有理数の解 k を持つか否かを調べなければならない．もちろんこのようなアルゴリズムは知られていない．この例を挙げて不定積分を有限項で表す問題の難かしさを強調することもできるし，ユーザが少し注意すれば，この種の困難は容易に避けることができるということもできる．

以下に必要なので有理関数と代数関数の意味を定義しておこう．

（イ） 有理関数は積分変数に関する多項式を分子，分母とする有理式と考える．係数は積分変数さえ含んでいなければ，どのような関数のどのような組み合わせでも良いが，四則はできるものとする（数学の用語を用いると係数はある体 F に属するものとする）．

（ロ） 代数関数は積分変数 x と有限個の量

$$y_1\ y_2\ \cdots\ y_n$$

の有理式である．ここに各量 y_i は代数方程式

$$f_i(x, y)=0$$

の解である．ここに n 個の $f_i(x, y)$ は x と y の多項式である．その係数は体 F に属する．

2.2 有理関数の不定積分

不定積分を求める手続きの中では，有理関数の不定積分を求める手続きが最も基本的である．以下の手続きはすでに1830年ごろに Liouville に知られており，以下の形では，古典的な解析学の教科書である1902年の参考文献3) に述べられている．

入力：積分変数 x，有理関数 $u(x)/v(x)$，
u と v は x の多項式でその係数はある体 F に属し，四則計算はできるものとする．

出力：$u(x)/v(x)$ の x に関する積分．

有理関数の不定積分を求める手続き．

（第1段） もし $\deg(u(x))>\deg(v(x))$ ならば，被積分関数を書き換え

$$\int\frac{u(x)}{v(x)}dx=\int w(x)dx+\int\frac{u_1(x)}{v(x)}dx \tag{1}$$

とする．ここに $w(x)$ は多項式で，

$$\deg(u_1)<\deg(v)$$

である．$w(x)$ の不定積分は容易に求まるので u_1/v の積分を考察しよう．

（第2段） $v(x)$ を無平方分解する．すなわち，

$$v(x)=v_1(x)v_2^2(x)\cdots v_k^k(x) \tag{2}$$

とする．ここに $v_i(x)$ は同じ因子を2以上持たない（無平方の）多項式である．この計算は多項式の四則（有理計算）を用いてできる．すなわち，微分と GCD を反復することによって得られる．

（第3段）

$$q(x)=v_2(x)v_3^2(x)\cdots v_k^{k-1}(x) \tag{3}$$

とおく．$q(x)$ は $v(x)$ と $v(x)$ を1回微分したものの GCD をとることによって得られる．

（第4段）

$$q_1(x)=v_1(x)v_2(x)\cdots v_k(x) \tag{4}$$

とおく．

（第5段）

$p(x)$ は次数が $\deg(p)=\deg(q)-1$ で，係数が未定の多項式とする．この係数が求まれば，$p(x)/q(x)$ は $u_1(x)/v(x)$ の不定積分の有理部分である．

$w(x)$ は次数が $\deg(w)=\deg(q_1)-1$ で，係数が未定の多項式とする．$w(x)/q_1(x)$ の不定積分は純粋に対数的である（第7段参照）．

$$\int\frac{u_1(x)}{v(x)}dx=\frac{p(x)}{q(x)}+\int\frac{w(x)}{q_1(x)}dx \tag{5}$$

が成立する．この式は未定の多項式 $p(x)$ と $w(x)$ の係数 p_i と w_i に関して線型である．

この式の両辺を x で微分すると次式を得る．

$$\frac{u_1(x)}{v(x)}=\frac{d}{dx}\frac{p(x)}{q(x)}+\frac{w(x)}{q_1(x)} \qquad (6)$$

