2006－CH－69　(9)
2006／1／27

線遠近法の逓減比に伴う性質の変化について

久木田知美

九州大学大学院芸術工学府芸術工学専攻

概要

遠近法は、三次元空間を二次元平面に表現する手段である。≪等比数列による遠近法≫は、特にシエナ派の作品にみられるものであり、ルネサンスの遠近法とは逓減比が異なる。辻茂氏は論文「遠近法の前原理(1)—c 線分を求めて—」の中で、等比数列による遠近法とルネサンスの遠近法が異なる距離点をもつことを作図的に示した。本講演では、≪等比数列による遠近法≫とルネサンスの遠近法のいくつかの異なる性質について解析、比較して得られたいくつかの結果を報告する。特に、両遠近法の直線に関する相違を数理的に示す。

A Deformation of property of Line Perspective by the Diminution Ratio.

KUKITA Tomomi

Design department, Graduate School of Design, Kyushu University

Abstract

Perspective is a means to express 3-dimensional space at a 2-dimensional plane. The Perspective by the geometrical proportion is different from the Renaissance perspective in not owning the same diminution ratio. Each perspective did not have a distance point in the same position. Shigeru Tsuji proved it using drawing in his paper "All principles of Perspective(1) : Looking at the c Segments Ratio". I report other differences between the two obtained by analyses and comparisons. Especially, the difference among both in a straight line is established.

1. はじめに

遠近法は、三次元空間を二次元平面に表現する方法でありその方法は様々である。ルネサンスの遠近法は幾何を用いた遠近法であり、線遠近法、透視図法ともよばれる。ルネサンスの遠近法の作図法はアルベルティ(1404～1472)の『絵画論』([2])で初めて整理された([3])。その作図法では、等間隔の平行線群が互いに交差してでき

る格子縞で囲まれてできる空間を基本になっている([2])。図1は、その格子縞で囲まれた空間に、横方向 x 軸、奥行方向 y 軸、高さ方向 z 軸を加えたものである。さらに格子縞を構成する三方向の線分に、線分 x、線分 y、線分 z とおき、y 方向に等間隔に並ぶ線分 x の集合のことを<線分 x の y 方向列>とよぶ。他の線分、方向列も同様である。

『絵画論』の中でアルベルティは、線分 x と線分 y とを明確に区別せず同じ呼称を与えている([1],[2])。このことから、アルベルティは線分 x と線分 y とが異なった性質を持つということに気がついていなかった、すなわち線分 x の y 方向列と線分 y の y 方向列の逓減比が同じとみなしていたと推測される([2])。ここで述べる逓減比とは、眼から原像までの距離に対し原像の大きさが徐々に縮小するように表現されるその比率のことである。

線分 x の y 方向列と線分 y の y 方向列の逓減比が同じになる遠近法で描かれた絵画は実在する。シエナ派の画家、アンブロージョ・ロレンツェッティの『聖告』もその一つである([6],[9])。

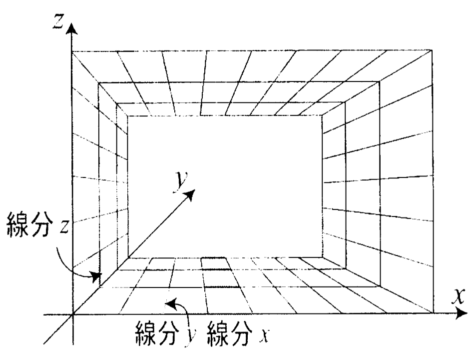

図1　格子縞と座標

本講演では、ルネサンスの遠近法と、線分 x の y 方向列と線分 y の y 方向列の逓減比が同じになる遠近法とをそれぞれ解析、性質を比較する。

2. ルネサンスの遠近法の特徴的性質

ルネサンスの遠近法には特徴的な性質が三つある。

1) 平行な直線群は画面上で一つの消失点をもつ。
2) 地面に平行に存在している直線の消失点は、視点を含む $x-y$ 平面と画面との交線上に存在する。
3) 対象は、眼と画面から遠ざかるにつれ画面上で逓減される。

