コンピュータと教育 4－7
（1989．2．25）

問題学習に関する理論の妥当性とそのファジィ論的拡張

興梠 英二　秦 良一　矢鳴 虎夫

九州工業大学・情報科学センター

1）一般に練習問題の内容は教科書を構成する複数個の単元に渡って関係している．2）問題の難しさと理解度の積は学習量に比例する．3）難しさは理解度が上がるに従って減少する．ということを前提として，問題と単元との関連度を基本にした問題学習のための新しい学習理論を提案し，さらにこの理論はファジィ理論への拡張が可能であることを示した．そして，この理論の妥当性もしくは有効性を検証するために拡張する以前の理論において計算機シミュレーションを行い，これから得られる学習量，理解度，努力量などの定量的変化を，人間が一般にこれらの量に対して経験的に持っているものと対比しながら，この理論が問題学習に対する新理論としてかなり妥当性を持っていることを示唆する．

Propriety of the Theory Concerning the Study for Exercise Problems and it's Expansion

Eiji Kourogi , Ryouiti Hata and Torao Yanaru

Information Science Center, Kyushu Institute of Technology

Iizuka:kitakyusyu, Tobata: Fukuoka, ;Japan

A new problem-study-theory is proposed, which is based on the following three concept:
1)the inherent cross relationship between exercise problems and text-constructing units exists. 2)the product of the degree of difficulty and the degree of understanding is equal to the amount of study. 3)the degree of difficulty decreases step by step in the process of study. These three concepts which will be recognized as natural chracteristics for study are formulated. And the capability of expansion of this theory to fuzzy theory is shown. For the verification of the propriety and usefulness of this theory, the several computer simulations are carried out under the non-expansion(without fuzzy theory). As the results, we could find that the quantitative transition characteristics of the amount of study, of the degree of understanding and of the amount of effort in respect with study step are closely resembled to the empirical and qualitative characteristics for study of human. And we could suggest that this theory will be fairy propriety and useful as problem-study-theory.

1．まえがき

たいていの教科書や参考書の章末や項末には，演習問題といった種類のものが数題から十数題設けられている．しかし，これらの問題は提示されている単元の知識だけで解ける問題は少なくて，むしろ他の単元の知識がないと解けないのが普通である．問題によっては教科書以外の知識を前提としているものがある．問題を学習する以前に，その単元の内容は理解している必要があるので最初はこの理論を再学習理論と命名した．また，この理論は，各問題に単元との関連度を記述しておけば，必然的に各問題間の相関係数も導き出せるので，ＣＡＩの自動的問題の提示の方法としても有効である．なぜなら，一般に問題選択に関する構造を記述するのは煩わし仕事であるからである．この意味で既にＣＡＩの問題提示の自動化に関する方法の一つとして，この理論を適用してみた．

今回この理論にファジィ的な考えを導入し，さらに問題学習の一般理論（ファジィを用いない線形理論）として，いま一つは教科書の問題設計の基礎理論として役立つ可能性のあることを計算機シミュレーションを通して明らかにした．つまり，理論の中に出てくる難しさや理解度，学習量や努力量といったものが学習プロセスとともにどのように変化するかを定量的に示した．この結果から，人間の学習に関する定性的感覚は，物理法則さながらの理論展開によってかなりの程度分析できる可能性を示した．

本報告では，まず，ファジィを用いない一般理論から述べ，次にそれが，ファジィ的に拡張できることを示す．

2．理論

n個の単元によって構成される教科書を想定し，c個の問題 $\{P_k\}$ $k=1,2,\cdots,c$ が設けられているものとする．そして，これらの問題は単元 i と，関連度 $R_i(P_k)$ ($i=1,2,\cdots,n$ $k=1,2,\cdots c$) で結びついているものとする．ただし

$$\sum_{i=1}^{n} R_i(P_k)=1 \qquad (1)$$

($R_i(P_k)\geqq 0$ $i=1,2,\cdots,n$ $k=1,2,\cdots c$) である．学生は１セションの学習でm個の問題を学習するものとし，学習結果は担当教師に渡され採点されるものとする．以後 t 番目のセションを'学習ステップ t' ということにし，ある学生の t で学習するm個の問題を $\{P_1(t),P_2(t),\cdots,P_m(t)\}$ で記すことにする．また，単元 i のステップ t での難しさを $D_i(t)$ で記すことにする．$D_i(t)$ は t とともに１～０の範囲で変化するものとする．特に初期値 $D_i(0)$ はその学生の初期能力もしくは，前提知識に対応するもので，その単元 i に関する知識をもたないときは $D_i(0)=1$ にする．（これらの $P_r(t)D(t)$ といった量は，本来学生個人を識別するための添え字が必要であるが，この理論は一学生を対象としたものであるため，この添え字はいっさい省略する．）このとき問題 $P_r(t)$ のステップ t における難しさは，

