動的計画法と音列出現確率を用いた対位法の対旋律の自動生成

中潟昌平 西本卓也 嵯峨山茂樹 東京大学大学院情報理工学系研究科

{nakagata,nishi,sagayama}@hil.t.u-tokyo.ac.jp

あらまし 本稿では、対位法に基づき、与えられた定旋律から対旋律を自動で生成する手法について検討する.対位法は、複数の旋律の組み合わせによる作曲法であり、和声学とともに作編曲の根幹をなすものである.したがって、対旋律生成を数理的に行うアプローチは、自動編曲ソフトや対位法学習者の支援に役立つと期待される.対旋律生成は最適な音列を探索する問題として捉えることができる.本稿では、その解法として DP(DynamicProgramming,動的計画法)が有効であることを示すとともに、DPで扱える対位法の規則の適用範囲と限界について議論する.さらに拡張法として、一対一対位法には高次マルコフモデルに音列出現確率を導入する方法を、一対多の対位法に関しては多音一状態のモデルを用いる手法を提案する.これらの方法に基づき、対旋律を自動で生成する実験を行い、規則に適合する対旋律が得られること確認した.

キーワード 対位法 , 動的計画法 (DP,Dynamic Programming) , N-best 候補 , 高次マルコフモデル (N グラムモデル) , 音列出現確率

Automatic Generation of Counterpoints Based on Dynamic Programming and Probability of Tone Series

Shōhei NAKAGATA Takuya NISHIMOTO Shigeki SAGAYAMA Graduate School of Information Science and Technology, The University of Tokyo

Abstract In this paper, we propose a method to generate counterpoints automatically from given cantus firmus. Counterpoint is a composition method by combining multiple melodies. It is a main principle in composition and arrangement with harmonics. So mathematical approach in generating counterpoints is expected to serve a useful mean in making automatic arrangement software or learning counterpoint. To generate adequate counterpoints, we use a method to solve search problem of tone series. Dynamic Programming (DP) is an efficient strategy to work out search problem, which can reflect many rules about tone interval in counterpoint. But some rules can't be treated by simple DP because of their multiple Markov property. In order to deal with these complicated rules, we propose two improved methods. One is to adopt multiple Markov model and probability of tone series in isochronous counterpoint, and another is to use multi-note 1 state model in one-to-many counterpoint. Experimental results in isochronous and one-to-two counterpoint are described.

keyword counterpoint, Dynamic Programming (DP), N-best candidates, multiple markov model (N-gram model), probability of tone series

1 はじめに

本稿では、対位法に基づき、与えられた定旋律から対旋律を自動で生成する手法を検討する.対位法は和声学とともに作編曲の主要原理であり,その数理定式化はカノン,フーガの自動編曲ソフトや,対位法学習者の支援に役立つと期待される.また和声法からなる多くの曲では,低音旋律と上声の関係は対位法の理論に基づいており,旋律への自動和声づけの研究[1]における和声の転回形の決定に有用であると考えられる.

自動編曲の研究として,和声法に基づくものは

いくつか報告されているが [1] , 対位法によるアプローチはまだ僅かである [2,3] . 一方 , 旋律を扱った関連研究としては , 旋律パターンの解析 [4] や音楽の還元理論による構造解析 [5] などがある .

我々は,二声の一対一対位法における対旋律自動生成アルゴリズムを累積コスト最小の音列を探索する問題として捉え,DP(Dynamic Programming,動的計画法)により定式化した[6].その中で,コストの有用性や DP で扱える規則を厳密に検証する必要性,また一対一以外の対位法での対旋律生成やより対位法らしい対旋律を得る手法が課題として残った.そこで本稿は,対位法の規則が持つ数

理的な性質の整理に主眼をおいて,対位法の自動 化について基礎検討する.