さらに逓減について言及すると、ルネサンスの遠近法は、異なる四種の逓減比をもつ。この逓減比は、原像のもつ性質によって異なり、各線分 x、z の y 方向列、線分 y の y 方向列、各線分 x、z の各 x、z 方向列、線分 y の各 x、z 方向の四つの性質によってそれぞれ異なる逓減比となる。

3. 等比数列による遠近法の特徴的性質

$x-y$ 平面上 y 方向に一列に並んでいる合同な正方形を画面上に写像するとき、線分 x の y 方向列と線分 y の y 方向列の逓減比が同じであることは以下の a)、b)と同値である。

a)　平行である対角線は画面上でも平行である。

b)　線分 y の y 方向列の逓減比は等比数列である。

以後、このいずれかの性質を持つ遠近法を**≪等比数列による遠近法≫**とよぶ。

4. 両遠近法の解析

等比数列による遠近法とルネサンスの遠近法の画面上での表現をそれぞれ解析し、比較する。

図 2 はルネサンスの遠近法の、図 3 は等比数列による遠近法の格子縞透視像である([1])。各図における太線は、格子縞の各対角線を連ねてできる軌跡である。

等比数列よる遠近法とルネサンスの遠近法の顕著な相異は、『ルネサンスの遠近法では格子縞の各対角線を連ねてできた平行な直線群は画面上それぞれの収束点(消失点)をもつ(図 2)が、等比数列による遠近法では、画面上ただ一点に収束する(図 3)』

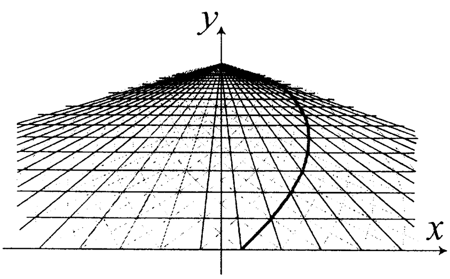

図 2　ルネサンスの遠近法

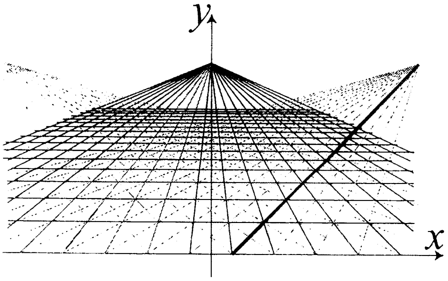

図 3　等比数列による遠近法

という点である([1])。それぞれの遠近法による格子縞透視像を比較する。

その為に図 2、図 3 の正方形列の画面の頂点を格子点とみなし以下のように記号を定める：

- 原像となる各正方形の一辺：a
- 視点から画面までの距離　：d
- 等比数列による遠近法の奥行きの比：r $(0<r<1)$
- x 軸方向 n 番目 y 軸方向 m 番目の格子点
  ルネサンスの遠近法　：
  $(x(n,m), y(n,m))$
  等比数列による遠近法：
  $(x_A(n,m), y_A(n,m))$
- 消失点の y 座標(視点の高さ)：h

以上をもとに、対角線を連ねてできた直線の画面上での軌跡が、二つの遠近法によってどのような違いがみられるかを解析する。

4.1 等比数列による遠近法の解析

図 4 を用いると、$m \geqq 0$、$n \geqq 1$、$0<r<1$　で、

$$\begin{cases} x_A(n,m) = \dfrac{a}{2}(2n-1)r^m, \\ y_A(n,m) = h(1-r^m), \\ r = \dfrac{h}{a+h} \quad , \end{cases} \tag{1}$$

