

フルートの運指のモデル化と その最適化に関する研究

澤井 賢一[†], 黒木 裕介[†], 松井 知己^{††}, 合原 一幸[†]

[†] 東京大学 ^{††} 中央大学

本稿では、フルートの運指を最適化する手法と、その最適化モデルに含まれるパラメータのチューニングについて述べる。今回提案する手法ではこの最適化問題を、対象とするパッセージから生成されるグラフの最短路問題に帰着してモデル化した。このグラフは、パッセージ中の音に対する運指の候補を頂点集合とし、隣同士の音に対する運指間に有向辺をつけたものである。頂点間距離には、二つの運指を続けて演奏する際のやりにくさを適切に定めて用いる。また、パラメータを用いて距離を定めており、パラメータの値によって出力される運指が変化する。更に、例えばユーザの使い慣れた運指を教師信号とし、その運指が出力されるようにパラメータをチューニングする問題を逆問題として定式化した。

Modeling and Optimization of Flute Fingerings

Ken'ichi SAWAI[†] Yusuke KUROKI[†] Tomomi MATSUI^{††} Kazuyuki AIHARA[†]

[†] The University of Tokyo

^{††} Chuo University

This paper describes an optimization method of flute fingerings and parameter tuning. Our optimization method uses a shortest path problem of a directed graph generated by an objective passage. The vertices are the probable fingerings of the tones of the passage, and the arcs are the pairs of fingerings of the consecutive tones. The distance is defined as suitably designed difficulty in using the fingerings. Besides, this method has some parameters in calculation of distance and outputs different fingerings with the same passage by changing the parameter values. Furthermore, we propose a method of tuning the parameter values based on inverse optimization so as to, for example, get the accustomed fingerings of a certain passage as output.

1 はじめに

フルートは、一つの音に対して複数通りの運指(指使い)があることが多い。それらは音色や音程を調節するために用いる場合と、テンポの速いパッセージで運指を楽にして、演奏を容易にするために用いる場合がある。本稿では、後者の場合について運指の組合せを最適化することを考える。こ

こで、テンポが速い曲でも音価が長ければ運指は困難ではないため、対象とするパッセージはテンポの速い曲中の、音価の短い音符が連続する箇所である(図1)。よって最適化の対象は、高々20音程度のパッセージとなる。

2 準備

本稿では音名に英語表記を用いる。オクターブ(音域)の区別は、ピアノの真ん中のCから始まるオクターブを4とし、数字が大きくなるほど高い音域を表すとして、音名の後ろに数字をつけて表す。フルートが通常の演奏で用いる音域はだいたい、C₄からその3オクターブ上のC₇までである。



図1. 最適化の対象とするパッセージの例。

フルートを演奏する際は、楽器の管の側面に開いた穴（トーンホール）を開け閉めして音程を変えるが、その時に操作するものを本稿ではキーと呼ぶ。キーは15個（またはそれ以上）あり、すなわち一つの指に対して複数のキーが対応する場合もある。

フルートには各音に対して「基本となる運指」が一つ決まっており、通常は基本運指を用いて演奏する。基本運指以外の運指は替え指と呼ばれ、前節で述べたような目的で使い分ける。

各音に対する運指の種類数を表1に示す。種類数は参考文献[1]のWeb Pageを参考にした。しかし、任意の押さえ方に対して何らかの音程の音を発音することは可能であり、また、替え指は独自に考案する人もいたりするため、Web Page[1]に載っているものが全てではない。そのため、一般の演奏者は全ての替え指を把握しているわけではなく、必要に応じてこのWeb Page[1]のようなものを参照し、場面に合った運指を選択する。使い慣れない運指の場合は、音符を見た瞬間にその運指を押さえられるようになるまでそれなりの練習が必要となる。

表1. 各音に対する運指の種類数.

音域	C	C#	D	D#	E	F
4	1	1	1	1	1	1
5	8	15	2	1	2	1
6	6	6	4	9	8	7

音域	F#	G	G#	A	A#	B
4	2	1	1	8	8	3
5	2	2	2	4	6	3
6	9	7	7	3	8	6

本稿では、フルートの運指を図2のように表す。これはフルートのキーを模式的に表したもので、黒塗りが押さえるキー、白抜きが離すキーを示す。真ん中の縦線の左側が左手、右側が右手で操作するキーを表す。数字の1, 2, 3で示されたキーはそれぞれ人差指、中指、薬指で操作し、※印のキーは場合によって右手のこの3本の指のどれかでそれぞれ押さえる。他は示した通りで、左親指は二つ、右小指は三つのキーを操作する。右親指はキー操作に用いない。この図は、左手の親指、人差指、中

指、及び右手の小指でそれぞれ図に示したキーを押さえる運指を表している。

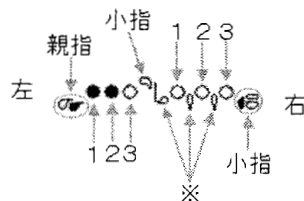


図2. 運指図の例.