対旋律生成問題の定式化 2

対位法には旋律や旋律間の音程に関する多くの規 則が存在し、その適用法は作曲者のスタイルや時 代, 教科書 [7, 8, 9] により若干異なるが, 本稿で は主に古典対位法の規則に従い議論を進める.

我々は対旋律生成問題を , 定旋律 $oldsymbol{F} = \{f_1, f_2, \cdots,$ f_M } が与えられた下で対旋律 $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_N\}$ を得るコスト L(C|F) を最小にする問題として捉 える. すなわち, コスト最小の対旋律 $ilde{C}$ を次式に より定式化する.

$$\tilde{\boldsymbol{C}} = \operatorname{argmin} L(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{F})$$
 (1)

 $ilde{m{C}} = rgmin L(m{C}|m{F})$ (1) $m{C}$ $L(m{C}|m{F})$ の一つの定義としては,確率に基づくコ スト (例えば対数尤度の符号反転) が考えられる.し かし,実際には,C,Fのあらゆる組合せについて 上記の L(C|F) を統計推定するための大量のデー タは入手困難である.特に,基礎となる一対一対位 法の実例を多数収集することは却って難しい. そこ で,それらの近似および代用として,対位法の教科 書などに記述された対位法規則を反映してL(C|F)を与えることとする.これは,仮に統計学習に用 いることができる対位法作曲のサンプルが大量に 存在すれば、それらは概ね対位法の規則を守って いるであろう,と仮定することに相当する.

一対一対位法の各規則の性質

3.1 探索問題としての定式化

最も基本的な一対一対位法の場合 , M 音からな る定旋律 F が与えられ、考え得るすべての対旋律 C 中からコスト

$$L(C|F) = \sum_{i=1}^{M} L(c_i|c_{i-1}, \dots, c_1, f_i, \dots, f_1)$$
 (2)

が最小のものを求める問題は,膨大な探索問題に なりかねない、そこで,次節以後で対位法規則を 分類し,効率的なアルゴリズムを導く。

3.2 0 次マルコフ的性質

一対一対位法に関して,対旋律の音が同時に発音 される定旋律の音のみに依存する「0次マルコフ的 性質」を持つ規則がある.仮にこの規則だけを用 いるならば,式(2)を

$$L(C|F) \approx \sum_{i=1}^{M} L(c_i|f_i)$$
 (3)

と近似することに相当する.

このカテゴリに含まれる規則として、使用音程に 関する以下の規則がある.

規則 3.1 使用音程は不完全協和音程(長短三,六度) と完全協和音程 (完全五,八度)で,不完全 協和音程を多く用いるようにする.[7,8]



図 1: 音程の分類(上声が定旋律)



図 2: 一つ前の音に依存する規則(上声が定 旋律)



図 3: 最適性の原理

i 番目の定旋律の音 f_i と対旋律の音 c_i で決まる局 所コスト $l_0(c_i|f_i)$ を導入すれば反映できる.

図1のように,対旋律の音が定旋律の音に対し てそれぞれ不協和音程1(完全四度), 完全協和音程 (完全五度), 不完全協和音程(短六度)になる場合, 規則 3.1 を反映するには $l_0(G3|C4) > l_0(F3|C4) >$ $l_0(E3|C4)$ となるようにコストを与える.

3.3 1次マルコフ的性質

一対一対位法には,一つ前の音にも依存する「1 次マルコフ的性質」として分類できる規則がある. ここまでの規則のみを考慮した場合は , L(C|F) を

$$L(C|F) \approx \sum_{i=2}^{M} L(c_i|c_{i-1}, f_i, f_{i-1})$$
 (4)

によって近似することに相当する.

このカテゴリに含まれる規則として、直前の音と の関係に関して

規則 3.2 並行五,八度や隠伏五,八度の使用は禁 止する. [7,8]

規則 3.3 旋律の増減音程による進行や七度,オク ターブ以上の跳躍があってはならない.[8,9]

のような規則がある.この性質を持つ規則を反映 するには,一時点前までの音で決まる局所コスト $l_1(c_i|c_{i-1},f_i,f_{i-1})$ を与える.