が示せる。

$r = h/(a+h)$ は等比数列による遠近法の等比数列の比が、高さと正方形の一辺によって決定されることを示している。

$m = n + \alpha$ (α は整数)とおき(1)式に代入すると、$m \to \infty$ で、$x_A(n,m) \to 0$ かつ、

$y_A(n,m) \rightarrow h$ となる。

よって等比数列による遠近法の格子縞では、各対角線を連ねてできる軌跡の消失点は一点になるということが示された。

さらに、等比数列による遠近法の格子縞の各対角線を連ねてできる軌跡の関係式は、

$$r^{x_A(n,m)} = \{z(n,m) \cdot r^{\alpha - \frac{1}{2}}\}^{az(n,m)}$$

$$\text{(ただし、} z(n,m) = \frac{h - y_A(n,m)}{h}\text{)}$$

で与えられる。

この式は、『等比数列による遠近法は、視点の高さ、原像の大きさの二要素により決定される』ことを示している。

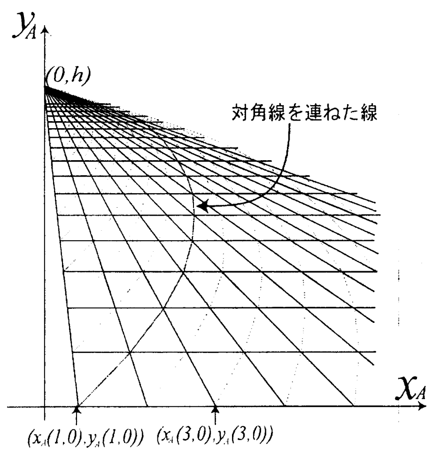

図 4　等比数列による遠近法の格子縞透視像

4.2　ルネサンスの遠近法

図5を用いると、

$m \geqq 0$、$n \geqq 1$ で、

$$\begin{cases} x(n,m) = \dfrac{a}{2}(2n-1)\dfrac{d}{am+d}, \\ y(n,m) = h(1 - \dfrac{d}{am+d}), \end{cases}$$

が示せる。

$m = n + \alpha$（α は整数）とすると、

$$y(n,m) = \frac{2h}{2d + (1-2\alpha)a} x(n,m) + \frac{(1-2\alpha)ah}{2d + (1-2\alpha)a}$$

となり、各対角線を連ねてできた直線は画面上でも直線であることが示される。

さらに、ルネサンスの遠近法の、格子縞の各対角線を連ねてできる軌跡の関係式は、『ルネサンス遠近法は、画面から視点までの距離、視点の高さ、正方形の一辺の長さの三要素により決定される』ことも示している。

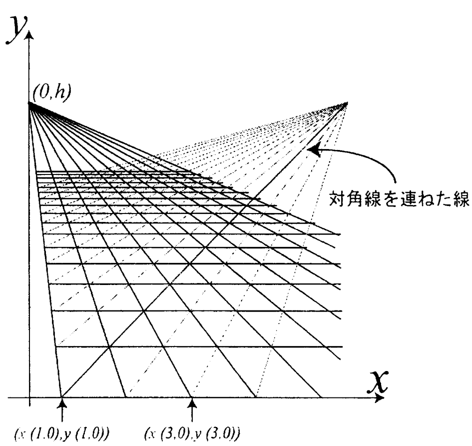

図 5　ルネサンスの遠近法の格子縞透視像

5.　両遠近法の比較

以上の解析から二つの遠近法を比較すると次のようなことが示せる。

5.1　格子縞の各対角線を連ねてできた軌跡の比較

等比数列による遠近法では、地面上にある格子縞の各対角線を連ねてできた軌跡は直線にならない。さらにそれの消失点は、y 方向に平行な直線群の消失点と一致する。

対し、ルネサンス遠近法では、地面上にある格子縞の各対角線を連ねてできた軌跡は直線になり、この直線は平行線群ごとに消失点をもつ。

5.2　格子点座標の比較

$$\begin{cases} x_0(n,m) = \dfrac{a}{2}(2n-1)\dfrac{d}{af(m)+d} \\ y_0(n,m) = h\left(1 - \dfrac{d}{af(m)+d}\right) \\ r = \dfrac{h}{a+h} \\ m \geqq 0、\ n \geqq 1 \end{cases} \qquad (2)$$