3 最適運指問題

ある運指から別の運指に変える際に動かす指は、押さえる、離す、ずらすのいずれかの動作をする。特に「ずらす」とは、ある場所を押さえたまま指をずらして別の場所を押さえることであるが、「押さえる」、「離す」にくらべてかなりやりづらい。また、「押さえる」と「離す」に関しては、「離す」方が若干やりやすい。そこで、「押さえる」、「離す」、「ずらす」のやりにくさをそれぞれ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ として数値化し、運指 u, v 間の距離を次のように定める：

$$w(u, v) = \alpha_1 n_1(u, v) + \alpha_2 n_2(u, v) + \alpha_3 n_3(u, v). \quad (1)$$

ただし $n_1(u, v), n_2(u, v), n_3(u, v)$ はそれぞれ、 u から v に変える際に押さえる指、離す指、ずらす指の本数である。そして、運指を最適化したいパッセージに対する全ての運指の組合せの中から、距離の総和が最小になるものを探するような最適運指問題を解くことを考える。

この問題は、図3のような有向グラフの最短路問題に帰着され、動的計画法[2]で解くことができる。図3のグラフは、各音に対応する運指を頂点集合とし、隣合う音に対応する運指間に有向辺をつけたものである。運指 s, t は仮想的な運指で、それぞれパッセージの最初、最後の各運指と距離0の辺で結ぶ。また、各辺には演奏するのと同じ方向に向きをつける。このグラフをOFPグラフ(OFP: Optimization of Fingering Problem)と呼ぶこととする。最適運指問題を動的計画法を用い

て解く際の計算時間は $O(n)$ である (n はパッセージ中の音符の数) .

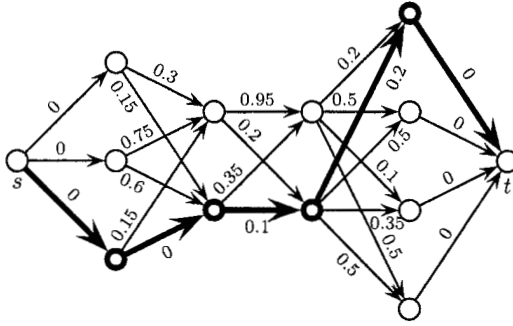


図 3. OFP グラフの例 (太線は最適解) .

このモデルを図 4 の譜例に適用した結果を表 2 に示す。ただしここで、式 (1) に現れるパラメータの値は $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.15, 0.1, 0.75)$ とした。これは、筆者の経験に基づいて定めたものである。また、この譜例に対しては、教則本 [3] にも載るような一般的な替え指が存在する。その運指も同時に示す。

4 逆問題を用いたパラメータチューニング

前節でも見たように、式 (1) のパラメータの定め方は一定でない。前節のように感覚的に定めてもよいが、本稿では、いくつかのサンプルパッセージに対して「教師運指」が出力されるようにパラ

メータを定める逆問題を考える。この教師運指には、教則本による運指や、特定のパッセージに対してユーザに練習経験があつてやり慣れている運指などが考えられる。

4.1 逆問題の定式化

逆問題の定式化は、最短路問題を線形計画問題として定式化し、その双対問題との相補性条件を考えることで得られる [4]。まず、パッセージから生成される OFP グラフを $G = (V, A)$ とし、最短路問題を線形計画問題で表すと次のようになる：

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{a \in A} w(a)x(a) \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{a \in \text{In}(v)} x(a) - \sum_{a \in \text{Out}(v)} x(a) = 0 \quad (\forall v \in V \setminus \{s, t\}), \\ & \sum_{a \in \text{Out}(s)} x(a) = 1, \quad \sum_{a \in \text{In}(t)} x(a) = 1, \\ & x(a) \geq 0 \quad (\forall a \in A). \end{aligned}$$

ただし、 $v \in V$ に対して $\text{Out}(v), \text{In}(v)$ はそれぞれ v を始点、終点とする有向辺の集合である。 $x(a)$ ($a \in A$) は、最短路パスに辺 a が含まれるなら 1, 含まれないならば 0 をとる変数である。非巡回的な有向グラフの最短路問題において、0-1 整数制約を上記のように非負制約に緩和しても、整数最適解を持つことが知られている。

この問題に対する双対問題は次の通りである：

$$\begin{aligned} \max. \quad & \pi(t) - \pi(s) \\ \text{s. t.} \quad & \pi(v) - \pi(u) \leq w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in A). \end{aligned}$$

双対変数 $\pi(v)$ ($v \in V$) は、 $\pi(v) - \pi(s)$ が頂点 s から v への最短路の長さの下界を表していると解釈できる。



図 4. 譜例.

