

CFDによるエアリード楽器の発音機構解析

Computational fluid analysis of the sound generation mechanism of air-reed instruments

伊東聡 (東大) 藤澤智光(東大) 矢川元基 (東大)

Satoshi ITO, University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo
Toshimitsu FUJISAWA, University of Tokyo
Genki YAGAWA, University of Tokyo

The sound generation mechanism of air-reed instruments is investigated by high performance computing including computational fluid dynamics. A hybrid approach based on the incompressible Navier-Stokes equation and the acoustic theory of Lighthill-Curle is employed in the computation. The three-dimensional flow around the edge is computed by the finite element method (FEM) and the sound profile at an observation point is calculated by the Curle's equation. The oscillation of air jet, which is considered to be the source of sound in air-reed instruments, has been obtained by parallel computing using massively paralleled supercomputer HITACHI SR8000.

1. はじめに

パイプオルガンやフルートといったエアリード楽器に生じる自励発振については、1960年代後半に、定量的な理論が構築されると共に詳細な実験が行われ⁽¹⁾、呼気ジェット振動膜としての振る舞いや、ジェットと共鳴管の間のフィードバック機構が明らかにされて⁽²⁾、音響学的な研究は一応の完成をみている。

しかし、これらの研究では、楽器中に音源が存在することが仮定されており、空気流から音源が生成されるメカニズムについては依然として未知のままである。また、音の発振についても、定常で、かつ、微小な振幅を前提としており、発音が大きく変動する実際の楽器の状態を十分に反映しているとは言えない。さらに、楽器の形状が発生する音に与える影響は非常に大きいものと考えられるが、発音部のジェットと共鳴管の間のフィードバック機構に関しては、パラメータに不明確な要因が多い⁽³⁾。

そこで、本研究では、エアリード楽器内の空気の挙動をコンピュータによって数値解析し、発音状態が大きく変動する実際のエアリード楽器の発音メカニズムを流体力学的に解明することを目的とする。今回は、その第一段階として、エッジによる音源の生成メカニズムについて解析を行う。

2. 音響学的解析と流体力学的アプローチ

2.1 エアリード楽器の音響理論⁽²⁻⁴⁾

エアリード楽器に空気を吹き込むと、楽器内部に圧力変動が生じ、音波が生成される。吹き込まれた空気ジェットの歌口における圧力を p_0 とする。管内に発生した圧力波は楽器終端の開口部で反射され(開口端反射)、楽器内部に戻ってくる。この反射波の圧力を p_i とする。吹き始めからの時間を t とすると、 p_i は時刻 0 から t までの p_0 の反射の重ね合わせになるので

$$p_i = \int_0^t r(t') p_0(t' - t) dt' \quad (1)$$

と表せる。ここで $r(t)$ は開口端での反射関数と呼ばれるものである。歌口における圧力（音圧） p は $p = p_0 + p_i$ と表せる。歌口における流量（音響的流量） U は

$$U(t) = (p_0(t) - p_i(t)) / Z_0 \quad (2)$$

で与えられる。(1)、(2)式と音圧の式を用いて p_0 , p_i を消去すると

$$p(t) = p_h(t) + Z_0 U(t) \quad (3)$$

となる。ここで p_h は

$$p_h(t) = \int_0^{\infty} r(t'-t)[p(t'-t) + Z_0 U(t'-t)] dt' \quad (4)$$

である。(3)、(4)式を用いて $p(t)$ の時間発展を求めるには、(4)式における $p(t)$ と $U(t)$ の関係が必要である。空気ジェットの圧力を $P(t)$ とした時、この関係が発音関数を用いて

$$U(t) = \Pi[p(t), P(t)] \quad (5)$$

と表せれば、音圧 p を(3)～(5)式を用いて計算することができる。

2.2 数値流体力学(CFD)による楽器音の解析

上述したように、音響理論からエアリード楽器の音を時間的に求めるには、反射関数 r および発音関数の両者が必要になる。しかし、一般に、楽器における反射関数と発音関数を理論のみによって求めることは困難である。