例えば,図2の左に記された進行のように,上 声の定旋律に対して並行五度になる場合はコスト l₁(F3|E3, B3, C4) を高く,右の進行のように規則に 違反しない場合はコスト l₁(F3|G3, B3, C4) を低く することにより,規則3.2をコストに反映できる.

3.4 DP による対旋律生成

先述した局所コスト l_0 と l_1 を導入することによ リ,式(1)は最初の音から最後の音までの累積コス

¹完全協和音程,不完全協和音程以外の音程.

ト最小の経路を探索する問題として捉えることができる.コストが隣接する二音で決まる場合,最適経路上にある任意の二音間の累積コストを最小にする経路は必ず最適経路に含まれるという性質,すなわち「最適性の原理」(図3)が成り立ち,累積コスト最小問題は DP に帰着できる.

DP により対旋律を求めるアルゴリズムを以下に示す.まず,対旋律のi番目とi+1番目の音の局所コストを次式で与える.

$$l(c_{i+1}|c_i, f_{i+1}, f_i) = l_1(c_{i+1}|c_i, f_{i+1}, f_i) + l_0(c_{i+1}|f_{i+1})$$
(5)

この時, c_i までの累積最小コスト $L(c_i|f_i,\cdots,f_1)$ は次式で再帰的に表せる.

$$L(c_{i}|f_{i},\dots,f_{1}) = \min_{c_{i-1}} \left\{ l(c_{i}|c_{i-1},f_{i},f_{i-1}) + L(c_{i-1}|f_{i-1},\dots,f_{1}) \right\}$$
(6)

 $L(c_1|f_1)=l_0(c_1|f_1)$ を初期値とし,上記の漸化式により,最終的に $L(\tilde{C}|F)$ が得られる.累積コスト最小の対旋律 \tilde{C} は,各 c_i に一つ前からの最適経路を示すバックポインタを用意して, $L(c_i|f_i,\cdots,f_1)$ を求めた後に c_M から c_1 までを逆に辿ることで求められる.

3.5 三声以上の場合のアルゴリズム

以上の原理は二声に限らず三声以上にも適用できる.例えば,三声一対一対位法では,定旋律一音に対して二つの対旋律の可能な音候補を二次元的に配置した探索空間を用意し,0次と1次のマルコフ的性質を満たす規則をコスト l_0 , l_1 として反映することができ,DPの原理により効率的に3次元の最適経路として三声の対位法の解が得られる.

3.6 高次マルコフ的性質

一対一対位法の式 (2) の精度は,以下のような「高次マルコフ的性質」を持つ規則を反映させることによりさらに向上できる.

規則 3.4 同一音程による四回以上の連続進行は禁止する. [8, 9]

規則 3.5 規則 3.3 以外の旋律に関する規則 .[7,8,9]

これらに基づき対旋律の音を決定する場合 , 二つ以上前の音にも影響を受ける . したがって , 例えば規則 3.4 には連続する四音で決まるコスト $l_3(c_i|c_{i-1},\cdots,c_{i-3},f_i,\cdots,f_{i-3})$ を与える必要があり , 3.4 節で述べた DP アルゴリズムは適用できない .

そこで,累積コスト最小の旋律だけでなく N-best の候補 2 を求め,そこから上記の規則に違反するものをを除外する方法を用いれば,高次マルコフ的性質を反映することができる.

これにより,規則 3.4, 3.5 を反映することが原理的に可能となる.しかし,規則 3.5 をヒューリスティックに評価するのは非常に難しいため,この問題は 4 章以下で改めて議論をすることにし,厳格な制約をもつ規則 3.4 のみを扱うことにする.