音名	基本運指	教則本による運指	出力結果
D ₅			
C ₅ #			
D ₅			
パス長	1.75	0.75	0.25

最短路問題の相補性条件は、最短路問題と双対問題の最適解をそれぞれ x^*, π^* として、 $\forall (u, v) \in A$ に対して

$$x^*(u, v) > 0 \Rightarrow \pi^*(v) - \pi^*(u) = w(u, v)$$

となる。 x^* が最短路問題の 0-1 最適解であるとする、 x^* によって表される最短パスを P^* として、

$$x^*(u, v) > 0 \Leftrightarrow x^*(u, v) = 1 \Leftrightarrow (u, v) \in P^*,$$

すなわち、 (u, v) が最短路問題の最短パスに含まれるならば、 $\pi^*(v) - \pi^*(u) = w(u, v)$ が成り立つ。

以上より、与えたパス P に対して、双対問題の許容解 π が $(u, v) \in P \Rightarrow \pi(v) - \pi(u) = w(u, v)$ を満たせば、 P は最短路問題の最短パスとなる。すなわち、

$$\pi(v) - \pi(u) \leq w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in A),$$

$$\pi(v) - \pi(u) = w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in P),$$

を満たす π が存在するように $w(u, v)$ を定めればよい。

最後に、逆問題の目的関数のとり方について述べる。ここでは、パラメータが経験的な値と大きくずれないように、 $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と経験的な値 $\tilde{\alpha} := (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3)$ との 1-ノルムを最小化することを考える。1-ノルムの最小化問題は線形計画問題に帰着でき、逆問題は次のように書ける：

$$\begin{aligned} \min_{\beta, \pi} \quad & \sum_{i=1}^3 \beta_i \\ \text{s. t.} \quad & \pi(v) - \pi(u) \leq w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in A), \\ & \pi(v) - \pi(u) = w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in P), \\ & w(u, v) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i n_i(u, v) \quad (\forall (u, v) \in A), \\ & -\beta_i \leq \alpha_i - \tilde{\alpha}_i \leq \beta_i \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

ただし、上記の問題の変数は、

$$\pi(v) \quad (v \in V), w(u, v) \quad ((u, v) \in A),$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

である。

4.2 モデルの改善

本稿では、教則本 [3] で教える替え指のうち、図 5 に示すパッセージに対する運指を教師運指として逆問題を解くことを考える。

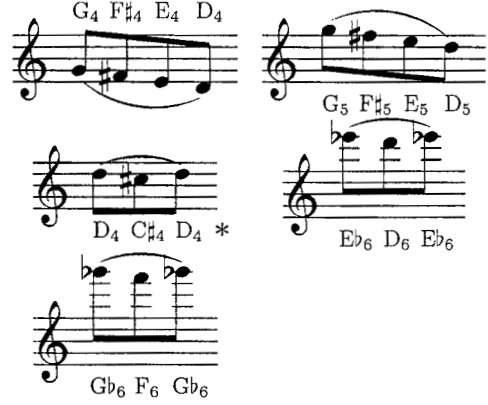


図 5. 教師運指が用いられるパッセージ。

ここで、図 5 中*のパッセージに対する教師運指を表 2 の「教則本による運指」として示しているが、この運指は任意の正値のパラメータ $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ に対して最適解になりえない。なぜなら、OFP Graph におけるこの教師運指のパス長は $3\alpha_1 + 3\alpha_2$ であるが、表 2 にある「出力結果」のパス長は $\alpha_1 + \alpha_2$ で、 $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0; 3\alpha_1 + 3\alpha_2 > \alpha_1 + \alpha_2$ だからである。これを解決するために新たなパラメータを三つ導入し、式 (1) を次の式に置き換える：

$$w(u, v) = \sum_{i=1}^6 \alpha_i n_i(u, v) \quad ((u, v) \in A). \quad (2)$$

ただし、新たに導入した数値 n_4, n_5, n_6 の意味は次の通りである：

$n_4(u, v) \in \{0, 1\}$: 運指 u, v 間がクロスフィンガリングならば 1, クロスフィンガリングでないならば 0 をとる。クロスフィンガリングとは、 u から v に変える際の動作が「押さえる」、「離す」、「ずらす」のうち二種類以上あることを言い、動作が一種類である方が一般にやりやすいとされる。たとえば表 2 にある、図 4 の譜例に対する基本運指はクロスフィンガリングが連続している。

