人文科学とコンピュータ　49－5
（２００１．１．１９）

変換構造説に基づくパターン認知の数理モデル

天野　要＊　芝田安裕＊　岡野　大＊　緒方秀教＊
小西敏雄＊＊

＊愛媛大学工学部情報工学科
＊＊松山東雲女子大学人文学部国際文化学科

心理学の分野で，類似性判断や良さ判断のようなパターンに関する異質な認知判断を統一的に説明しようとする学説に変換構造説がある．変換構造説によれば，認知系は提示されたパターンに対していくつかの変換 (認知的変換) を施し，そこで示される相互変換可能性または不変性によってその構造 (変換構造) を認知し，この変換構造に基づいて認知判断を行う．ここでは，変換構造説の立場で，白黒の楕円を横に並べた１次元楕円パターン (線形２値パターン) を対象に，パターンの類似性判断の数理モデル (変換群構造説) を構成し，その妥当性を実験的に検証する．

A Mathematical Model of Pattern Cognition Based on the Transformational Structure Theory

Kaname AMANO*, Yasuhiro SHIBATA*, Dai OKANO*, Hidenori OGATA* and Toshio Konishi**

*Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Ehime University
**Department of Communication and Culture, Faculty of Humanities, Matsuyama Shinonome College

The transformational structure theory systematically explains how different types of cognitive judgments of patterns such as similarity and goodness are performed, and predicts their ordinal relations by the concepts of cognitive tranformations and transformational structures. We here present a mathematical model, the transformational group structure theory, of similarity judgments of linear binary patterns based on the transformational structure theory.

1　はじめに

パターン認知の研究では，パターン[1]の構造がいかに認知されるか，認知された構造に対していかなる認知判断が形成されるか，が基本的な研究課題である．しかし，人間 (認知系) の認知の機構を直接研究することには各種の困難が存在する．そこで，類似性や良さのようなパターン認知判断の実験の結果から，間接的にパターン認知の機構を研究するという方法が採られる．

類似性判断や良さ判断のようなパターンに関する異質な認知判断を統一的に説明しようとする学説に変換構造説 [9, 10] がある．変換構造説によれば，認知系は提示されたパターンに対してい

[1]厳密には，提示される物理的刺激 (configuration) と認知されるパターン (pattern) は区別されるべきである．ここでは，この問題には深入りせず，特に支障のない限り両者をパターンと呼ぶことにする．

くつかの変換 (認知的変換) を施し，そこで示される相互変換可能性または不変性によってその構造 (変換構造) を認知し，この変換構造に基づいて認知判断を行う．今日まで，多くの実験がこの学説を支持している [4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16]．しかし，従来，認知系によって採択される認知的変換についてはいくつかが経験的に仮定され，提示されたパターンと認知的変換の関係が議論されることは少なかった．また，変換構造の類別の形式，構造間の比較の可能性，実験結果の有意性の検証法等，数理的視点から研究されるべき課題も少なからず残されていた．

天野・今井 [1, 2] は，白または黒の楕円を横に並べた１次元楕円パターン (線形２値パターン) と黒円を正方形の枠組の中に配置した２次元ドットパターン (正方２値行列パターン) を対象に，パターンの変換構造と認知判断の数理を考察し，変換構造説の再定式化を行った．彼らは，認知的変換として変換群をとることにより，提示されたパターンと認知的変換の関係を明らかにするとともに，それまでの変換構造説と同様な形式でパターンの変換構造を定義して，類似度と良さの順序が予測できることを示した．さらに，天野ら [3, 11] は，認知的変換として恒等変換群を含む４種の変換群が存在した場合の数理モデルを提示した．しかし，可能な変換構造を網羅した実験的検証はまだ行われていない．