この式は，それが含む $\deg(p)+\deg(w)+2$ 個の未定の

$$p_i\,;\ i=0,1,\cdots,\deg(p).\quad w_j\,;\ j=0,1,\cdots,\deg(w)$$

に関する連立１次方程式を表している．

（第６段）この連立１次方程式は未知数の数と方程式の数が等しいので解くことができる．この解より，不定積分の有理部分は直接に得られる．

（第７段）$q_1(x)$ をその分解体（係数体 F に，$q_1(x)=0$ のすべての根を付加して得られた体）で因数分解する．

$$q_1(x)=a(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_k),\quad k=\deg(q_1) \qquad (7)$$

w/q_1 を部分分数展開すると

$$\frac{w(x)}{q_1(x)}=\frac{c_1}{x-r_1}+\frac{c_2}{x-r_2}+\cdots+\frac{c_k}{x-r_k} \qquad (8)$$

を得る．この両辺を積分して

$$\int\frac{w(x)}{q_1(x)}dx=c_1\log(x-r_1)+\cdots+c_k\log(x-r_k) \qquad (9)$$

を得る．これで，積分の値を求め終った．

例

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^5}=\frac{p_7x^7+\cdots+p_0}{(x^2+1)^4}+\int\frac{q_1x+q_0}{x^2+1}dx$$

から $p_7,\cdots,p_0,q_1,q_0$ に関する連立１次方程式を解き

$$\frac{105x^7+385x^5+511x^3+279x}{384(x^2+1)^4}+\frac{35}{128}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

を得る．この第２項の積分はさらに

$$\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2i}\int\frac{dx}{x-i}-\frac{1}{2i}\int\frac{dx}{x+i}$$
$$=\frac{1}{2i}\log(x-i)-\frac{1}{2i}\log(x+i)$$

となる．

上述の手続きにおいて（第１段）から（第６段）は比較的に容易である．積分の計算に要する費用は（第７段）における無平方の多項式 $q_1(x)$ を完全に１次因子まで因数分解する場合，$q_1(x)=0$ の根をすべて含む体における四則計算にかかってくる．したがって，必要な計算を行うのに必要な最小の体を求めることが望ましい．

次の手続きは必要な最小の拡大体を定義する多項式を求めるためのものである．適当な環境のもとでは，上に述べた手続きよりは効率が良くなる．

2.3 正規有理関数の不定積分

以下の手続きは参考文献 17) にある．

入力：積分変数 x，既約な有理関数 $p(x)/q(x)$ $\deg(p)<\deg(q)$，$q(x)$ は最高次の係数が１で，無平方．

出力：$p(x)/q(x)$ の不定積分．

（第１段）c を新しい未知数として

$$r=R\left(p-c\frac{dq}{dx},q\right)$$

を考える．ここに $R(f,g)$ は多項式 f と g の終結式 (resultant) であり，f と g が

$$f=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$
$$g=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

のとき

$$R(f,g)=\begin{array}{c}\left|\begin{array}{cccccccccc}a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_m & a_{m-1} & \cdots & & a_1 & a_0\\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0\\ 0 & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & 0 & & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & b_n & b_{n-1} & & \cdots & b_0\end{array}\right|\end{array}\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}n\text{行}\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}m\text{行}\end{array}$$

である．終結式の性質として

$$R(f,g)=0\leftrightarrow f\ と\ g\ が共通因子を持つ$$

がある．今 $\gcd(p,q)=1$，$\gcd(dq/dx,q)=1$ したがって $R(p-cdq/dx,q)$ は c の $\deg(q)$ 次の多項式である．c は不定元であることと

$$\gcd(p,q)=1,\ \gcd(q,dq/dx)=1$$

より

$$\gcd(p-cdq/dx,q)=1$$

なので

$$r=R(p-cdq/dx,q)\neq 0$$

である．

（第２段）$r(c)=0$ のすべての根 c_i を求める．この段の計算量は悪くても $q(x)=0$ の根をすべて求める計算量に等しい．一般には $r(c)=0$ は重根を持ち得るので，計算量は少なくなることが多い．

