コンピュータと教育 4－6
(1989. 2. 25)

高専におけるコンピューターを用いた二変数関数の指導について

緒方 優，肥後 昭治

都城工業高等専門学校

後期中等教育段階にある高専3年生への二変数関数の指導には多くの問題点が含まれている。これらの問題点を解決するため、いろいろな研究報告がなされている。最近、高専でも学生用の16ビット・コンピューター等の教育機器の整備が進み、新しい授業形態が試行されつつある。本稿では、二変数関数の指導について従来の授業の中にコンピューターおよびプロジェクター等の教育機器を導入し、総合的な指導方法を考える。そして、この指導方法を分析し、今後の授業へのコンピューター導入のあり方を考察する。

ON TEACHING THE FUNCTION WITH TWO VARIABLES WITH THE COMPUTER FOR THE STUDENT OF THE GENERAL EDUCATION COURSE OF THE NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY

Masaru OGATA and Syouji HIGO

Miyakonojo National College of Technology

473-1, Yoshio-cho ,Miyakonojo-shi, Miyazaki, 885, JAPAN

We propose the following teaching method. :
(1).First, we give a usuall lecture in the function with two variables from the analytical standpoint for the whole class.
(2).Second,We make the student analyze of the function with two variables from the geometrical standpoint with the computer.
(3).Last ,We teach the summary of this lecture and the applied question of the function with two variables for the whole class with the projector-connected computer.
Then we require the highly efficient computer to adopt this teaching method. And we experimented with this teaching method in the 3 classes in our college so that we might research the educational effect of it.
And we analyzed the merit and the demerit about this teaching method with the result of this experimentation and the questionnaires concerning the student. We report the result of these analysises.

1．はじめに

二変数関数も一変数関数と同様に解析的な考察に終わらないで、図形的概念を導入し総合的な観点に立って教育されるべきものであるが、一般には解析的な考察だけで終わることが多い。
特に、後期中等教育段階にある高専3年生に対する二変数関数の指導は解析的指導（静止的な指導）のほかにコンピューター等の持つ動的な面を応用して幾何学的把握が出来るような指導の必要性を感じる。最近、本校でも学生用16ビット・コンピューターが整備されつつあり、従来の授業で指導出来なかった二変数関数の幾何学的指導が出来るようになった。
ここでは、これからの二変数関数の指導のあり方を考察する意味で、実験的に従来の授業方法（プリント等を用いた講義、演習中心）による指導（静止的な指導）の中にコンピューターおよびプロジェクターを導入した指導（動的な指導）を行い、それらの教育効果をアンケート調査し、比較分析してみたのでこれを報告する。

2．研究方法

この調査研究は昭和63年10月に都城高専のＭ（機械工学）科、Ｃ（工業化学）科 およびＡ（建築学）科の３年生の３クラス(118名)を対象に実施したものである。研究は一変数関数の微分積分が終わり、二変数関数の指導に入った段階で行い、授業時数は10時間（50分授業で2時間連続）を充てた。教科書は「微分と積分２」（大日本図書）を使用したが、授業は主としてプリントで行い、従来の授業法にコンピューターおよびプロジェクターを導入した授業を行い授業効果を調査する。各授業終了後、アンケート調査を行い、コンピューター導入前と導入後による学生の授業への取り組み方を調べ指導効果を分析する。

3．指導方法と指導の順序

3.1．従来の指導法による二変数関数の基本性質の指導

指導案１を用いて二変数関数の定義、極限、連続性及び簡単なグラフを一変数関数の基本的な性質と対応させながら、従来の指導で行う。

3.2．コンピューター・グラフィク観察による幾何学的指導

＊コンピューターはユニバック・の端末機(UP10)12台とNEC.PC.9801機6台を使用する。
コンピューター教育に対する機械一台当りの学生の適切な人的配置を調査するため、コンピューター一台につき複数（１名から３名）の学生を充てる。

(A).観察する二変数関数
(1).$z=x^2+y^2$,　,　(2).$z=-x-y+1$
(3).$z=sqr(4-x^2)$,　(4). $z=sqr(x^2+y^2)$,
(5).$z=exp(x).cos3y$,　(6).$z=2x^3-3x^2y+y^3$
(7).$z=(x^2y)/(x^2+y^2)$,(8).$z=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$

(B).コンピューターにグラフを描かせる手順の指導。
(C).コンピューターのグラフの描き方の説明。

(D).観察方法
はじめに、(A)の二変数関数の中から比較的理解し易い関数を選びその関数のグラフを全員にコンピューターを操作させて描かせる。その際、曲面が一変数関数のグラフを基に描かれて行く過程を良く観察させる。
それから、例題等の関数のグラフを観察させ、それらを用いて従来の授業法で直観的に理解させにくかった極限、や連続性を把握させる。

(E).偏導関数の指導
コンピューター・グラフィクの観察後、指導案２により曲面のハード・コピーを用いて偏微分係数の幾何学的指導を行う。

3.3.プロジェクターによる接平面、極値の指導と授業のまとめ

偏導関数の応用では接平面、二変数関数の極値問題を講義で指導したあと、問題演習をプロジェクターを用いて具体的な関数の曲面と対応させながら指導し、授業のまとめを行う。（接平面、極値の指導案３は省略した。）
＊プロジェクター（ソニー）にはNEC.PC.9801機を連結して使用した。