ここでは，これまでの研究 [1, 2, 3, 11] を基礎に，１次元楕円パターンを対象とした類似性判断の数理モデル (変換群構造説) を構成し，可能な変換構造を網羅した実験を行ってその妥当性を検証する．具体的には，恒等変換群，鏡映変換群，位相変換群，反転変換群という４種の認知的変換群による相互変換可能性によってパターン対の変換群構造を定義し，拡張された順序整合性の仮説と順序保存の仮説で類似度の順序関係を予測する．最終的な順序関係はハッセ図で表現される．実験と検定の結果はこのモデルの妥当性を支持している．

2 類似性判断の数理モデル (変換群構造説)

認知的変換群による相互変換可能性 (一致可能性) によってパターン対の変換群構造が定義され，この変換群構造が類似性判断に関係づけられる．

2.1 認知的変換群と変換群構造

変換群構造説では，認知課題に直接関係する変換は単一の変換ではなく変換群であると考える．１次元楕円パターンの場合には，次の４種の変換群が重要である [1, 2]．

- 恒等変換群 $I = \{e\}$: e は恒等変換である．
- 鏡映変換群 $M = \{e, m\}$: m は楕円要素の順序を逆転する．
- 位相変換群 $P = \{e, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$: p_i は楕円要素の順序を i だけ右に平行移動し，右端にはみ出した要素を左端に順次組込む．
- 反転変換群 $R = \{e, r\}$: r はすべての楕円要素の色を反転する．

これらの変換群は互いに可換で，積もまた変換群である．変換群によるパターン対の相互変換可能性は同値関係であり，このことが類似性判断におけるパターン情報処理の性質を明確にする [1]．

これらの認知的変換群による相互変換可能性によってパターン対の関係構造を定義し，これを変換群構造 (正確にはパターン刺激間変換群構造) と呼ぶ．一般に，認知系によってある認知的変

換群のセットが採択されると，パターン対はいくつかの変換群構造に類別される．以後，変換群をイタリック体で，変換群構造をローマン体で記して区別する．

いま，認知的変換群として恒等変換群 I とそれ以外の互いに可換な3種の変換群 T_i, T_j, T_k が採択されたとする．このとき，変換群の可換性 $T_iT_j = T_jT_i$ と再生性 $TT = T$ により，パターン対は

- 恒等変換群構造 I：変換群 I で相互変換可能な構造，
- 単一変換群構造 $\mathrm{T}_i, \mathrm{T}_j, \mathrm{T}_k$：それぞれ変換群 T_i, T_j, T_k で相互変換可能な構造，
- 積変換群構造 $\mathrm{T}_i\mathrm{T}_j, \mathrm{T}_j\mathrm{T}_k, \mathrm{T}_k\mathrm{T}_i, \mathrm{T}_i\mathrm{T}_j\mathrm{T}_k$：それぞれ積変換群 $T_iT_j, T_jT_k, T_kT_i, T_iT_jT_k$ ではじめて相互変換可能な構造，
- 多重変換群構造 $\mathrm{T}_i \wedge \mathrm{T}_j, \mathrm{T}_j \wedge \mathrm{T}_k, \mathrm{T}_k \wedge \mathrm{T}_i, \mathrm{T}_i \wedge \mathrm{T}_j \wedge \mathrm{T}_k, \mathrm{T}_i \wedge \mathrm{T}_j\mathrm{T}_k, \mathrm{T}_j \wedge \mathrm{T}_k\mathrm{T}_i, \mathrm{T}_k \wedge \mathrm{T}_i\mathrm{T}_j, \mathrm{T}_i\mathrm{T}_j \wedge \mathrm{T}_j\mathrm{T}_k, \mathrm{T}_j\mathrm{T}_k \wedge \mathrm{T}_k\mathrm{T}_i, \mathrm{T}_k\mathrm{T}_i \wedge \mathrm{T}_i\mathrm{T}_j, \mathrm{T}_i\mathrm{T}_j \wedge \mathrm{T}_j\mathrm{T}_k \wedge \mathrm{T}_k\mathrm{T}_i$：複数の変換群構造を併せ持つ構造，
- 空変換群構造 E：以上の変換群をどう組合わせても相互変換不可能な構造，