$$D(P_r(t),t)=\sum_{i=1}^{n} D_i(t)R_i'(P_r(t)) \qquad (2)$$

で与えられる．ただし，R_i' は規格化関連度で次のように定義される．

$$R_i'(P_r(t))=R_i(P_r(t))/A_i\sum_k R_i(P_k) \qquad (3)$$

A_i：単元 i を完全に理解するのに必要な最小問題数の単元 i に関連する全問題数に対する割合．

$$0<A_i\leqq 1 \qquad (4)$$

$\Sigma R_i(P_k)$：単元 i に関連する全ての問題の関連度の和 (5)

この R_i' を設けた理由は，一般に教師はその単元に関連したすべての問題を与えなくても数問に対してある程度の得点をとれば，その単元は理解したと見なすのが普通である．このことを理論化するために A_i というパラメータを設けた．例えは，単元 i に関連する問題が全部で１０問 ($P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_{10}}$, $R(P_{i_1}),R(P_{i_2}),\cdots,R(P_{i_{10}})>0$) であって，$A_i=0.5$ と担当教師が指定した場合には，この１０問のうち５問満点とれはこの単元 i の理解度は完全と見なす．従ってステップ t の r 番目に提示される問題 $P_r(t)$ は，一般に学生が選択した単元群 $\{i_1,i_2,\cdots,i_g\}$ のうち最も容易な問題を提示するという一般的学習原理に従えば，

$$P_r(t)=P_k \mid \mathrm{mini}\ [D(P_k,t),P_k \in \{\mathrm{all}\ P_k \mid R_i(P_k)>0,\ i=i_1,i_2,\cdots,i_g\}] \qquad (6)$$

と定義できる．

次に理解度と難しさの関係について考える．ステップ t で学生に提示され，学習された問題群 $\{P_r(t), r=1,2,\cdots,m\}$ は担当教師（または採点機能をもつＣＡＩシステム）によって $\{M(P_r(t)), r=1,2,\cdots,m\}$ として評価される．この時これらの評価点はその問題に対するその学生の'理解度'と定義することができる．従ってステップ t でのm個の問題をといた時の単元 i に関する理解度の増分 $\Delta U_i(t,m)$ は，一度理解したことは忘れないという仮定と理解度の変化の範囲は０～１といっ仮定を設ければ，

$$\Delta U_i(t,m)=F\left(\sum_{r=1}^{m}\Delta U_i(P_r(t))\right) \qquad (7)$$

$$=F\left(\sum_{r=1}^{m}M(P_r(t))\cdot R_i'(P_r(t))\right) \qquad (8)$$

ただし
$$F(x)=\begin{cases}1: & x>1\\ x: & 0\leqq x\leqq 1\\ \text{不定義}: & x<0\end{cases}$$

で与えられる．一方，単元の理解度の増加にともなって，単元の難しさは次第に小さくなる，と考えるのは我々の人間のもっている常識的な感覚である．そのためこの性質を数式的に取り入れるため，各単元において1ステップ前の難しさを土台にして学習し，そして理解し，難しさの減少をきたすと考える．つまり

$$D_i(t-1)-D_i(t)=\alpha\Delta U_i(t,m)\cdot D_i(t-1) \quad (9)$$

（α：比例定数）

と定義する事ができる．

一方難しさや，理解度も0～1になるように規格化することにすれば，$0\leqq D_i(t)\leqq 1$，$0\leqq\Delta U_i\leqq 1$であるので$\alpha=1$となる．したがって，

$$D_i(t-1)-D_i(t)=\Delta U_i(t,m)\cdot D_i(t-1) \quad (10)$$

である．この式を書き換えれば

$$D_i(t)=D_i(t-1)\,(1-\Delta U_i(t,m)) \quad (11)$$

$$=D_i(0)\prod_{e=1}^{t}(1-\Delta U_i(e,m)) \quad (12)$$

となる．(11)式は内部状態$D_i(t-1)$ $i=1,2,\cdots,n$で（$1-\Delta U_i$）のオペレータによって遷移していくオートマトンである．また(12)式は難しさが次第に減衰していくことを示している．