一方、エアリード楽器の音源は、流体そのものの振動であることから、音の発生とその反射を流体力学的に捉えることも可能であると考えられる。この場合、Navier-Stokes 方程式をコンピュータを用いて数値的に解くことにより、反射関数や発音関数などを用いることなく、楽器内の空気の振る舞いを直接計算することになる(数値流体力学、CFD)。しかしながら、楽器の音源となるようなごく微小な圧力変動を数値シミュレーションで捉えるには、非常に細かい計算格子を要し、そのため、数年前までは、音の発生をコンピュータによって捉えることは、計算量的に非常に困難であった。

近年、演算処理装置(プロセッサ)の驚異的な計算能力の向上と共に、それらを多数結合して計算を行う並列計算の技術が確立されてきたことにより、CFDによって計算できるモデルの規模が急速に大きくなってきている。そこで、本研究では、並列スーパーコンピュータを用いて、楽器内部の空気の挙動を流体力学的に直接計算し、そこから生じる音を求めることを試みる。

3. 解析手法

3.1 有限要素流体解析とハイブリッド解法

音波は媒質中を粗密波として伝播するものであり、本来、圧縮性流体に現れる現象である。しかし、音圧は流体の静圧に比較して $10^{-3} \sim 10^{-5}$ 倍と極めて微小な圧力であることから、流体の静圧と音圧とを同時に数値解析で捉えるのは、計算精度の面から困難である。また、観測者までの広大な空間で、音の伝播を圧縮性流体の現象として数値計算するためには、莫大な計算機資源を必要とし、現在のスーパーコンピュータを用いてもまず不可能である。さらに、圧縮性流体の方程式を低マッハ数の流れで解こうとすると、いわゆる *stiffness problem* が生じ、数値的に解を求めることが不可能になったり、解析精度が極端に悪化したりするという困難な問題がある。

そこで本研究では、音の発生とその伝播を分離して解析を行うハイブリッド解法を採用する。すなわち、空気に関しては、非圧縮性を仮定して数値的に解き、そこから求まる圧力変動から Lighthill の理論⁽⁵⁾に基づく空力音予測を行って、発生する音を計算する。

また、CFDにおける空間離散化手法としては、有限要素法(FEM)を用いる。有限要素法は、差分法に比較して、計算量が多くなるという弱点を持つものの、非構造格子を用いる

ことができることから、複雑な幾何形状を自在に表現することができるという強力な長所がある。一般に、3次元 FEM に用いられる要素には、四面体要素と六面体要素があるが、本研究では、コンピュータによる自動要素生成がより容易である四面体要素を用いる。

3.2 Navier-Stokes 方程式の離散化

外力が無視できる場合の非圧縮性 Navier-Stokes 方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (6)$$

ここで \mathbf{u} は流速、 p は圧力であり、それぞれ代表値で無次元化されている。 Re はレイノルズ数である。(6) 式を Fractional Step 法に基づき、時間方向に離散化すると次式が得られる。

$$\mathbf{u}^{t+1} = \mathbf{u}^t - \Delta t \tilde{\mathbf{u}} \quad (7)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}^t \cdot \nabla) \mathbf{u}^t + \nabla p^t - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}^t \quad (8)$$

(8) 式を連続の式に代入すると以下ようになる。

$$\nabla^2 p^{t+1} = \nabla \tilde{\mathbf{u}} \quad (9)$$

時間発展は、まず(8)式により中間流速 $\tilde{\mathbf{u}}$ を求め、(9)式に代入し次のタイムステップにおける圧力 p^{t+1} を求める。この圧力を(7)式に代入し、次のタイムステップの流速 \mathbf{u}^{t+1} を求める。

本研究では、空間の離散化には有限要素法 (FEM) を用い、四面体一次要素によって空間をメッシュに分割する。

3.3 Lighthill の理論と Curle の式

エアリード楽器では、エッジ付近のジェットのマッハ数は高々0.06程度であり、低マッハ数の流れとなっている。このとき、観測者が音源から十分離れている場合には、Lighthill の理論の解の一つとして、以下の Curle の式⁽⁶⁾が導かれる。

$$p_a(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0} \frac{x_i}{x^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S n_i p(\mathbf{y}, t - x/c_0) dS \quad (10)$$

\mathbf{x} は観測点の座標、 p は音圧、 p は物体表面に掛かる流体の圧力、 S は物体表面、 $x=|\mathbf{x}|$ 、 \mathbf{y} は解析領域内の座標、 \mathbf{n}_i は S 上の外向き法線ベクトル、 c_0 は静止流体中の音速である。(10) 式から分かるように、Curle の式では音圧は物体表面 (本解析ではエッジの表面) の圧力変動によって決定される。従って、エッジ近傍の流れ場を解いて、その圧力を求めれば、(10) 式によって、観測点での音を計算することができる。