$n_5(u, v) \in \{0, 1\}$: 運指 v において、歌口から見て最初に開いているトーンホールが、基本運指のそれと同じならば 0, 違うならば 1 をとる。このトーンホールが開いているかどうかは発音する音に大きく影響するため、これが基

本運指の場合と同じであれば、基本運指と同様に発音しやすいだろうと考えた。

$n_6(u, v)$: 運指 v の、基本運指と押さえ方の違う指の数。基本運指と押さえ方が似ている方が発音しやすいだろうと考えた。

数値 n_5, n_6 は、正確には運指間に定められるものではなく、性質の良い運指が最適解として選ばれやすくするためのものである。

4.3 逆問題の適用

図 5 の五つのパッセージに対する逆問題を解くために、図 6 のようなグラフを考える。これは、各パッセージに対する OFP グラフの間に仮想的な運指 j_i を配置してつなげたものである。運指 j_i は s, t と同様、任意の運指との距離が 0 であるとする。このグラフを、図 5 のパッセージに対する **IOFP グラフ** (IOFP: Inverse of OFP) と呼ぶこととする。IOFP グラフを用いることで、複数のパッセージに対して教師運指を同時に出力するパラメータを求めることができる。

実際に逆問題を解いた結果を表 3 に示す。クロスフィンガリング (α_4) とずらす指の本数 (α_3) に対して大きめの初期値を与えたが、筆者の感覚が妥当であったことが分かる。しかし、押さえる指の本数 (α_1) と基本運指との類似度 (α_6) については、やりにくさに対して予想より強い影響を与えていたことが分かる。

表 3. 逆問題を解いて得られたパラメータ値.

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
初期値	0.15	0.1	0.75	0.8	0.3	0.1
結果	0.2	0.1	0.75	0.8	0.3	0.3

5 まとめと今後の課題

本稿ではフルートの運指の最適化を、二つの運指間のやりにくさを距離として定めることで最短経路問題に帰着して行った。また、含まれるパラメータを決定するために、その最短経路問題の逆問題を用いた。

今後の課題として考えられるのは、運指間の距離を定める式 (2) の改善である。教則本 [3] で教える替え指のうち、本稿で扱わなかったものいくつかを教師運指とした時、第 4.2 節の場合ように、逆問題が解を持たない場合がある。また、発音しやすさを考慮するために数値 n_5, n_6 を導入したが、この妥当性については検証が必要である。更に、より直接的に発音のしやすさを反映するために、音響インピーダンスを用いることが考えられる [5]。管楽器の正確な演奏には、運指の他に息のコントロールも重要な要素となるので、その点をより積極的にモデルに組み込む必要がある。

参考文献

- [1] Timothy Reichard: The Woodwind Fingering Guide, Web Page.
<http://www.wfg.woodwind.org/>, 2006.

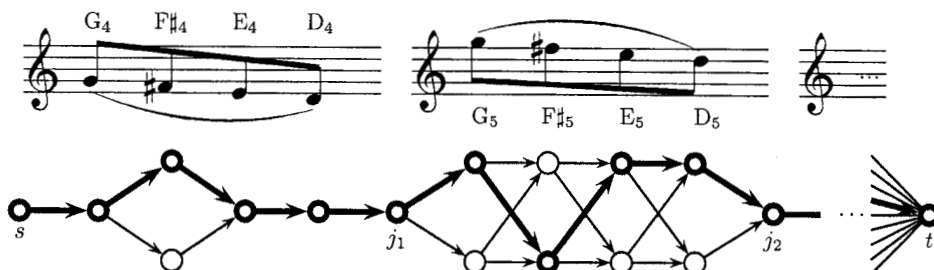


図 6. 図 5 に対する IOFP グラフ (太線は教師運指)。

- [2] 杉原厚吉: データ構造とアルゴリズム. 共立出版, 東京, 2001.
- [3] アンリ アルテ: フルート教則本 2. 比田井洵 (編著), 日本フルートクラブ出版, 東京, 1961.
- [4] Ravindra K. Ahuja and James B. Orlin: Inverse Optimization, Operations Research, Vol. 49, No. 5, pp. 771–783, 2001.
- [5] Andrew Botros, John Smith and Joe Wolfe: The Virtual Boehm Flute—A Web Service That Predicts Multiphonics, Microtones and Alternative Fingerings, Acoustics Australia, Vol. 30, No. 2, pp. 61–65, 2002.