次に学習量について考える．一般に問題が難しくなればなるほど，それを理解するのに必要な学習量は大きくなる．また，より一層高い理解度を得ようと思えば一層の学習量を必要とする，などの性質は認められる．つまり，学習量と理解度と難しさとは，電気工学における電圧Vと抵抗Rと電流Iの関係，$V=IR$，もしくは物理学における力fと質量mと加速度αとの関係$f=\alpha m$などのアナロジーとして認めることができる．したがって問題P_rをその時の難しさ$D(P_r,t-1)$で学習して得点$M(P_r)$を得るときの学習量$\Delta S(P_r)$は次の式で定義される．

$$\Delta S(P_r(t))=\beta\cdot D(P_r(t),t-1)\cdot M(P_r(t)) \quad (13)$$

（βは比例定数）

$$\Delta S(t,m)=\sum_{r=1}^{m}\Delta S(P_r(t)) \quad (14)$$

$$=\sum_{r=1}^{m}\beta\cdot D(P_r(t),t-1)\cdot M(P_r(t)) \quad (15)$$

(2)を代入すると，

$$\Delta S(t,m)=\sum_{r=1}^{m}\beta\sum_{i=1}^{n}D_i(t-1)R_i'(P_r(t))\cdot M(P_r(t)) \quad (16)$$

（8）式において$\sum_{r=1}^{m}R_i'(P_r(t))\cdot M(P_r(t))>1$になるような極めて特殊な場合（例えば1ステップだけで，教科書の全問題に挑戦し，全問満点をとるような場合）を除けば，(8)式は，

$$\Delta U_i(t,m)=\sum_{r=1}^{m}M(P_r(t))\cdot R_i'(P_r(t))$$

と書き換えられるので，(16)式は

$$\Delta S(t,m)=\sum_{i=1}^{n}\beta\cdot D_i(t-1)\Delta U_i(t,m) \quad (17)$$

さらにΔSを各単元に分配すると，

$$\Delta S(t,m)=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i(t,m) \quad (18)$$

と書けるので，(17),(18)式から

$$\Delta S_i(t,m)=\beta\cdot D_i(t-1)\Delta U_i(t,m) \quad (19)$$

ΔS_iの変化の範囲もD_iやΔU_iと同様に0～1と規格化すれば，$\beta=1$となって，

$$\Delta S_i(t,m)=D_i(t-1)\Delta U_i(t,m) \quad (20)$$

となる．つまり，単元ごとも学習量は理解度と難しさの積として成り立つことが示された．この式を(10)式に代入すれば，

$$\Delta S_i(t,m)=D_i(t-1)-D_i(t) \quad (21)$$

も成り立つ．したがって単元ごとのtステップまでの全学習量は

$$S_i(t,m)=\sum_{e=1}^{t}\Delta S_i(e,m) \quad (22)$$

$$=D_i(0)-D_i(t) \quad (23)$$

$$=D_i(0)-D_i(0)\prod_{e=1}^{t}(1-\Delta U_i(e,m)) \quad (24)$$

で与えられる．

また，$S_i(t,m)$の$t=t_{max}$（単元iに関連する問題の全てが学習されて提示する問題がなくなるまでのステップ）のとき最大値をもって単元iのm個／ステップ方式での学習容量S_{ic}ということにすれば，

$$S_{ic}=\max\{S_i(t,m)\}$$

$$=D_i(0)-D_i(0)\prod_{e=1}^{t_{max}}(1-\max(\Delta U_i(e,m)))$$

$$=D_i(0)-D_i(0)\prod_{e=1}^{t_{max}}\left\{1-\max\left(\sum_{r=1}^{m}F(M(P_r(e)))\cdot R_i'(Pr(e))\right)\right\}$$

$$=D_i(0)-D_i(0)\prod_{e=1}^{t_{max}}\left\{1-\sum_{r=1}^{m}F(R_i'(Pr(e)))\right\} \quad (25)$$