3.4 並列解析

音の発生といった微小な現象を捉えるには、極めて詳細な計算格子 (メッシュ) が必要となる。そのため、計算量は膨大なものとなり、複数の演算処理装置 (プロセッサ) を同時に用いて計算を進める並列解析が必須のものとなる。

有限要素法による CFD の並列計算手法は、大別して要素ベースのものと節点ベースのもの 2 種類に分類できる。本研究では、フリーメッシュ法 (FMM)⁽⁷⁻¹⁰⁾ で用いられる節点ベースの並列計算⁽¹¹⁾ を行う。FEM に現れる大規模疎行列 (スパース行列) の記憶や節点同士の結合情報 (コネクティビティ情報) には、FMM で用いられる節点ベースのデータ構造を採用する。フリーメッシュ法とは、プリプロセッシング (メッシュ生成) とメインプロセッシング (方程式の求解) をシームレスに (継ぎ目なく) 処理することを目指した計算手法であり、数値計算の結果を計算格子にフィードバックさせながら解析を進めるアダプティブ解析を並

列計算機上で実現する場合に有力な手法である。

今回の解析では、固定された計算格子（メッシュ）を用いているが、今後、より効果的な計算格子を用いて計算を行うために、FMMに準拠したデータ構造と節点ベースの並列計算法を用いている。

4. 数値解析

4.1 解析モデル

エアリード楽器の発音機構解析の第一段階として、エッジトーンの3次元流体解析を行った。解析モデルをfig.1に示す。解析モデルの寸法は、エッジトーンに関するBrownの実験⁽¹²⁾から定めた。エッジの角度は20度であり、モデルの左側にある吹き込み口から吹き出た空気ジェットがエッジに当たるようになっている。ジェットの吹き込み口からエッジ先端までの距離は6mmであり、エッジ表面にはnon-slip条件を課している。

このCADモデルを四面体一次要素によって、有限要素メッシュに分割した図をfig.2に示す。節点数は85,528、要素数は462,064である。メッシュ生成と境界条件の付与には、東京大学ADVENTUREプロジェクト⁽¹³⁾（プロジェクトリーダー：吉村忍教授）で開発された設計用大規模計算力学システムの一部であるメッシュジェネレータ、並びに、境界条件付与ツールを用いている。