に20分類される [3, 11]．ここに，I 以外の変換群による相互変換可能性とは e 以外の変換要素による相互変換可能性のことであると定義する．積変換群構造には因子の変換群では相互変換不可能であることが含意されている．多重変換群構造とは複数の変換群構造を併せ持つことを意味する．

2.2 順序整合性の仮説と順序保存の仮説

このような変換群構造の定義に基づいて，パターン対の類似度の順序関係を拡張された順序整合性の仮説と順序保存の仮説で予測する．

順序整合性の仮説とは，任意の変換群構造 $\mathrm{T}_i, \mathrm{T}_j, \mathrm{T}_k$ に対して

$$S(\mathrm{T}_i), S(\mathrm{T}_j) \leq S(\mathrm{T}_i \wedge \mathrm{T}_j) \leq S(\mathrm{I}), \tag{1}$$

$$S(\mathrm{E}) \leq S(\mathrm{T}_i\mathrm{T}_k \wedge \mathrm{T}_j\mathrm{T}_k) \leq S(\mathrm{T}_k) \tag{2}$$

が成立することである．ここに，$S(\mathrm{T})$ は変換群構造 T を持つパターン対の類似度である．前者は，変換群構造 T を持つパターン対より T を含む多重変換群構造を持つパターン対の方が類似度が高いことを意味する．後者は，変換群構造 T を持つパターン対の方が変換群 T を因子とする積変換群のみからなる多重変換群構造を持つパターン対より類似度が高いことを意味する．恒等変換群構造 I を持つパターン対は同一で，類似度は最も高い．空変換群構造を持つパターン対の類似度は最も低い．

順序保存の仮説とは，順序関係

$$\begin{array}{rcl} S(\mathrm{T}_i) & \mathrm{R}_1 & S(\mathrm{T}_j), \\ S(\mathrm{T}_i \wedge \mathrm{T}_k) & \mathrm{R}_2 & S(\mathrm{T}_j \wedge \mathrm{T}_k), \\ S(\mathrm{T}_i\mathrm{T}_k) & \mathrm{R}_3 & S(\mathrm{T}_j\mathrm{T}_k) \end{array} \tag{3}$$

における不等号 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3$ が等しいことである．

2.3 予測順序のハッセ図表現

順序整合性の仮説と順序保存の仮説により，前述の 20 の変換群構造の間に類似度の順序関係が定まる．この関係は恒等変換群構造 I を最上位，空変換群構造 E を最下位とするハッセ図で表現することができる．$\{T_i, T_j, T_k\} = \{M, P, R\}$ とした場合のハッセ図を Figure 1 に示す (線の種類と括弧内の数値の意味については後述する)．線で結ばれた変換群構造を持つパターン対の間では順序が定まり，上位の階層の構造をもつパターン対の方が下位の階層の構造をもつパターン対より類似度が高い．線で結ばれない変換群構造を持つパターン対の類似度は比較できない．しかし，その場合にも，順序保存の仮説は成立していなければならない．

3 実験と考察

3.1 方法

- 実施年月日：1996 年 10 月 29 日 (火)
- 被験者：愛媛大学法文学部 1 回生 61 名 (無効 1 件)
- パターン：12 要素パターン対 33 組
- 評定法：最低 0 点，最高 10 点の 11 段階評定
- 反復数：3 回

実験に用いたパターン対を Table 1 に示す．12 要素の場合には，$PR \wedge RM \wedge MP$ 以外の変換群構造を網羅することができる．記号 a ～ l の 12 組は，今井 [9](p.51) と同じパターン対で，すべて 4 要素× 3 回の周期的構造を持っている．

実験では，横型 A5 の紙片に灰色の領域をとり，その中央にパターン対を配置して，白と黒の楕円がほぼ等しいコントラストを見せるようにした．紙片の隅にランダムな 2 桁の番号を付け，回答紙の回答欄の番号と対応させた．