3.7 一対一対位法の対旋律生成実験 3.7.1 実験条件

前節までの考えに基づき,二声と三声の一対一対 位法において,与えられた定旋律から対旋律を生 成する実験を行った.

DP を適用するための条件として,対旋律の最初と最後の音は固定する制約を設けた.続いて,定旋律の各音に対して不協和音程以外の音候補を並べた探索空間を作り,[7,8,9] に基づき出現コスト l_0 と隣接コスト l_1 を導入した. l_0 の値は不完全協和音程ならば0.2,完全協和音程では1.6 とし 3 , l_1 の値は規則に違反すれば100,適合すれば対旋律二音の全音階的な音高差の絶対値とした 4 .ただし,同音に留まる動きは稀にしか起きないため,この場合の l_1 の値は5 に設定した.

三声対位法では,定旋律一音に対応する各声の二音の出現コスト l_0 は一様に定め,隣接コスト l_1 は規則に違反する場合は 100 を,適合する場合は一方の旋律に関する音高差の絶対値と,他方から同様にして得られる値の和をとるようにした.

さらに,双方の対位法の最終部は終止形 [8] を考慮し,二声対位法では対旋律が順次進行かつ定旋律と反進行になるように,三声一対一対位法では下声の対旋律が以下の条件を満たすようにした.

- 二度下行あるいは短二度上行
- 属音から四度上行,または五度下行
- 下属音から四度下行, または五度上行

また規則 3.4 は , 3.6 節で述べた N-best 候補を求める方法により両方の対位法に適用した .

3.7.2 実験結果

図4と図5にそれぞれ二声一対一対位法,三声一対一対位法における対旋律の自動生成例を示す.各図の最も上にある旋律は入力の定旋律(c.f.と表記)を,その下に記された旋律は生成された対旋律(Kp.と表記)を表す.対旋律の左上の数字は順にN-best順位,一位の旋律からのコストの差である.図4で,各音符の上にある数字は定旋律との音程であり,完全協和音程の場合は 印を,不協和音程ならば 印をつけている.また,図5の中声を担う対旋律の上の数字は上声と中声の音程を,それらの下の数字は順に中声と下声,上声と下声の音程を表す.

 $^{^2}N$ -best 候補は,木構造の探索アルゴリズムの一つである A^* アルゴリズム [10] を拡張して求められる.

 $^{^3}$ 不完全協和音と完全協和音の出現比率が4:1になるような設定法である[8].

 $^{^4}$ 旋律には大きな跳躍を頻繁に用いないという規則による (4 章 参照) .

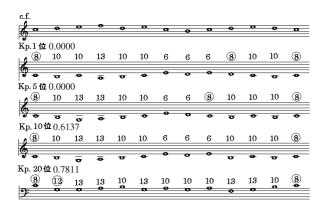


図 4: 二声一対一対位法での対旋律探索結果例

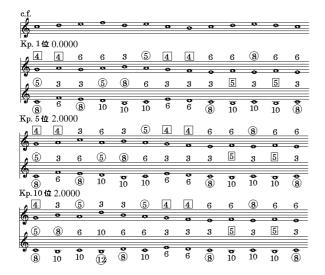


図 5: 三声一対一対位法での対旋律探索結果例

生成された対旋律は,規則 3.1~3.4 を確かに満たすことがわかった.一方で同音付近に留まるなど,変化に乏しく対位法にふさわしくない旋律が目立つ問題が残った.特に三声対位法の中声の旋律は上声と下声により旋律の動く範囲が限定されるため,その傾向が顕著に現れた.

4 音列コストの導入

4.1 旋律性のコストへの反映

3章では旋律に関する制約を全て規則として扱ったが,これらには厳密な音程規則に比べて制約が緩いものが多く,規則よりも「傾向」とみなした方が適当なものもある.そこで,制約の厳しさにより規則と傾向を区別して考えることにすると,旋律の制約として以下の例が挙げられる.