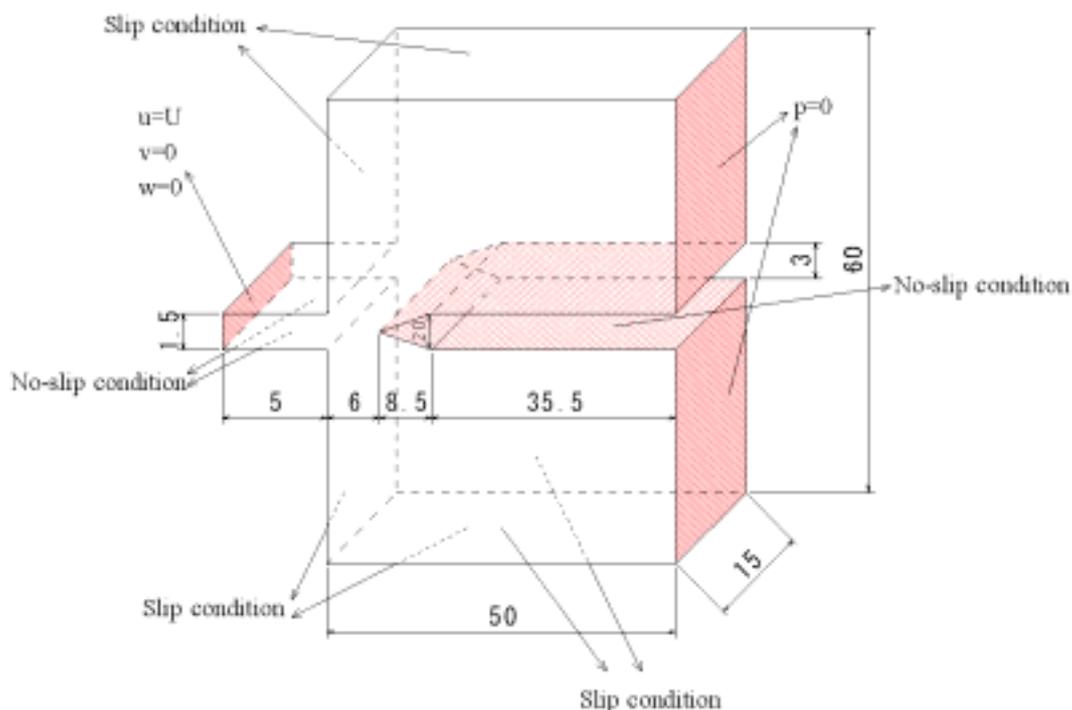


Fig.1 Analysis model and boundary conditions

4.2 流体解析

ジェット流速を7m/s（レイノルズ数683.2）とした時の、実時刻 $t=0.02$ [s]におけるエッジ付近の流速絶対値の分布をfig.3に示す。吹き込み口から噴出した薄い呼気のジェットは、自励振動を起こし、エッジの上下に吹き分けられるようになる。

この計算には、日立製作所製超並列型スーパーコンピュータSR8000の1ノード（8プロセッサ）を用い、10万ステップの計算（実時間で約21ミリ秒の計算）に約40時間を要した。

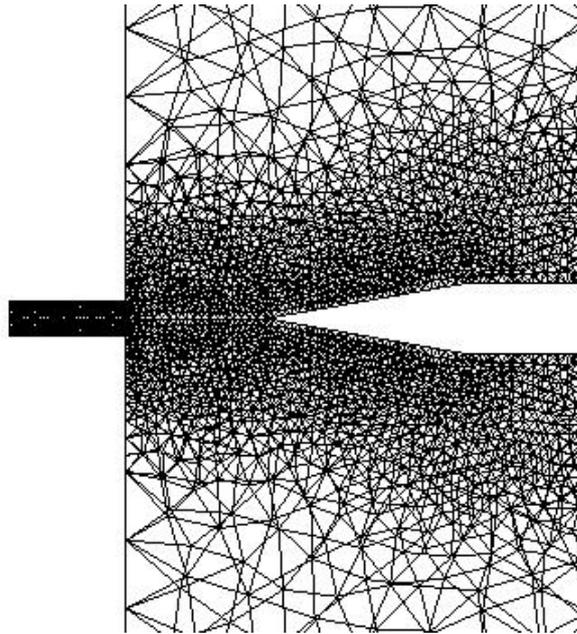


Fig.2 Finite element mesh of the edge model

4.3 音響解析

次に、流体解析で得られたエッジ表面での圧力変動から(10)式を用いて計算した音圧の時刻歴をfig.4に示す。グラフを見るとピーク値にはばらつきがあるものの、音波が生成されていることが分かる。発生した音の周波数をグラフから概算すると1.1kHz前後であり、これはBrownの実験式⁽¹²⁾で計算される値1.13kHzにほぼ一致している。

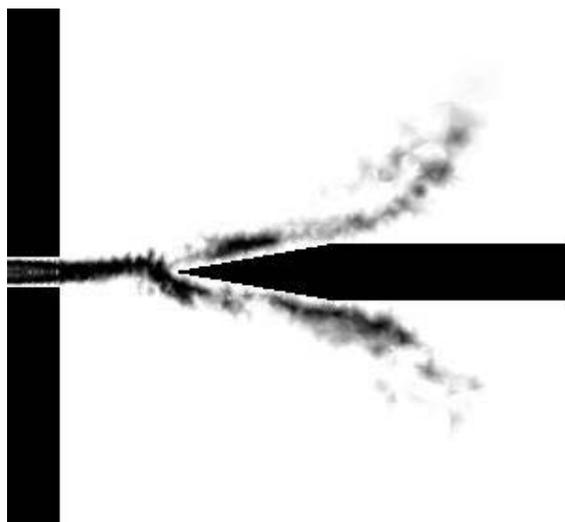


Fig.3 Absolute value of velocity vectors
($t = 0.02[s]$)