（第３段）$r(c)=0$ の各根 c_i に対して

$$v_i=\gcd\left(p-c_i\frac{dq}{dx},q\right)$$

を計算する．c_i は $r(c)=0$ の根なので v_i は定数でない．$p(x)/q(x)$ の不定積分は $c_i\log v_i(x)$ の和である．参考文献 17) において終結式 $r(c)=0$ の分解体は p/q の不定積分の計算に必要な最小の体であることが示されている．

例題

$$\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{-i}{2}\log(1-ix)+\frac{i}{2}\log(1+ix)$$

$$p(x)=1,\ q(x)=x^2+1,$$

$$r=R(1-c2x,\ x^2+1)=\begin{vmatrix}-2c & 1 & 0\\ 0 & -2c & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=4c^2+1$$

$r=0$ の根は $c_1=\frac{+i}{2}$, $c_2=\frac{-i}{2}$ である．これから

$$v_1=\gcd(1-c_1 2x,\ x^2+1)=1-ix$$

$$v_2=\gcd(1-c_2 2x,\ x^2+1)=1+ix$$

を得る．したがって

$$\int\frac{dx}{x^2+1}=c_1\log(v_1(x))+c_2\log(v_2(x)).$$

2.4 代数関数の不定積分

（1） 被積分関数が x と y の有理関数 $R(x,y)$ であり，y が

$$F(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2px+2qy+c=0$$

を満すものとする．x_0 と y_0 を適当に選んで

$$y-y_0=t(x-x_0)$$

によりパラメータ t を導入すると，x と y は

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

と t の有理関数により表される．したがって初めの代数関数 $R(x,y)$ の不定積分は

$$\int R(x,y)dx=\int R(f(t),g(t))\frac{df(t)}{dt}dt \tag{10}$$

と有理関数の不定積分に帰着する．これはたいていの微積分の教科書に出ている．

例題 次の被積分関数は一見，２つの代数的要素があって，後で述べる，場合（３）のようであるが，被積分要素を２つに分ければこの場合となる．

この例は MACSYMA（304版）の関数 integrate で積分できる．

$$\int\frac{1}{x}\left[\frac{1}{\mathrm{sqrt}(x-1)}+\frac{1}{\mathrm{sqrt}(x-4)}\right]dx$$

$$=2a\tan(\mathrm{sqrt}(x-1))+a\tan\left(\frac{\mathrm{sqrt}(x-4)}{2}\right) \tag{11}$$

（2） 被積分関数が x と y の有理関数 $R(x,y)$ であり，$y^2=p(x)$，ここに $p(x)$ は x の３次以上の多項式，のときは次のように標準形に帰着させる手続きが参考文献 3) に述べられている．

（第１段） $\gcd\left(p,\frac{dp}{dx}\right)=1$ と仮定してよい．y^2 を $p(x)$ で置き換えると被積分関数は次のようになる．

$$R=\frac{A+By}{C+Dy}=\frac{(A+By)(C-Dy)}{(C+Dy)(C-Dy)}=\frac{F+Gy}{K}$$

$$=\frac{F}{K}+\frac{Gp}{Ky} \tag{12}$$

$\frac{Gp}{Ky}=\frac{M}{Ny}$，$\gcd(M,N)=1$ とする．したがって

$$I=\int R(x,y)dx=\int\frac{F}{K}dx+\int\frac{M}{Ny}dx \tag{13}$$

となる．

$$V=\gcd\left(N,\frac{dN}{dx}\right),\ W=\gcd(N,p),\ U=\frac{N}{VW} \tag{14}$$

とおくと，次の標準形になることがわかる．

$$\int\frac{M}{Ny}dx=\int\frac{S}{Uy}dx+\int\frac{T}{y}dx+\frac{Qy}{VW} \tag{15}$$