規則 4.1 旋律の増減音程による進行や七度 , オクターブ以上の跳躍があってはならない . (規則 3.3 に同じ)[8,9]

傾向 4.2 音階的進行(長・短二度進行)を多く用い, 跳躍の大きい進行は時々使用する. [8, 9]

傾向 4.3 四度以上の跳躍を行った後は原則として 反対の方向に戻るようにする.(図6左)[8,9]



跳躍後に反対 方向に戻る傾向 同音を近くで用いない傾向

図 6: 旋律に関する傾向

傾向 4.4 近くの旋律でたびたび同じ音を使わない 方がよい.(図 6 右)[9]

ここで,コスト決定法に関する規則と傾向の違いに着目する.まず規則は,対旋律の対象部分がそれに適合するかしないかの二つの選択肢しかないので,コストは規則に適合すれば0,違反すれば大きな数(例えば100)のように二値的な設定を行えばよい.一方,傾向はあらゆる事象の是非を明確に区別するものでないため,コストも連続的に扱う必要があり,どのような数値的対応づけを行うかが非常に重要となる.

また 3 章の定式化では,傾向 4.3 のように高次マルコフ的性質を持つ制約を扱えない問題もある.この問題に関しては,複数の音で決まる音列コストを導入する解決法が考えられる.

4.2 音列コストによる一対一対位法実験 4.2.1 実験条件

以上の考えに基づき,音列コストの導入による対 旋律を生成実験を行った.

3.7章の実験同様に,対旋律の最初と最後の音は固定し,旋律の途中には隣接する n 音が一つの状態をなす n 次マルコフの探索空間を作った.ただし,今回は学習データ量との整合性より n=3 とした.また探索効率化のため,完全協和音程の連続など,規則に違反する音列を含む状態は予め除外した.

コストを対数尤度の逆符号で与えるため,音列出現確率の学習を教科書中の [7] の 23 例と [8] の 25 例の作例を用いて行った.また,音列出現確率は二声対位法の対旋律,三声対位法の二つの対旋律で区別はせず,共通の方法で割り当てた.その際,音列を絶対音高の系列として扱うと学習データが少な過ぎるため,全音階的な音高変化のみを用いた.これらの設定の下で,累積確率最大(累積コスト最小) および N-best の対旋律を求めた.

4.2.2 実験結果

図 7 に二声一対一対位法,図 8 に三声一対一対 位法での対旋律探索結果例を示す.図中の表記法 および入力した対旋律は,3.7.2節の図 4,5 の実験 結果例と同じである.

音列出現確率の学習により、同一の音高付近に留まらない、変化に富む対旋律が多く現れた.中でも三声対位法において、旋律性を考えない3.7.2節の結果と比べてより自由な旋律の動きが確認された.三声対位法の下声に跳躍進行が多く見られるのは、

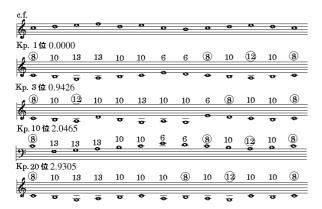


図 7: 二声一対一対位法での対旋律探索結果例 (音列生成確率適用後)

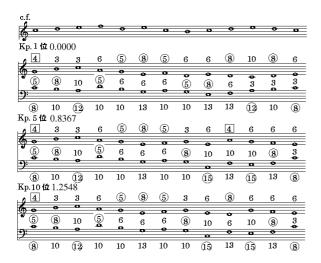


図 8: 三声一対一対位法での対旋律探索結果例 (音列生成確率適用後)

旋律性の高い中声を得る必要性と,音程による束縛との兼ね合いによるものと考えられる.これは実際の三声対位法でも起こる現象であり,より対位法に則した結果が得られたことがわかる.

5 一対多の対旋律生成

5.1 多音ー状態モデルの導入

本章では,定旋律一音に複数音の対旋律を対応づける一対多の対位法での対旋律生成について議論する.