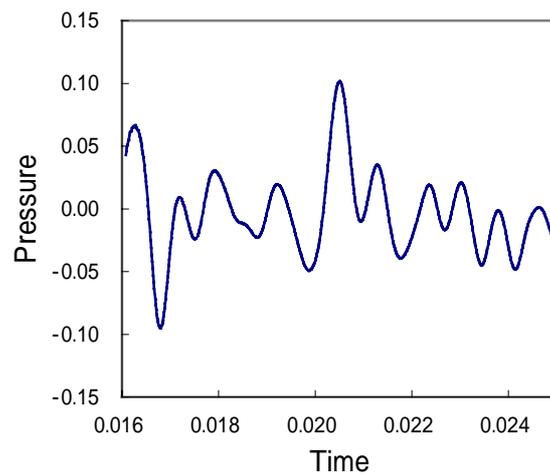


Fig.4 Time history of sound pressure

5. おわりに

エアリード楽器における発音メカニズムを流体力学的に解析することを目標として、本研究では、エッジトーンの数値シミュレーションを行い、CFDによる楽器音響解析の基本的な可能性を示した。具体的には、エッジ周囲の空間を四面体一次の有限要素を用いてモデル化し、非圧縮性Navier-Stokes方程式を並列スーパーコンピュータを用いて数値解析することによって、エッジ周囲の空気の3次元流体解析を行った。その結果、呼気ジェットがエッジで吹き分けられている様子をコンピュータ上で捉えることができた。さらに、エッジ表面の圧力分布からCurleの式を用いて発生する音を求め、その周波数がBrownの実験式から求められる周波数にほぼ一致することを確認した。

なお、本研究では、乱流の影響は考慮されておらず、楽器音響に対するCFDによる解析アプローチの有効性を示したに過ぎない。実際の楽器の音響解析にあたっては、今後、CFDに乱流モデルを導入した上で、解析モデルの慎重な検討、とりわけ、境界条件の設定と共鳴管の影響について、詳細に検討する必要があると考えられる。

謝 辞

本研究の遂行にあたって、東京大学の吉村忍教授ならびに奥田洋司助教授より貴重なご助言を賜りました。また、エッジ周りの3次元モデルおよび音響解析コードは、同大学工学部4年の土田潤君が作成したものです。ここに記して、謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) J.W.Coltman: J. Acoust. Soc. America, Vol.44, pp.983-992, 1968.
- 2) S.Yoshikawa and J.Saneyoshi: J.Acoust.Soc.Jpn (E), Vol.1, pp.175-191, 1980.
- 3) 吉川茂: エアリード楽器の物理と音色, 日本音響学会誌, Vol.49, pp.193-202, 1993.
- 4) 吉川茂: パイプオルガンの音響学, 日本音響学会誌, Vol.47, pp.834-843, 1991.
- 5) M.J.Lighthill: Proc. Roy. Soc. London, A211, pp.564-587, 1952.
- 6) N.Curle: Proc. R. Soc. Vol.231, pp.505-514, 1955.
- 7) G.Yagawa and T.Yamada: Free Mesh Method: A new meshless finite element method, Comp.Mech. 18, pp.383-386, 1996.
- 8) M.Shirazaki and G.Yagawa: Large-scale parallel flow analysis based on free mesh method: a virtually meshless method, Comput.Methods Appl.Mech.Engrg. 174, pp.419-431, 1999.
- 9) G.Yagawa and T.Furukawa, Recent development of free mesh method, Int.J.Numer.Meth. Engng. 47, pp.1419-1443, 2000.
- 10) T.Fujisawa and G.Yagawa: A virtually meshless formulation for compressible high speed flows with free mesh method, Proc. First M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, Vol.2, pp.836-838, 2001.
- 11) 藤澤智光、矢川元基: 節点処理型有限要素法による圧縮性流体の並列計算とその最適化、計算工学講演会論文集、Vol.6, pp.515-518, 2001
- 12) G.B.Brown: Proc. Phys. Soc. London, Vol.XLIX, pp.493-507, 1937.
- 13) 東京大学 ADVENTUREプロジェクト ホームページ (<http://adventure.q.t.u-tokyo.ac.jp/jp/>)
- 14) 矢川元基、白崎実、樋崎康彰: 有限要素法によるエアリード楽器の音の発生メカニズム解析, 第13回数値流体力学シンポジウム講演論文集, p.47, 1999.