ここに M, N は x の既知の多項式で，U, V, W は M と N から有理計算のみで求められる量である．未知の多項式 S, T, Q の次数の上限 s, t, u は

$$s<u,\quad t<p-1,\quad q<v+w \tag{16}$$

で与えられる．したがって連立一次方程式を解いて，S, T, Q を求めることができる．

$$p<5$$

のときは，$R(x,y)$ の不定積分は楕円積分を用いて表すことができる．

（3） 一般の代数関数の不定積分は，代数関数，初等超越関数，有理関数の組み合わせでは表せない．しかし，次の例のように，被積分関数の外見は複雑であるが，悪くてもその積分が対数関数で表される場合を判断すること，また楕円積分で表すのが自然だが，初等関数で表される場合を判断することは意味がある．

例 以下の例は MACSYMA（304版）では積分できない．REDUCE＋Davenport の積分パッケージではできた．

$$I=\int\frac{\mathrm{sqrt}(x+\mathrm{sqrt}(x^2+a^2))}{x}dx \tag{17}$$

を積分するため $x=a\sinh(y)$ と置く．

$$\sinh(y)=\frac{e^y-e^{-y}}{2},\ \cosh(y)=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$$

より

$$I=\int\frac{\cosh(y)}{\sinh(y)}\mathrm{sqrt}(a(\sinh(y)+\cosh(y)))dy$$

となる．$t=\%e^{y/2}$ とおくと

$$I=2\,\mathrm{sqrt}(a)\int\frac{t^4+1}{t^4-1}dt.$$

$$\frac{I}{2\,\mathrm{sqrt(a)}}=t+\frac{1}{2}[\log(t-1)-\log(t+1)]$$
$$-\frac{i}{2}[\log(t-i)-\log(t+i)],$$

を得る．ここで

$$t=\mathrm{sqrt}((x+\mathrm{sqrt}(a^2+x^2))/a)$$

である．

（解説）この例は一見，根号が二重で難かしそうだが

$\mathrm{sqrt}(x^2+1)$ あるいは $\mathrm{sqrt}(1-x^2)$

は $x=\sinh(t)$ あるいは $x=\sin(t)$ により根号がはずれるというに類する常識をいくつか積分プログラムに組み込む方が以下の難かしい手続きを作成するより実用的であると思う人もあろう．

［一般の代数関数の不定積分を求める考え方］

有理関数の不定積分の場合と同じように，任意の代数関数の積分は正則な部分（被積分関数に含まれるもの以外の非有理要素を含まない）と対数部分からなる．手続きの主な部分は対数部分を求める部分である．

有理関数の不定積分の場合には，対数項は被積分関数の0でない留数を持つ極に対応して現れ，その係数は留数に比例した．代数関数が被積分関数の場合も同様に考えることができる．ただし代数的要素がどの分枝に属するか考慮する必要がある．たとえば

$\dfrac{1-y}{1+y}$，ここに $y^2=1+x^2$

は y の分枝の取り方により $x=0$ を極とも零点ともする．

2.5　初等関数の不定積分（Liouville の理論）

x の有理関数全体 K は0で割ることを除いて四則演算が自由に行える．結合法則，分配法則も成立する．このような（演算のできる）集合を体という．特に K を有理関数体という．K に要素 z を付加した体 $K(z)$ とは K の要素と z とを四則演算してできる全ての要素と K との合併集合（とこの演算をともに含む概念）である．K に代数的要素 y_i や $\log(x-a)$ 等の対数的要素や，e^{bx} 等の指数的要素を次々に付加してできる体 G の要素を初等関数ということにする．初等関数の不定積分に関しては 1830 年代に次の結果がある．参考文献 7), 11) 参照．

定理（Liouville）G の要素 $R(x)$ の不定積分が初等関数ならばそれは

$$\int R(x)dx=U_0(x)+\sum_{j=1}^{m}c_j\log U_j(x)\tag{18}$$

U_0, U_j は G に属し，c_j は定数，

と書ける．

これを用いて Liouville は次の結果を得た．

定理　y は既約代数方程式

$f(y)=0$

を満たす代数的要素とする．f の次数は n とする．$e^x y$ の不定積分が初等関数で表されるならば

$$\int e^x y\,dx=e^x(a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_1y+a_0),\tag{19}$$