一対多あるいは多対多の対位法は,一対一の対位法で論じられる音程や進行の原理に,協和音程や経過音・補助音・掛留音などの不協和音程による変形がなされた結果であると考える.例えば,四対四は一対一を4倍細かくしたものではなく,一対一を協和音程や不協和音程により変形したものであるとみなす.その場合の基礎として内在する一対一の音程関係を「状態」と捉える試みを,以下で行う.

一対多の対位法では,対旋律の各音は定旋律に対する音の位置で性質が異なる.例えば一対二の対

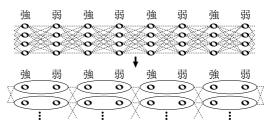


図 9: 多音ー状態モデル (一対二対位法の場合)



図 10: 不協和音程の使用例

位法において,定旋律と同時に発せられる音は強拍,一拍遅れる音は弱拍として分類され異なる役割を果たす.以下に,一対二の対位法の強拍と弱拍に関する規則の例を挙げる.

規則 5.1 不協和音程を強拍に用いる場合は,必ず協和音程をなす前の弱拍の音とタイで繋ぎ,順次進行により次の弱拍の協和音程へ解決する必要がある.つまり,掛留音として使用できる.(図 10 左)[7, 8, 9]

規則 5.2 弱拍で不協和音程を用いる場合,その前後は協和音程でかつ順次進行する必要がある.この場合,弱拍の音は経過音あるいは補助音となる.(図 10 右) [7,8]

規則 5.3 強拍間で連続五,八度になってはならない. [7,8]

強拍と弱拍の音は、定旋律一音に対応する対旋律一音が派生してできたと考えられる.例えば図 10右の対旋律 G3, F3 の進行は、もともと協和音程をなす G3 一音であったものの装飾形とみなせる.同様に一対多の対位法においても、定旋律一音に対する複数音の対旋律は一つの音に還元できる.

この観点より,我々は一対多の対位法の対旋律生成において,対旋律複数音を一つの状態とみなす多音一状態モデル(図9)を導入する.多音一状態にすれば,掛留音を含む状態や,不協和音程を含まない状態など,音列の性質を明確かつ簡潔に表現できる.また規則5.3のように,一音一状態のモデルでは高次マルコフ的性質に属するいくつかの規則を1次マルコフ的に扱えるという利点もある.

5.2 一対二の二声対位法の実験

5.2.1 実験条件

一対二の対位法において,二音一状態からなる探索空間により DP を用いて対旋律を生成する実験を行った.

これまでの実験と同様に,対旋律の最初の音と最後の音は固定した.ただし最初の音は弱拍で始ま

り,最後の音は強拍で終わるように設定した.また,途中の定旋律の各音に対応する状態は,[7,8]を参考に以下の条件を満たすよう作成した.

1. 強拍が協和音程の場合

- 弱拍が協和音程なら強拍との音程は一 オクターブ以内で同度は除外
- 弱拍が不協和音程なら強拍と順次進行

2. 強拍が不協和音程の場合

• 弱拍は協和音程かつ強拍から二度下行

各状態の出現コストは,状態に含まれる二音の全音階的音高変化の絶対値と,強拍と弱拍の音程の種類で決まる重みの和で表した.重みは各拍の定旋律との音程が不完全協和音程,完全協和音程,不協和音程になる場合を基準に八種類で分類し,今回はそれらを全て1に設定した.隣接状態間のコストは音程規則に違反すれば100に,適合する場合は[7,8,9]を参考に次の三つの場合にわけて設定した.

- 1. 不協和音程から協和音程へ解決する場合は1
- 2. 次の状態の強拍が掛留音になる場合は1
- 3. それ以外の場合は前の状態の弱拍と次の状態 の強拍との全音階的音高変化の絶対値

また,終止形は[8]を参考に,強拍から弱拍への順次進行を経て,最後の音へは必ず順次進行し,かつ定旋律と反進行の関係になるようにした.