で与えられる．つまり，m個／ステップ方式での単元iでの学習容量は，問題の関連度の分布のみに依存して決められる．なぜなら各ステップtでの問題の選択は，常に満点としているので，一意に決定される．また$S_{ic}(m)$はmの値によって(3)式から

$$D_i(0)=S_{ic}(C)>S_{ic}(C-1)>\cdots>S_{ic}(1)$$

$$=D_i(0)-D_i(0)\prod_{e=1}^{t_{max}}\{1-F(R_i'(Pr(e)))\} \quad (26)$$

のような性質をもつことが言える．つまり，$S_i(C)$（1ステップで一挙に全問題を解くときの学習量）が最大で，$S_i(1)$（1ステップで1問を解くときの学習量）が最小となる．また，

$$S_c = \sum_{i=1}^{n} S_{ic}(C) = \sum_{i=1}^{n} D_i(0) \qquad (27)$$

を考えれば，$D_i(0)=1$ （$i=1,2,\cdots,n$）のとき，つまり

$$S_c = n \text{ (単元数)} \qquad (28)$$

をもって教科書の学習容量として定義する．さらに，個々の学生の努力量として学習容量に対してどれほど学習したかという尺度を与えれば，

$$E_i(t,m) = S_i(t,m) / S_{ic}(m) \qquad (29)$$

と定義することができる．

次に今までの学習単元に基づいた理論を単元に拡張すると，理解度，学習量などの一連の量を平均値として次のような式を導くことができる．

いま，学生が学習しようと選択する単元群を $G=\{i_1, i_2, \cdots, i_g\}$ とすると，

$$\Delta U_G(t,m) = \frac{1}{g}\sum_{j=1}^{g} \Delta U_{i_j}(t,m) \qquad (30)$$

$$U_G(t,m) = F\left(\sum_{e=1}^{t} \Delta U_G(e,m)\right) \qquad (31)$$

$$D_G(t) = \frac{1}{g}\sum_{j=1}^{g} D_{i_j}(t) \qquad (32)$$

$$\Delta S_G(t,m) = \frac{1}{g}\sum_{j=1}^{g} \Delta S_{i_j}(t,m) \qquad (33)$$

$$= D_G(t-1) - D_G(t) \qquad (34)$$

$$S_G(t,m) = \frac{1}{g}\sum_{j=1}^{g} S_{i_j}(e,m) \qquad (35)$$

$$= D_G(0) - D_G(t) \qquad (36)$$

$$S_{GC}(m) = \frac{1}{g}\sum_{j=1}^{g} S_{i_j}c(m) \qquad (37)$$

$$E_G(t,m) = \frac{1}{g}\sum_{j=1}^{g} E_{i_j}(t,m) \qquad (38)$$

一方(20)式から，

$$D_i(t-1) = \Delta S_i(t,m) / \Delta U_i(t,m) \qquad (39)$$

となるので，$D_i(t-1)$は学習効率を表わすことにもなっている．この考え方を拡張すれば，等価学習効率$D_{GEQ}(t,m)$を

$$D_{GEQ}(t,m) = S_G(t,m) / U_G(t,m) \qquad (40)$$

として定義できる．この$D_{GEQ}(t,m)$は，t=1で値１つを取り次第に減衰して必ず最小値を取りｔが増すにつれて必ず１に近づく性質をもつ．

３．ファジィ的学習理論

一般に，関連度表の$R_i(P_k)$を問題ごとにきめ細かく与えたり，学生の初期の難しさを理論的に決定するのは難しい．つまり，関連度で言うと，関連単元を見いだすのは簡単だが，どの程度の関連度かを理論的に与えることは難しい問題である．そこで今までに述べてきた理論に曖昧さという幅をもたせて，それにもとづくファジィ理論を導入し，ここで新たにファジィ的学習理論を定義する．

具体的に，上で述べた関連度と学生の初期の難しさをファジィのメンバーシップ関数であらわし，線形理論で述べた全ての演算をファジィの拡張原理を用いた演算で表わすものとする．ここで

$X = [-\infty, +\infty]$

とする．つまり関連度を

$$R_i(P_k) = \mu_{R_i(P_k)}(x) / x \qquad (41)$$

で表わし，難しさを

$$\mathbb{D}i(0) = \mu_{\mathbb{D}_i(0)}(x) / x \qquad (42)$$

で表わす．但し$x \in X$とする．

又，メンバーシップ関数の代表値として重心法を用いた関数を導入する．すなわち

$$G(A) = \frac{\sum_{x \in X} x\,\mu_A(x)}{\sum_{x \in X} \mu_A(x)} \qquad (43)$$

Ａ：ファジィ集合

この様に定義すれば，(1)式は次のように定義できる

$$\sum_{i=1}^{n} G(Ri(P_k)) = 1 \qquad (1')$$

こうして，いままで定義した(1)〜(40)式がすべてファジィ集合の演算として次々に再定義することができる．ファジィ演算としては次の二項演算の定義式に従うものとする．（"*"は演算子）

$$A1*A2 = H(\mu_{A1*A2}(x)/x) \qquad (44)$$

ここで$H(\mu_A(x)/x)$は全ての演算の範囲を０〜１としているので

$$H(\mu_A(x)/x) = \begin{cases} \mu_A(0) + \int_{-\infty}^{0} \mu_A(x)dx / 0 \; ; & x \leqq 0 \\ \mu_A(x)/x \; ; & 0 < x < 1 \\ \mu_A(1) + \int_{1}^{\infty} \mu_A(x)dx / 0 \; ; & x \geqq 1 \end{cases} \qquad (45)$$