ここに a_j；$j=n-1,\cdots,0$ は x の有理関数，

と書ける．また具体的に y が与えられたときこのような a_j が存在するか否かを判定することができ，存在する場合それを求める手続きが存在する．f の次数が1の場合は y は有理式となる．

上の定理を用いて Liouville は次の不定積分が初等関数で表せないことを示した．

$$\int\frac{e^x}{x}dx,\ \int e^{-x^2}dx,\tag{20}$$

$$\int\frac{\sin(x)}{x}dx,\ \int\frac{\cos(x)}{x}dx,\tag{21}$$

代数関数の不定積分に関しては次の結果を得た．

定理　$y^2=p(x)$，ここに $p(x)$ は $\gcd\left(p,\dfrac{dp}{dx}\right)=1$ である多項式とする．$R(x), T(x)$ を x の有理関数とする．

$$\int\frac{R}{y}dx\ \text{が代数関数ならば，}\ \frac{T}{y}\ \text{の形である．}\tag{22}$$

この定理から楕円積分は初等関数で表せないことが分かる．

2.6　初等関数の不定積分（Risch の手続き）

Liouvilleの定理の(18)式における $R(x)$ から $U_0(x)$，$U_j(x)$，$j=1,\cdots,m$ を具体的に求める方法が Risch の手続きである．参考文献 15), 16) 参照．Risch の論文は1969年，1970年と数式処理システム MACSYMA，REDUCE が世に出る頃に発表された．Moses, J. は，この論文の数式処理における重要性を一早く認めて，これを MACSYMA に作り上げた．

手続き（Risch）

G は一段階前の体 F に t を付加して得られた真の超越拡大体とする．ここに H は F の要素として

$$t=\log(H)\ \text{または}\ t=\exp(H)\tag{23}$$

とする．$u(t), v(t)$ は G の要素とする．すなわち F の

要素を係数とする t の有理式である．有理関数の不定積分と同じ $v(t)$ の分解と式変形を行うと(1)，(5)式より

$$\int\frac{u(t)}{v(t)}dx=\int w(t)dx+\frac{p(t)}{q(t)}+\int\frac{r(t)}{q_1(t)}dx \qquad (24)$$

ここに $w(t)$ は $u(t)$ を $v(t)$ で割ったときの多項式部分である．また

$$q(t)=\gcd\left(v(t),\frac{dv(t)}{dt}\right),\quad q_1(t)=\frac{v(t)}{q(t)} \qquad (25)$$

である．

$w(t)$ の不定積分のみを考察しよう．

補助定理　G は体 F に t を付加してできる真の拡大体とする．F の要素を係数とする t の多項式

$$w(t)=h_nt^n+h_{n-1}t^{n-1}+\cdots+h_0,\quad (h_n\neq 0) \qquad (26)$$

の導関数 $w'(t)$ は F の要素を係数とする t の n または $n-1$ 次の多項式である．次数が下るのは $t=\log(H)$ で，h_n が定数の場合である．

この補助定理と Liouville の定理から，$w(t)$ の不定積分が初等関数で表されるなら

$$\int w(t)dx=g_{n+1}t^{n+1}+\cdots+g_0,\ g_i\in F \qquad (27)$$

と表される．

両辺を x で微分すると $t=\log(H)$ のとき

$$h_nt^n+\cdots+h_0=g'_{n+1}t^{n+1}+\left\{(n+1)g_{n+1}\frac{H'}{H}+g'_n\right\}t^n+\cdots$$