被験者はまず配布された 33 枚の紙片をシャッフルした．それから，パターン対の類似度を最低 0 点，最高 10 点の 11 段階法で 1 組ずつ評定し，回答欄にその値を記入した．被験者には，パターンとは何か，類似度の基準は何か，は全く個人的な判断であり，途中で判断を変えたくなれば自由に変えてよいことを教示した．このようにシャッフルして評定するという作業を 3 回反復し，解析には 3 回目のデータを採用した．

3.2 結果と考察

Table 1 は類似度の評定値の平均と標準偏差，Figure 1 は平均値をハッセ図に記入したものである．平均値に有意差のあった関係は太線，順序に逆転の見られた関係は破線で区別している．

検定には，Microsoft Excel 97 の統計関数を使用した．具体的には，まず未知の母分散に対する差の検定 (F 検定) を有意水準 5% で実施し，その結果に応じて，母分散が一致する場合の平均値の差の検定 (t 検定) と一致しない場合の平均値の差の検定 (Welch の方法) を有意水準 5% で適用した．

以後，自明と考えられる場合には $S(\mathrm{T})$ を T と略記する．

Table 1 Pattern pairs and their transformational group structures with rated similarity.

	Pattern Pair	Transformational Group Structure	Average	SD	Average	SD	Average
95	●●○○●●○○●●○○ ●●○○●●○○●●○○	I	8.8	1.9	8.5	2.9	8.5
72	○○●●●○●○○●○● ○○●●●○●○○●○●		8.1	2.9			
38 b	○○●●○○●●○○●● ●●○○●●○○●●○○	M∧P∧R	7.4	2.9	7.6	2.8	7.6
81 a	○●○●○●○●○●○● ●○●○●○●○●○●○		8.2	2.7			
52	●●●●●●○○○○○○ ○○○○○○●●●●●●		7.3	3.3			
79 d	○●●○○●●○○●●○ ●○○●●○○●●○○●	P∧R	5.7	2.8	5.4	2.3	6.5
17	●●●○○●○○○●●○ ○○○●●○●●●○○●		5.1	2.7			
93	○●●○○○●●●○○● ●○○●●●○○○●●○	R∧M	6.9	2.9	6.9	2.6	
27 c	○○○●○○○●○○○● ●○○○●○○○●○○○	M∧P	7.5	2.5	7.4	2.7	
88	●○○●○○●●●●○○ ○○●●●●○○●○○●		7.3	2.5			
60	●●○○●●○○○●○● ●○●○○○●●○○●●	M∧PR	6.9	2.9	6.9	2.6	5.8
47	●○●○○○●●○○●● ○○●●○○●●●○●○	P∧RM	5.0	2.5	5.0	2.2	
62	○○●●○○●●●○●○ ●●○○●●○○○●○●	R∧MP	5.4	2.8	5.4	2.3	
46	○●●●○○●●○○●○ ○●○○●●○○●●●○	M	6.9	2.5	6.9	2.6	5.6
64 f	○○○●○○○●○○○● ○○●○○○●○○○●○	P	5.8	2.8	5.2	2.3	
43 e	○○●●○○●●○○●● ○●●○○●●○○●●○		4.9	3.0			
37	○○○●●○●○●●●○ ○●●○●○●●●○○○		4.9	3.3			
83 g	○○○○○○○○○○○○ ●●●●●●●●●●●●	R	6.5	3.6	5.6	2.4	
68 h	○○○●○○○●○○○● ●●●○●●●○●●●○		5.2	3.1			
91	○●○●●○○●●●○○ ●○●○○●●○○○●●		5.0	2.8			
54	●●○○●○○○●●○● ○●○○●●●○●●○○	RM∧MP	4.9	2.4	4.9	2.2	4.6
13	●○○○●○●●●○○● ●●○○●●●○●○○○	MP∧PR	3.2	2.4	3.2	1.8	
70 i	○○○●○○○●○○○● ○●●●○●●●○●●●	PR∧RM	5.2	2.6	5.1	2.2	
15	●○○●○○●○○●●● ○○○●●○●●○●●○		5.0	2.3			
77 j	○○○●○○○●○○○● ●●○●●●○●●●○●	PR	3.4	2.6	3.2	1.8	3.5
21	●●●○●○●○○●○○ ●●○○○●○●○●●○		3.0	2.3			
98	●●●○●○○●○●○○ ●●○●○●●○●○○○	RM	5.1	2.4	5.1	2.3	
84	●●●○○●○●○○●○ ○○●○●○○●●●○●	MP	2.6	2.1	2.6	1.6	
28	○●○●○○●○○●●● ○●●○●○●○○○●●	MPR	2.4	2.6	2.4	1.5	3.6
19 k	○○○○○○○○○○○○ ○○○●○○○●○○○●	E	1.8	2.6	1.4	1.2	1.4
12 l	○○●●○○●●○○●● ○○○○○○○○○○○○		1.1	1.9			
34	●●●●●●●●●●●● ○●○○●●○●○●○●		0.8	1.6			
58	○○●○○○●●●○●● ○●○●●○●○○○●●		1.8	2.2			