という関数を導入する．さて，ここで$\mu_{A1*A2}(x)/x$の計算は拡張原理を用いた演算で，

一般に$X_1 = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$

$X_2 = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$

におけるファジィ集合をそれぞれ

$$A_1 = \mu A_1(u_1)/u_1 + \mu A_1(u_2)/u_2 + \cdots + \mu A_1(u_m)/u_m$$

$$A_2 = \mu A_2(u_1)/v_1 + \mu A_2(u_2)/v_2 + \cdots + \mu A_2(u_m)/v_n$$

とすると

$$\mu_{A1*A2}(x)/x = (\Sigma\,\mu A_1(u_i)/u_i) * (\Sigma\,\mu A_2(v_j)/v_j)$$

$$= \Sigma(\mu A_1(u_i) \wedge \mu A_2(v_j)) / (u_i * v_j) \qquad (46)$$

で計算できる．

４．計算機シミュレーションの方法と結果

ここでは，ファジィ理論を導入する以前での線形理論を用いて（２章までの理論），シミュレーションした結果を以下に示す．即ち関連度，難しさなどであは，一定の数値で示されるものとする．

4.1　関連度$R_i(P_k)$の表の作成

表１は単元数$n=10$，問題数$c=50$よりなる関連度表$R_i(P_k)$，$i=1,2,\cdots,10$　$k=1,2,\cdots,50$　の一例である．この表は次の関数に基づいて生成している．

$$f_i(P_k)=\dot{e}xp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(i-j)\}\{1+\eta(u-0.5)\}$$

$$R_i(P_k)=f_i(P_k)/\sum_{i=1}^{10}f_i(P_k)$$

ただし

$k=1,2,\cdots,5$　に対しては：$j=1$

$k=6,7,\cdots,10$ に対しては：$j=2$

$k=46,47,\cdots,50$　に対しては：$j=10$

$1\leqq|i-j|\leqq10$，$\sigma=1$，$\eta=0.5$

uは(0,1)一様乱数

実際の計算機シミュレーションではこの様な特徴のある表が単元数n，問題数c，分布の広がりσ，変動幅η，をパラメータにして，ただちに生成できる副プログラムとしている．

表１　関連度表 $R_i(P_k)$

Table 1　Table of the degree of relationship $R_i(P_k)$.