である．' は x に関する微分である．t の超越性より

$$0=g'_{n+1},\ h_n=(n+1)g_{n+1}\frac{H'}{H}+g'_n,\ \cdots. \qquad (28)$$

これから

$$g_{n+1}=c_{n+1}\ \text{定数},\quad g_n=\int h_ndx+(n+1)c_{n+1}t \qquad (29)$$

を得る．g_n を求めるには h_n を不定積分する必要があるが，この不定積分は体の拡大のレベルが1つ低い所での積分である．このように順に積分のレベルを下げて最後には有理関数の積分にまで，帰着することができる．以下同様にして $g_{n-1},\cdots,g_0$ を求めることができる．

例題

$$I=\int\frac{\log(\log(x))}{x}dx=\log(x)\log(\log(x))-\log(x) \qquad (30)$$

有理関数体 K に $s=\log(x)$ と $t=\log(s)$ を付加した体を F とする．被積分関数は F の要素である．もし I が初等関数で表されるなら

$$I=c_2t^2+g_1t+g_0$$

と書けるはずである．両辺を x で微分して

$$\frac{t}{x}=2c_2\frac{t}{x}+g'_1t+g_1\frac{1}{s}\frac{1}{x}+g'_0$$

これから

$$c_2=0,\quad g_1=s,\quad g_0=-s$$

を得る．

(27)式で $t=\exp(H)$ のときも同様に扱うことができるがもう少し繁雑である．

3. 微分方程式の解を有限項で表す

3.1 基本的な注意

(イ) 関数 $f(x)$ の不定積分は1階の常微分方程式

$$y'=f(x) \qquad (31)$$

の解である．その自然な拡張は1階の常微分方程式

$$y'=f(x,y) \qquad (32)$$

の解法である．

(ロ) 方程式(32)の範囲は非常に広い．

$$y'+p(x)y^2+q(x)y+r(x)=0 \qquad (33)$$

というリッカチ型の方程式は次の変換

$$\frac{u'}{u}=p(x)y\ \text{あるいは}\ u(x)=\exp\left(\int p(x)ydx\right) \qquad (34)$$

により2階線型常微分方程式(35)になる．

$$u''+\left\{q(x)-\frac{p'(x)}{p(x)}\right\}u'+p(x)r(x)u=0 \qquad (35)$$

逆に2階線型常微分方程式

$$u''+f(x)u'+g(x)u=0 \qquad (36)$$

が与えられたとき

$$p(x)=\exp\left(-\int f(x)dx\right),\ r(x)=\frac{g(x)}{p(x)} \qquad (37)$$

とおき，(34)式で y_2 を定めると，リッカチの方程式

$$y'+p(x)y+r(x)=0 \qquad (38)$$

となる．

3.2 常微分方程式の解法の理論的な背景

1857年に Riemann, G. は3つの確定特異点を持つ2階線型方程式 (Riemann の方程式) を特異点とその特性指数で表す Riemann の P 関数の理論を作った．

1872年に Schwartz, H. は超幾何微分方程式が代数関数解を持つための条件とそのときの解の表現を求めた．超幾何方程式は簡単な変換で Riemann の方程式に移るので，この範囲の方程式が代数関数解を持つ条件が分かったことになる．

1944 年に福原満州雄は Riemann の P 関数の理論を合流型の超幾何方程式に拡張した．

1955 年に木村俊房はリッカチ型でない方程式

$$x^{s+1}\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{39}$$

ここに s は負でない整数，P と Q は互に素な y の多項式とする，が $x=0$ の近くに動く分岐点のない解を持つか否かが代数的操作で完全に決定できること，またこのような解を持てば方程式(39)は標準型に移され，解の表現も得られることを示した．

1979 年に Kovacic, J. は有理関数係数の 2 階線型常微分方程式が初等関数解を持つ場合の判定とその解を求める手続きを発表した．彼の方法は方程式をリッカチの方程式に変換する．

1980 年に Singer, M. は有理関数体の有限次代数拡大体の要素を係数とする n 階線型常微分方程式が初等関数解を持つ場合の判定とその解を求める手続きを発表した．