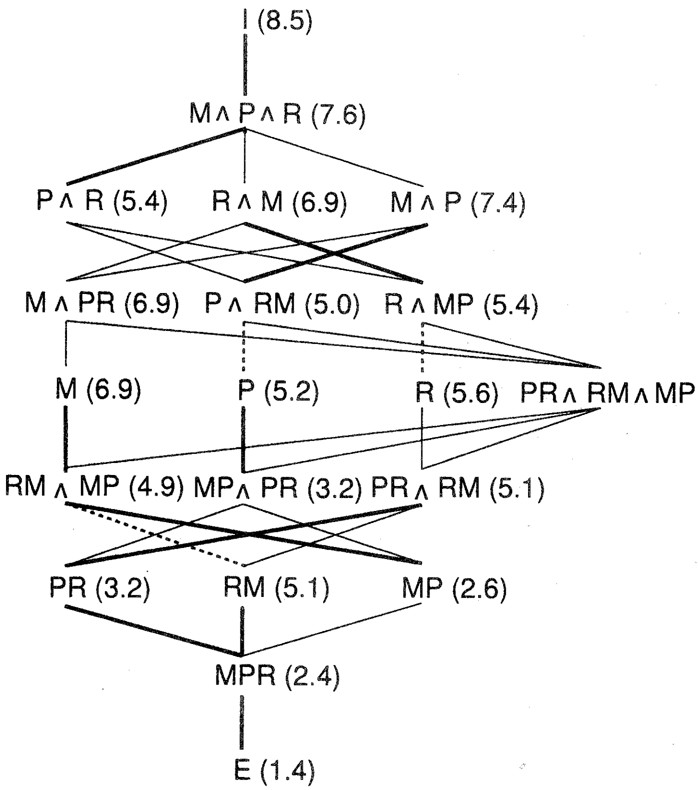

Figure 1　Hasse diagram with rated similarity.

3.2.1　予測順序の検討

Figure 1 では，$\mathrm{P}\wedge\mathrm{R}(5.4), \mathrm{R}\wedge\mathrm{MP}(5.4)$ と $\mathrm{R}(5.6)$ の間，$\mathrm{P}\wedge\mathrm{RM}(5.0)$ と $\mathrm{P}(5.2), \mathrm{PR}\wedge\mathrm{RM}(5.1)$ の間，$\mathrm{RM}\wedge\mathrm{MP}(4.9)$ と $\mathrm{RM}(5.1)$ の間にそれぞれ平均値の順序の逆転が見られる．しかし，その差は僅かで，有意性はない．したがって，有意な矛盾が皆無であるという意味で，実験はモデルの予測を支持している．