No. of	NUMBER OF UNITS i									
prob.P_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1:	.542	.361	.091	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2:	.562	.353	.079	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3:	.607	.307	.080	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4:	.471	.435	.086	.008	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5:	.613	.300	.081	.007	.000	.000	.000	.000	.000	.000
6:	.250	.459	.219	.066	.006	.000	.000	.000	.000	.000
7:	.327	.344	.278	.045	.006	.000	.000	.000	.000	.000
8:	.237	.356	.340	.061	.006	.000	.000	.000	.000	.000
9:	.306	.365	.273	.052	.004	.000	.000	.000	.000	.000
10:	.255	.461	.229	.049	.005	.000	.000	.000	.000	.000
11:	.054	.206	.424	.267	.044	.004	.000	.000	.000	.000
12:	.040	.210	.417	.279	.050	.003	.000	.000	.000	.000
13:	.065	.195	.373	.301	.061	.005	.000	.000	.000	.000
14:	.054	.239	.404	.248	.050	.004	.000	.000	.000	.000
15:	.057	.259	.353	.281	.045	.005	.000	.000	.000	.000
16:	.004	.046	.303	.372	.217	.052	.005	.000	.000	.000
17:	.006	.050	.224	.383	.254	.078	.005	.000	.000	.000
18:	.005	.061	.181	.444	.260	.046	.004	.000	.000	.000
19:	.005	.054	.194	.424	.277	.043	.004	.000	.000	.000
20:	.005	.043	.288	.381	.230	.049	.003	.000	.000	.000
21:	.000	.005	.055	.269	.363	.250	.051	.006	.000	.000
22:	.000	.005	.041	.208	.426	.263	.054	.003	.000	.000
23:	.000	.005	.047	.229	.438	.227	.050	.004	.000	.000
24:	.000	.005	.048	.261	.455	.184	.042	.004	.000	.000
25:	.000	.006	.049	.215	.424	.238	.063	.005	.000	.000
26:	.000	.000	.005	.062	.226	.464	.193	.044	.005	.000
27:	.000	.000	.005	.068	.270	.338	.266	.049	.004	.000
28:	.000	.000	.005	.057	.238	.384	.248	.063	.005	.000
29:	.000	.000	.004	.057	.246	.388	.236	.064	.005	.000
30:	.000	.000	.005	.061	.225	.382	.268	.054	.005	.000
31:	.000	.000	.000	.005	.042	.258	.434	.214	.042	.004
32:	.000	.000	.000	.004	.065	.241	.380	.265	.041	.004
33:	.000	.000	.000	.005	.042	.194	.464	.241	.049	.004
34:	.000	.000	.000	.004	.065	.302	.363	.213	.047	.005
35:	.000	.000	.000	.005	.058	.215	.414	.266	.040	.004
36:	.000	.000	.000	.000	.005	.045	.236	.427	.246	.042
37:	.000	.000	.000	.000	.006	.056	.294	.392	.202	.050
38:	.000	.000	.000	.000	.004	.056	.241	.426	.209	.065
39:	.000	.000	.000	.000	.005	.055	.254	.391	.256	.040
40:	.000	.000	.000	.000	.004	.052	.292	.369	.229	.053
41:	.000	.000	.000	.000	.000	.007	.072	.270	.394	.257
42:	.000	.000	.000	.000	.000	.004	.058	.265	.398	.275
43:	.000	.000	.000	.000	.000	.004	.048	.254	.464	.229
44:	.000	.000	.000	.000	.000	.005	.076	.281	.410	.228
45:	.000	.000	.000	.000	.000	.005	.059	.245	.397	.293
46:	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.007	.075	.313	.605
47:	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.007	.079	.301	.613
48:	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.005	.086	.334	.575
49:	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.004	.077	.315	.603
50:	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.006	.068	.347	.579

4.2　得点の生成

学生はステップごとにm個の問題を解答し担当教師に提出する．その得点系列に関するものを次のようにしてシミュレーションする．

（１）ステップごとに１点満点による平均点（例えば mean=0.8）を指定する．

（２）標準偏差dev.（例えば，dev.=0.2）を指定して，その平均値まわりの正規乱数をm個発生させ，そのm個の値をもってステップでの学生の得点とする．

4.3　シミュレーションの結果

（１）関連度の広がりと学習量（全単元を対象）

図２は全ての単元に対して$A_i=0.5$，$D_i(0)=1.0$，$m=5$(５問/ステップ)にして，全問満点である場合の理解度U_Gと学習量S_Gを調べたものである．より広く単元に関連した問題系（$\sigma=1.6$)を学習した方が，関連度の広がりの少ない系（$\sigma=0.3$ とき)での学習よりも$U_G(t)$の立ち上がりは速い，しかし学習量$S_G(t)$は多く必要となる．一方 $\sigma=1$の場合を見ると$U_G(t)$の立ち上がりは　$\sigma=1.6$ とほとんど変わらず，しかも$S_G(t)$ がかなり少なくてすむことが分かる．つまり，むやみに関連度の広がりが多くても少なすぎても学習効率が悪いことがわかる．$\sigma=1$（実効関連度が3単元程度）を持った問題系が適当であることが予想できる．この性質は図３の等価学習効率$D_{GEQ}(t,5)=S_G(t,5)/U_G(t,5)$ によって一層はっきりわかる．

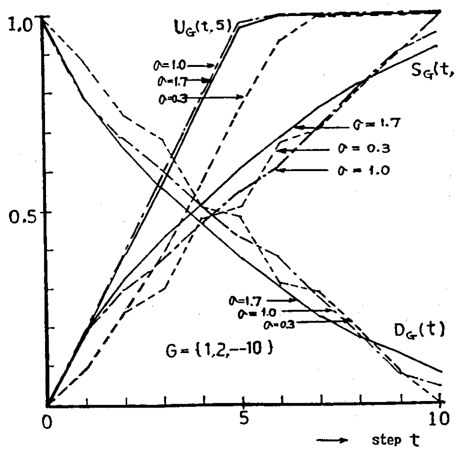

図２　関連度の分布（広がりの標準偏差：σ）と理解度，学習量，難しさの特性（全単元学習）

Fig. 2　The distribution of the degree of relationship, and the characteristics of the degree of understanding, of the amount of study and of the degree of difficulty (full study of all units).