3.3 数式処理で微分方程式を解く試み

最初の本格的試みは 1976 年に Schmidt, P. が発表した 1 階 1 位の方程式を解くパターンマッチを主にしたプログラムであろう．参考文献 29) 参照．彼はまた Kamke の本に集めてある該当する微分方程式の 90% 以上を解くことができたことを報告した．

次は 1979 年の Golden, J., Lafferty, E., Avgoustis, Y. らによる MACSYMA の微分方程式パッケージ ODE, ODE2 の開発であろう．

1981 年に Char, B. は Lie 変換群を用いて 1 階の方程式を解くプログラムを MACSYMA 上で開発した．

1981 年に Saunders, B. は Kovacic の手続きによる解法プログラムを開発した．

筆者は 1981 年に REDUCE 2 上で，1984 年に MACSYMA 上で 2 階線型常微分方程式を解くプログラムを開発した．前者では福原の本[24)]にある方法をプログラムとしたものであり，後者では Kamke の本に集めてある該当する方程式の 96% を解くことを報告した．

木村俊房の結果と Singer の結果をプログラム化したという報告はまだないようである．後者は本人がその論文で述べているように手続きとしては効率が悪いためかもしれない．

例題 次の方程式は MACSYMA (304 版) の微分方程式を解く関数 ODE2 では解くことはできない．

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{x}\frac{x^2+n^2}{x^2n^2}\frac{dy}{dx}+\frac{x^2-n^2}{x^2}y=0 \tag{40}$$

は $x=n$ の近くで

$$y=1-\frac{2}{3n}(x-n)^3+\cdots,$$
$$y=(x-n)^2+\cdots,$$

なる極所的解を持つので，すなわち $z=\dfrac{y'}{x-n}$ は

$$z=-\frac{2}{n}(x-n)+\cdots,$$
$$z=2+\cdots$$

なる極所解を持つので，べき指数が 0 と 1 である極所解を持つ場所は方程式の正則な点であるという定理より (39)式に従属変数の変換

$$y'=(x-n)z \tag{41}$$

を行うと

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{x+3n}{x(x+n)}\frac{dz}{dx}+\frac{(x-n)\{(x+n)^3-n\}}{x^2(x+n)^2}z=0 \tag{42}$$

となる．この方程式は $x=-n$ の近くで

$$z=(x+n)+\cdots,$$
$$z=(x+n)^2+\cdots,$$

なる極所解を持つので，これに従属変数の変換

$$z=(x+n)w \tag{43}$$

を行うと

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{3}{x}\frac{dw}{dx}+\frac{x^2+1-n^2}{x^2}w=0 \tag{44}$$

となる．これに従属変数の変換

$$w=\frac{u}{x} \tag{45}$$

を行うと n 位の Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{du}{dx}+\frac{x^2-n^2}{x^2}u=0 \tag{46}$$

となる．今までの変換(41)，(43)，(45)式から初めの方程式の解は

$$y=x\frac{du}{dx},$$
$$u \text{ は(46)式の一般解，} \tag{47}$$

となる．これで初めの方程式は解けたことになる．

ここの変換の方法は福原の参考文献 24) に出ているものである．渡辺隼郎の参考文献 32)，33) にはこのような変数変換による方法がいくつか述べられている．

参 考 文 献

1) Belovali, G. and Campbell, J. A.: A Logic Programming Framework for Generating Con-