5.2.2 実験結果

図 11 に , 一対二対位法での対旋律探索結果例を示す . 図中の表記法は , 3.7.2 節の図 4 , 5 の実験結果例と同じである .

出力された対旋律は,二音一状態モデルで扱える音程規則を満たすことが確認され,二声一対一対位法では現れなかった不協和音程を補助音や掛留音として適切に用いていることがわかった.しかし,各状態の出現頻度は音高変化や音種の重みで決まる出現コストに依存し,試行錯誤によるヒューリスティックスで定めたため,その妥当性の検証が必要である.

また,第 10 位の中盤の対旋律のような不自然な旋律が時おり出力された.これは,4 章で扱った旋律性を全く考慮しなかったためだと考えられる.出現コストや遷移コストを学習により定めれば,旋律に関する問題点は改善される見込みがある.

6 結論

本稿では,対位法に基づく対旋律生成問題を DP により定式化し,扱える規則の適用範囲と限界を論じ,二声と三声の一対一対位法での対旋律生成実験を行った.また,高次マルコフモデルと音列出現確率の導入により,扱える規則や傾向が拡張され,より対位法規則に即した対旋律が得られた.

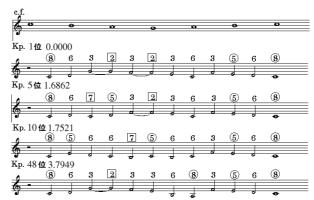


図 11: 一対二対位法での対旋律探索結果例 一対多の対位法における対旋律生成において,多 音一状態モデルにより定式化し,一対二対位法で の実験結果例を示した.

本稿で扱っている対位法はまだ実用的レベルへの 途上であるが,今回の定式化を基礎にしてより実際的な自動対位法の問題の解決に向けて研究を進めたい.今後は,旋律間の音数やリズムに制限のない,混合対位法での対旋律生成法を検討していくため,多音一状態モデルを基礎にして,模倣旋律を用いる方法,時間伸縮を考慮した旋律パターンのマッチングによる方法,音楽の還元理論に基づく構文解析的方法などの適用可能性を追求する予定である.また,旋律統計データを利用して旋律性を考慮した対旋律を生成する手法も考えたい.

参考文献

- [1] 川上隆: "隠れマルコフモデルを用いた旋律への和 声付けに関する研究," 北陸先端科学技術大学院大学 情報科学系研究科情報処理学専攻,修士論文,2000.
- [2] William Schottstaedt: "Automatic Counterpoint," in Max V. Mathews and John R. Pierce, editors, Current Directions in Computer Music Research, MIT Press, 1989.
- [3] 只野真奈美, 山崎直子, 高田正之, 小谷善行, 西村恕 彦: 対位法による編曲システムの開発, 情報処理学 会第 38 回全国大会講演論文集, 4W-2, pp. 1863 -1864, 1989.
- [4] H.A.Simon and R.K.Sumner: "Pattern in Music": Machine Models of Music, pp. 83-110, The MIT Press, 1993.
- [5] 長嶋洋一他: "コンピュータと音楽の世界", bit 別冊, 共立出版株式会社, 1998.
- [6] 吉川響,中井満,下平博,嵯峨山茂樹: "動的計画法を用いた音楽の対旋律の自動生成," 平成12 年電気関係学会北陸支部大会講演論文集,F-82,pp. 383, 2000.
- [7] J. J. Fux: Gradus ad Parnassum, 1725. (坂本良 隆訳: 古典対位法, 音楽之友社, 東京, 1950).
- [8] 長谷川良夫: 対位法, 音楽之友社, 東京, 1955.
- [9] 下総皖一: 対位法, 音楽之友社, 東京, 1951.
- [10] 伊庭斉志: "探索のアルゴリズムとその技法," サイエンス社, 東京, 2002.