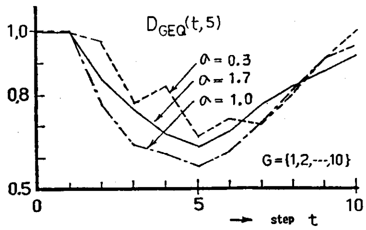

図 3　関連度分布と等価学習効率の特性
Fig. 3 The characteristics of the distribution of the degree of relationship and the equivalent efficiency of study.

(2) 解答のばらつきに関する学習量の差（全単元対象）

図4は1つの問題系列に対して，平均値は等しいがばらつきの異なる2通りの得点系列について調べたものである．つまり，2人の学生を想定し，一人は平均点 mean=0.8 標準偏差 dev.=0.1，いま一人は平均点 mean=0.8 標準偏差 dev.=0.3，のとき，それぞれの学習量などのステップの特性を調べたものである．理解度については大した差異はないが，バラツキの大きい方が学習量としては小さく（とくに t>5 ）評価されることがわかる．このような性質は人間の定性的感覚とよく一致するように思われる．

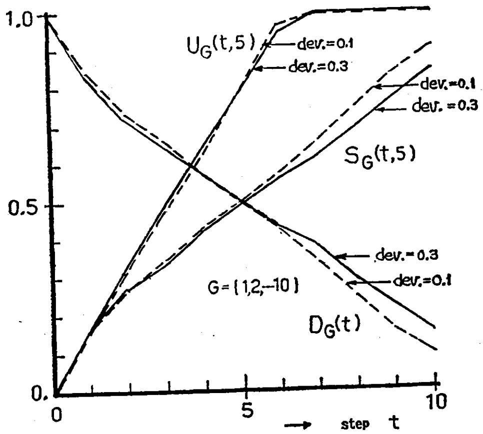

図 4　得点のばらつき (dev.) による影響（全単元学習）
Fig. 4 The effect of the variance of marked points (full study of all units).

(3) m問／ステップと学習容量

図5および図6はG＝{5,6}の２つの単元に関してすべて満点を取った時の平均学習量がmのあたいによってどのように変化するかを調べたものである．問題 50 問をすべて満点取るにしても，学習容量は1 問/ステップの仕方で解くのが最も少なくて，50 問/ステップの仕方が最も大きくなる．この性質は人間が肉体的仕事をする場合に，同じ仕事でも一度に行う方が，ゆっくり行うよりも後での疲れが一般に大きいのと似ている．

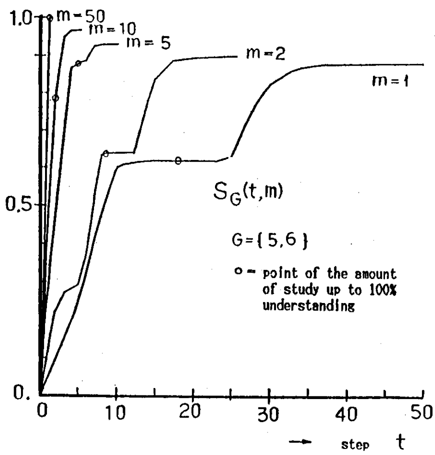

図 5　問題数/ステップ(m) の学習量に及ぼす影響（部分学習：単元 5,6)
Fig. 5 The effect for the amount study by the number of problems per step (part study of group units {5,6}).

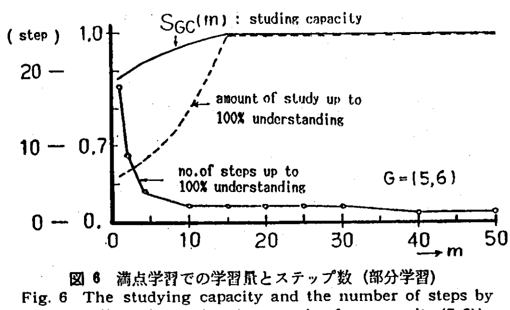

図 6　満点学習での学習量とステップ数（部分学習）
Fig. 6 The studying capacity and the number of steps by full marked points (part study of group units {5,6}).