tours of Symbolic Integration. Dept. Computer Science, University of Exeter, England (1980).
2) Davenport, J.: Ph. D. thesis, University of Cambridge. Lecture Notes on Computing, Vol. 102. Berlin-Heidelberg-New York: Springer (1981).
3) Goursat, E.: Cours d'Analyse Mathematique, tome I, Gauthier-Villars, pp. 241-264 (1902, 1927).
4) Hardy, G.: The Integration of Functions of a Single Variable, 2nd ed., Cambridge Tract 2, Cambridge Univ. Press. (1916).
5) Harrington, S. J.: A New Symbolic Integration System for Reduce. Computer Journal 22 (1979).
6) Hearn, A. C.: Analytic Integration by Computer, in Japanese. 数式処理による積分. (渡辺隼郎訳) 情報処理 Vol. 22, No. 7, pp. 639-649 (1981).
7) 一松　信: 解析学序説 (新版, 上巻) (1981).
8) Horowitz, E.: Ph. D. Thesis, University of Wisconsin, Madison (1969).
9) Horowitz, E.: Algorithms for Partial Fraction Decomposition and Rational Integration. SYMSAM pp. 441-457 (1971).
10) 森口繁一, 宇田川久, 一松　信: 数学公式 I—微分積分. 平面曲線—, 岩波書店 (1956).
11) 黒河竜三: 初等関数に関する Liouville の研究, 日本数学物理学会誌 1 巻 pp. 17-27, pp. 146-155 (1927), 3 巻 pp. 8-18 (1929).
12) Moses, J.: Symbolic Integration. Report MACTR-47, Project MAC, MIT (1967).
13) Norman, A. C. and Moore, P. M. A.: Implementing the New Risch Integration Algorithm. MAXIMIN, pp. 99-110 (1977).
14) Norman, A. C.: Integration in Finite Terms. Computer Algebra, Wien, New York, Springer, pp. 57-69 (1983).
15) Risch, R. H.: The Problem of Integration in Finite Terms. Bull. AMS 139 (1969).
16) Risch, R. H.: The Solution of the Problem of Integration in Finite Terms. Bull. AMS 76, (1970).
17) Rothstein, M.: Ph. D. thesis, University of Wisconsin, Madison (1976).
18) Singer, M. F., Saunders, B. D. and Caviness, B. F.: An Extension of Liouville's Theorem on Integration in Finite Terms. SYMSAC, pp. 105-108 (1981).
19) Trager, B. M.: Integration of Simple Radical Extensions. EUROSAM, pp. 408-414 (1979).
20) Trager, B. M.: Algebraic Factoring and Rational Function Integration. SYMSAC, pp. 219-226 (1976).
21) Trager, B. M.: Ph. D. thesis, MIT (forthcoming).
22) Wang, P. S.: Symbolic Evaluation of Definite Integrals by Residue Theory in MACSYMA. Proc. IFIP-74. Amsterdam: North-Holland (1974).
23) Char, B.: Using Lie Transformation Groups to Find Closed Form Solutions to First Order Ordinary Differential Equations. SYMSAC, pp. 44-50 (1981).
24) 福原満洲雄: 常微分方程式の解法 II, 線型の部, 岩波書店 (1944).
25) Kamke, E.: Differential Gleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Leipzig (1944).
26) Kimura, T.: Sur une generalisation d'un theoreme de Malmquist, III. Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, 4, pp. 25-41 (1955).
27) Kovacic, J. K.: An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations. Preprint, Brooklyn College, City University of New York.
28) Saunders, B. D.: An Implementation of Kovacic's Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations. SYMSAC, pp. 105-108 (1981).
29) Schmidt, P.: Substitution Methods for the Automatic Solution of Differntial Equations of the 1st Order and 1st Degree. SYMSAC '76, pp. 114-125 (1976).
30) Schwartz, H. A.: Über diejenigen Falle in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elements darstellt, J. Reine und Angew. Math., pp. 292-335 (1872).
31) Singer, M. F.: Liouvillian Solution of n-th Order Homogeneous Linear Differential Equations. AJM Vol. 103, No. 4, pp. 661-682 (1980).
32) Watanabe, S.: A Technique for Solving Ordinary Differential Equation Using Riemann's P-functions. SYMSAC, pp. 36-43 (1981).
33) Watanabe, S.: An Experiment toward a General Quadrature for Second Order Linear Ordinary Differential Equations by Symbolic Computation. EUROSAM, pp. 13-22 (1984).

(昭和 61 年 1 月 6 日受付)