3.2.2　順序整合性の仮説の検討

まず，変換群構造 I のパターン対の類似度は最も高く，変換群構造 E のパターン対の類似度は最も低い．両者は他のすべての変換群構造との差が有意であった．

順序整合性の仮説 (1) の $S(\mathrm{T}_i), S(\mathrm{T}_j) \leq S(\mathrm{T}_i \wedge \mathrm{T}_j)$ の関係については次のとおりである．$\{\mathrm{T}_i, T_j, T_k\} = \{\mathrm{M}, \mathrm{P}, \mathrm{R}\}$ とした場合には，可能な 6 通りの組み合わせの内，$\mathrm{R} < \mathrm{R}\wedge\mathrm{M}, \mathrm{P} < \mathrm{M}\wedge\mathrm{P}$ は有意で，$\mathrm{R} > \mathrm{P}\wedge\mathrm{R}$ の逆転に有意性はなかった．さらに，$\mathrm{P}\wedge\mathrm{R} < \mathrm{M}\wedge\mathrm{P}\wedge\mathrm{R}$ は有意で，$\mathrm{R}\wedge\mathrm{M}, \mathrm{M}\wedge\mathrm{P} < \mathrm{M}\wedge\mathrm{P}\wedge\mathrm{R}$ も成立している．また，$\{\mathrm{T}_i, T_j, T_k\} = \{\mathrm{PR}, \mathrm{RM\,MP}\}$ とした場合には，$\mathrm{MP} < \mathrm{RM}\wedge\mathrm{MP}, \mathrm{PR} < \mathrm{PR}\wedge\mathrm{RM}$ は有意で，$\mathrm{RM} > \mathrm{RM}\wedge\mathrm{MP}$ の逆転に有意性はなかった．

順序整合性の仮説 (2) の $S(\mathrm{T}_i\mathrm{T}_k)\wedge S(\mathrm{T}_j\mathrm{T}_k) \leq S(T_k)$ の関係については，$\mathrm{RM}\wedge\mathrm{MP} < \mathrm{M}, \mathrm{MP}\wedge\mathrm{PR} < \mathrm{P}$ は有意で，$\mathrm{PR}\wedge\mathrm{RM} < \mathrm{R}$ も成立している．

したがって，拡張された順序整合性の仮説については概ね実験的に検証されたといえる．

3.2.3　順序保存の仮説の検討

単一変換群構造 M, P, R の間には P < R < M なる関係があり，P, R < M は有意で，P < R に有意性はなかった．

このことを念頭に，順序保存の仮説を P と M，R と M，P と R の順に検討する．まず，P と M に関しては，

$$\mathrm{P} < \mathrm{M}, \quad \mathrm{P} \wedge \mathrm{R} < \mathrm{R} \wedge \mathrm{M}, \quad \mathrm{PR} < \mathrm{RM}$$

はいずれも有意であった．次に，R と M に関しては，

$$\mathrm{R} < \mathrm{M}, \quad \mathrm{P} \wedge \mathrm{R} < \mathrm{M} \wedge \mathrm{P}, \quad \mathrm{PR} > \mathrm{MP}$$

の前２者は有意であったが，積変換群構造に順序の逆転が見られた（有意性はない）．最後に，P と R に関しては，

$$\mathrm{P} < \mathrm{R}, \quad \mathrm{M} \wedge \mathrm{P} > \mathrm{R} \wedge \mathrm{M}, \quad \mathrm{MP} < \mathrm{RM}$$

の多重変換群構造に順序の逆転があった (有意性はない)．このように，順序保存の仮説についても，直接的な検証は不充分であるが，有意な矛盾は皆無であった．

なお，M, P, R の間には，P < M, R < M のみならず，P∧R < M なる関係が有意に成立し，認知的変換群 M の効果は P, R に比較してかなり強い．また，PR, RM, MP の間にも，MP, PR < RM のみならず MP ∧ PR < RM なる関係が有意に成立していた．