(4) 得点と100%理解到達までのステップ数

図7は単元群G＝{5,6}における部分学習でぜんステップの得点系列が，v=1.0一定値，v=0.8一定値，v=0.6一定値の3つの場合について，理解度と学習量の特性について調べたものである．v=0.6 の得点系列では 100% 理解に 8 ステップを要するのがわかる．

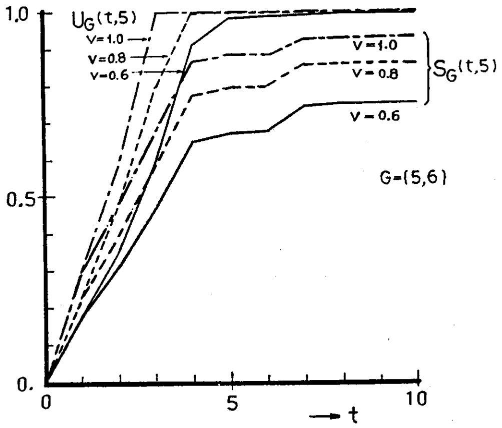

図7 得点（v）と $S_G(t,5)$, $U_G(t,5)$（v の値は全問一定）

Fig. 7 The marked points (v) and $S_G(t,5)$, $U_G(t,5)$ (the values of v are all constant).

(5) 努力量と学習量の違い

図8は単元群G＝{5,6}の問題系列を，初期の難しさが異なる二人の学生を想定して，二つの得点系列を調べたものである．一つは初期難しさを $D_i(0)=1.0(i=1,2,\cdots10)$にし，今一つは$D_i(0)=0.5(i=1,2,\cdots10)$にした場合の$E_G(t,5)$の変化を調べている．得点系列はいずれも平均点mean=0.8 標準偏差dev.=0.3である．同じような得点系列でも 100%理解までに要するステップ数や学習量が大いに異なって評価されるのがわかる．また $D_i(0)=0.5$の場合の $E_G(t,5)$は$D_i(0)=1.0$のときの $E_G(t,5)$ より小さく評価される．

逆に，$D_i(0)=1.0$ の場合の理解度や努力量の得点系列と同じ程度に$D_i(0)=0.5$ の場合の得点系列が評価されるためには，もっと高い得点系列（平均点 0.9 程度）を必要とすることが容易に予測できる．

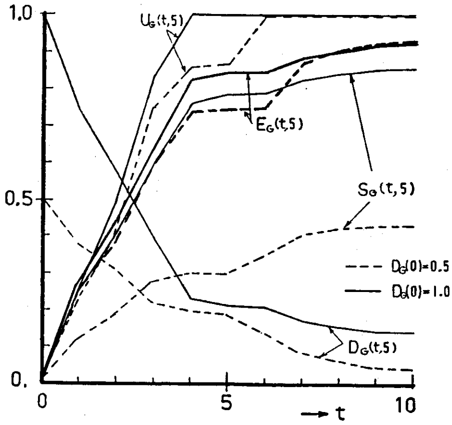

図8 難しさの初期値 $D_G(0)$ の違いと努力量 $E_G(t,5)$
$G=\{5,6\}$（得点：平均=0.8 dev.=0.3）

Fig. 8 The difference of the initial degree of difficulty $D_G(0)$ and the amount of effort $E_G(t,5)$.

5．むすび

4章で示したシミュレーションの実験から次のことが結論される．

(1) シミュレーション実験で得た結果のほとんどは人間が平素から学習感覚としてもっている定性的な特徴を定量的に表現した例と考えることができる．

(2) 学習量は物理世界でのエネルギー消費量と対比して考えることができる．さらに学習密度は1ステップでの学習量として考えられ，学習スピードはステップ内で学習した問題数と考えられる．

(3) 難しさは一般に学習の進展とともに減衰していく．しかし初期値$D_i(0)$はその単元iに対して学習以前に有している知識や能力に相当するもので，この値の設定は担当教師が行なわなければならない．その意味で，この$D_i(0)$を学生各個人ごとに見いだすのは難しいので，なんらかの事前テストでだいたいの値を決めるとか，場合によってはＩＱ等の値を適用するのもよいであろう．

また，3章で示したファジィ理論への拡張においても上で述べたことと同じ様なことが言えると予想できる．今後は，ファジィのメンバーシップ関数に種々の関数を与えることなどにより，上で述べた様々な量の変化を定量的に検討することによって，この理論の妥当性を再検討する予定である．

参考文献

（１）Nakayama,Nakayama,Fukagwa,Yanaru:
A Methodology for Automatic Presentation of
Exercise Problems Based on Related Text-cons
tructing Units,
IEEE Trans.on Educ.(1987)

（２）矢鳴，中村，中山：
問題学習に関する新しい理論の試みとその妥当性
情報処理学会(1988)