ルネサンスの遠近法の式は、(2)式中 $f(m)=m$ のときであり、$f(m)=d(1-r^m)/ar^m$ のとき、等比数列による遠近法の式となる。

また、等比数列による遠近法は、『視点の高さ(等比数列の比)、正方形の一辺の長さの二要素により決定される』のに対し、ルネサンスの遠近法は、等比数列による遠近法の決定要素である『視点の高さ、正方形の一辺の長さ』に加え、『画面から視点までの距離』も必要とする。

さらに(2)式について言及する。各格子縞の対角線を連ねてできた直線における消失点のうち、x 座標の位置は、(2)式中の $x_0(n,m)$ が $m\to\infty$ のときの $n/f(m)$ の値によって変化する。

$m=n+\alpha$(m、n、α：整数)が成立するとき(2)式が、

$$\lim_{m\to\infty}\frac{n}{f(m)} = 0$$

となる $f(m)$ をもつ場合、

$$\lim_{m\to\infty} x_0(n,m) = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} y_0(n,m) = h$$

となり、等比数列による遠近法の各格子縞の対角線と同じ消失点の性質をもつ。すなわち、(2)式中の $f(m)$ が、$m\to\infty$ で $n/f(m)\to\infty$ となるような値をもつとき、y 方向に平行な直線の消失点と各格子縞の対角線を連ねてできた直線(距離点を含む)は一致するのであり、『各格子縞の対角線を連ねてできた直線が画面上でただ一つの消失点をもつ』という性質は等比数列による遠近法に限るものではない。

5.3　二つの遠近法の変換式

等比数列による遠近法からルネサンスの遠近法への変換式は、

$$\begin{cases} x_A(n,m) = \left(1+\dfrac{a}{d}m\right)\cdot r^m \cdot x(n,m) \\ y_A(n,m) = \left(a+\dfrac{a}{d}m\right)\cdot(1-r^m)\cdot y(n,m) \end{cases}$$

である。この式を用いて両遠近法の格子点の各座標を比較する。

$y_A(n,m)/y(n,m)$ は m が大きくなるに従って値が増加する。これは、$y(n,m)$ に対し、$y_A(n,m)$ の方が極端に消失点に収束することが原因である。そして、$y_A(n,m)/y(n,m)$ は対象の大きさに反比例し、視点と画面との距離と、視点の高さもしくは等比数列の比に比例する。

同様に x 座標を比較する。

$x_A(n,m)\ /\ x(n,m)$は、mが増加するに従いr^mがより急激に減少するため反比例の形に近くなる。

6. 空間における両遠近法

ここまで、二つの遠近法の画面上での性質を述べてきた。次に、等比数列による遠近法及びルネサンスの遠近法で空間上の任意の点が画面上に写像されるとき、どのような差があるか示す。

以下のように記号を定める(図6):

・対象空間のある一点　　　　　: $P(x,y,z)$

・眼から画面までの距離　　　: d

・原像の長さ1に対する奥行きの比:

$r\ (0<r<1)$

・画面上のX座標の値

ルネサンスの遠近法　: $X(x,y,z)$

等比数列による遠近法 : $X_A(x,y,z)$

・画面上のZ座標の値

ルネサンスの遠近法　: $Z(x,y,z)$

等比数列による遠近法 : $Z_A(x,y,z)$

これらをもとに、それぞれの遠近法の空間から画面上への写像の式を求めると以下のようになる。

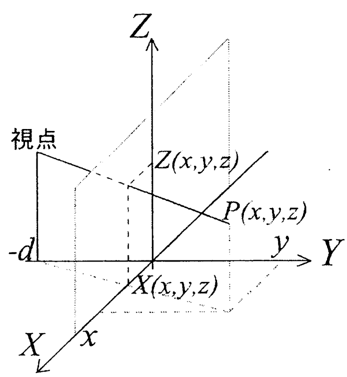

図6　空間から画面への写像

・等比数列による遠近法

$$\begin{cases} Z_A(x,y,z) = h(1-r^y) + \dfrac{d \cdot z}{d+y} \\ X_A(x,y,z) = x \cdot r^y \end{cases} \tag{3}$$