4　おわりに

１次元楕円パターンを対象に，類似性判断の数理モデルを構成して，その妥当性を実験的に検証した．具体的には，恒等変換群を含む４種の認知的変換群による相互変換可能性によってパターン対の変換群構造を定義し，拡張された順序整合性の仮説と順序保存の仮説で類似度の順序関係を予測した．実験と検定の結果はモデルの妥当性を支持している．現在，

- 良さ判断の数理モデルの構成と実験的検証，
- ２次元ドットパターン (正方２値行列パターン) へのモデルの拡張，

等の関連研究が進行中である．

共同で実験を行った白垣育久，久保田亮，野勢俊二，大西健一，川口紀生，本多朋彦 (愛媛大学工学部情報工学科の元大学院生，学生) の諸氏，実験に協力して下さった学生の皆さんに感謝します．

参考文献

[1] 天野　要，今井四郎：パターンの変換構造と類似性認知に関する群論的研究，心理学研究，Vol.60, No.5, pp.297–303 (1989).

[2] 天野　要，今井四郎：パターンの変換構造と良さの認知に関する群論的研究，心理学研究，Vol.63, No.3, pp.181–187 (1992).

[3] 天野　要，白垣育久，久保田亮，村田健史：変換構造説に基づくパターン認知の数理モデル，愛媛大学工学部紀要，Vol.16, pp.559–569 (1997).

[4] 行場次朗，瀬戸伊佐生，市川伸一：パターンの良さ評定における問題点—SD 法による分析結果と変換構造説の対応—，心理学研究，Vol.56, No.2, pp.111–115 (1985).

[5] Imai, S.: Effect of Inter-Pattern Transformation Structures upon Similarity Judgments of Linear Pattern Pairs, *Proceedings of the XXth International Congress of Psychology*, Tokyo, pp.164–165 (1972).

[6] Imai, S.: Pattern Similarity and Cognitive Transformations, *Acta Phychologica*, Vol.41, pp.433–447 (1977).

[7] 今井四郎：パターンの良さについての諸学説，心理学評論，Vol.20, No.4, pp.258–272 (1977).

[8] Imai, S.: Pattern Cognition and the Processing of Transformation Structures, *Modern Issues in Perception* (edited by Geissler, H.-G., Buffart, H.F.J.M., Leeuwenberg, E.L.J. and Sarris, V.), *Advances in Psychology*, Vol.11, North-Holland, Amsterdam, pp.73–86 (1983).

[9] 今井四郎：パターン認知の変換構造説，日本心理学会心理学モノグラフ，No.17，東京大学出版会，東京 (1986).

[10] Imai, S.: Fundamentals of Cognitive Judgments of Pattern, *Cognition, Information Processing, and Phychophysics: Basic Issues* (edited by Geissler, H.-G., Link, S.W. and Townsend, J.T.), Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, pp.225–265 (1992).

[11] 今井四郎，天野　要：変換と写像の概念に基づくパターン認知論，応用数理，Vol.8, No.1, pp.30–45 (1998).

[12] 今井四郎，伊藤　進，伊藤智啓：パターンの良さと複雑さ判断におよぼすパターン内変換構造とラン数の効果，心理学評論，Vol.19, No.2, pp.77–94 (1976).

[13] 今井四郎，伊藤智啓，伊藤　進：良さの判断におよぼすパターン内変換構造の効果，心理学研究，Vol.47, No.4, pp.202–210 (1976).

[14] 伊藤　進：パターンの間の変換構造の認知と類似性の評定，心理学研究，Vol.46, No.1, pp.10–18 (1975).

[15] 松田隆夫：パターンの良さ判断とパターン内変換構造，—パターン認知に関する今井の変換構造説の検討—，心理学研究，Vol.49, No.4, pp.207–214 (1978).

[16] 大塚雄作：パタンの認知判断に対する幾何学的変換の役割，心理学研究，Vol.55, No.2, pp.67–74 (1984).