・ルネサンスの遠近法

$$\begin{cases} Z(x,y,z) = \dfrac{hy}{d+y} + \dfrac{dz}{d+y} \\ X(x,y,z) = \dfrac{d}{d+y} x \end{cases} \tag{4}$$

x-y-z 空間において、$x=\beta\cdot y+\gamma$ (β、γは任意)という関係式が成立するとき、

$x=\beta\cdot y+\gamma$　(β、γは任意)

を(3)式に代入すると、以下のようになる。

$$X_A(x,y,z) = (\beta \cdot y + \gamma) \cdot r^y$$

さらに、zが一定の範囲内を動くとき、

$$\lim_{y\to\infty} X_A(x,y,z) = 0$$

$$\lim_{y\to\infty} Z_A(x,y,z) = h$$

となる。

このことから、等比数列による遠近法は、直線のz成分がある一定の範囲内の値をとるとき、いかなる直線も曲線も全てただ一点の消失点を持つことがわかる。

ルネサンスの遠近法も同様に行うと、

$$\lim_{y\to\infty} X(x,y,z) = \beta \cdot d$$

$$\lim_{y\to\infty} Z(x,y,z) = h$$

となり、zが一定の範囲内を動くとき、消失点の位置は、視点から画面までの距離とβにより決定されることがわかる。これはルネサンスの遠近法が平行線ごとに消失点をもつことを示しており、等比数列の結

果とは異なっている。

7. まとめ

等比数列による遠近法は、視点の高さが定まると必然的に等比数列の比が定まる。また、等比数列による遠近法とルネサンスの遠近法は以下の点で異なる。

1) 等比数列による遠近法を描く際必要となるものは、対象物の大きさ、視点の高さ(または等比数列の比)の二要素であるのに対し、ルネサンスの遠近法では、それらに加え、視点から画面までの距離を加えた三要素が必要となる。

2) ルネサンスの遠近法では、直線は画面上でも直線で表現され、平行線ごとに消失点をもつのに対し、等比数列による遠近法では、y 成分を持つもののうち y 方向に平行でない直線は、画面上では曲線になる。特に等比数列による遠近法は、原像の z 成分がある範囲内を動く場合、y 成分を持ついかなる線も画面上唯一つの消失点をもつ。ただしこの性質は等比数列による遠近法に限るものではない。

引用・参考文献

[1] 辻茂, 遠近法の前原理(1)—c戦分の逓減比を求めて—, 東京藝大学美術学部紀要, No. 31, pp.37–62 (1994).

[2] 三輪福松訳,レオン・バッティスタ・アルベルティ 絵画論, 中央公論美術出版 (1992).

[3] 小山清男 面出和子,造形の図学,日本出版サービス(1982).

[4] Martin, K., *The science of art*, Yale University Press (1990).

[5] 黒田正巳,空間を描く遠近法,彰国社(1992).

[6] キアーラ・フルゴーニ,ロレンツェッティ兄弟,東京書籍(1994).

[7] 裾分一弘,レオナルド・ダ・ヴィンチの「絵画論」攷,中央公論美術出版(1977).

[8] 辻茂,逆遠近法の原理,東京藝大学美術学部紀要, No.29, pp.1-23 (1994).

[9] 辻茂,遠近法の発見,現代企画室 (1996).

[10] 久木田知美,遠近法の逓減比によるデフォメーションについて,(2005).