3.4．作成したプリント．（指導案１）

3.4.1.二変数関数の定義

変数 x,y について、１つの実数xの値に対して、ただ１つの実数yの値が定まるとき、yをxの関数といい、関数記号
$y=f(x)$または　$f:x \to y$ などで表す。xを独立変数、yを従属変数という。また、関数$y=f(x)$が定義される変数ｘの範囲を定義域、そのときｙの取り得る範囲を値域という。たとえば、$y=x^2$ の定義域は実数全体であり値域は0以上の実数である。
問１．次の関数の定義域と値域を調べよ。
(1).$y=2x+1$, (2).$y=x/(x-1)$,　(3).$y=sqr(x-1)$

この考えを二変数関数に拡張する。変数x,y,zについて、実数x,yに対してただ１つの実数zの値が対応するとき、zをx,yの二変数関数といい、関数記号
$z=f(x,y)$　または　$f:(x,y) \dashrightarrow z$　などで表す。
x,y を独立変数、z を従属変数という。そして、
$(x,y)=(a,b)$ のとき z の値を $z= f(a,b)$ で表す。
たとえば、$z= f(x,y)= x^2+y^2-2$ のとき
$f(1,-2)= 1^2+(-2)^2-2 =3$

いま、三次元空間に座標系0-xyz が与えられているとき、関数 $z= f(x,y)$ は xy平面上の点(x,y) に対応して z の値が定まると考え、zを点(x,y)の関数ということが多い。

また、関数 $z=f(x,y)$ が定義されている xy 平面の点 (x,y) の集合を定義域といい、Dで表す。点 (x,y) が定義域 D のすべての点を動くとき、z のとる値の範囲を値域という。

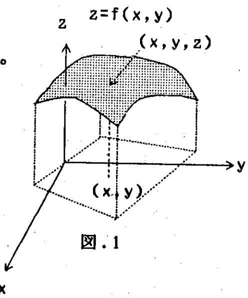

図.1

問２．次の関数の定義域と値域を調べよ。

(1). $z=-x-y-1$,

(2). $z=sqr(a^2-x^2-y^2)$, $(a>0)$

3.4.2.二変数関数のグラフ

一変数関数 $y=f(x)$ のグラフは定義域の各xの値に対応するxy-平面の点 (x,y) の作る図形のことであり、平面における直線または曲線を表す。

二変数関数 $z=f(x,y)$ のグラフは定義域D上の点 (x,y) に対応する空間の点 (x,y,z) 全体の作る図形のことであり、空間における平面または曲面を表す。

例題１．次の関数のグラフをかけ。

(1). $z=sqr(4-x^2)$,　(2). $z=sqr(x^2+y^2)$

解．(1).定義域は $4-x^2\geq 0$ より $-2\leq x\leq 2$, 値域は $0\leq z\leq 2$ である。両辺を2乗して整理すると $x^2+z^2=4$, これはxz-平面で原点を中心とする半径2 の円である。yは任意であるから図２のような曲面になる。

(2).定義域は $x^2+y^2\geq 0$ より実数全体、値域は $z\geq 0$ である。 xz-平面との交線は $y=0$ として $z=abs(x)$, yz-平面との交線は $x=0$ として $z=abs(y)$, また、平面 $z=r$ $(r>0)$ との交線は $x^2+y^2=r^2$ となり、点 $(0,0,r)$ を中心とする半径rの円である。よって,グラフは図３のような円錐面になる。

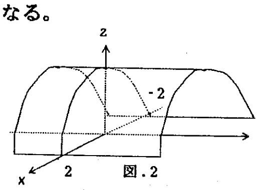

図.2

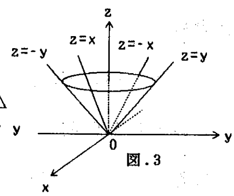

図.3

例題１のように、３つの座標平面等の交線を考えグラフの概形を描ける簡単な二変数関数もあるが、一般に、二変数関数のグラフの多くは簡単には描けない。

そのような場合はコンピューターを利用する。

問３．(a)... $z = 2x^3-3x^2y+y^3$ のグラフがどのような曲面になるか調べるため、(a)の曲面を $x=-1$, $x=0$ および $x=1$ の平面で切る。その切り口関数はそれぞれ下記の(1),(2),(3)となる。これらのグラフをそれぞれを下記の座標軸の正方形領域 $D=\{(x,y):-2\leq x\leq 2,-2\leq y\leq 2\}$ に書き込め。

(1). $z = y^3-3y-2$

(2). $z = y^3$

(3). $z = y^3-3y+2$

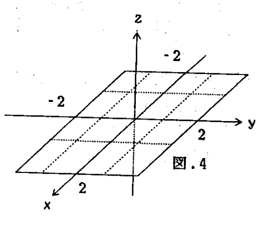

図.4

3.4.3.二変数関数の極限と連続

関数 $f(x)$ について、変数xがaに限りなく近づくとき、近づく方向に関係なく関数 $f(x)$ の値が一定値bに限りなく近づくならば、bを $f(x)$ の極限値といい、次のように表す。

$x \to a$ のとき $f(x)\to b$、または

$\lim_{x\to a} f(x)=b$

このことは,xがaより大きい方から近づく場合と、aより小さい方から近づく場合の2通りあり、前者を $x\to a+0$,後者を $x\to a-0$ で表し、

$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=b$ が成立するとき

$\lim_{x\to a} f(x)$ は存在する。そうでないときは存在しないという意味である。

例題２．$x \to 1$のとき、次の関数の極限値を求めよ。

また、それをグラフを用いて説明せよ。

(1). $f(x)= \{ 1\ (x>1),\ -1\ (x<1)$

(2). $(x^2-1)/(x^2+1)$

［自己記入　　以下余白］

関数 $f(x)$ の定義域内の点 $x=a$ において

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

が成立するとき $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

また、$f(x)$ がある区間I のすべての点で連続のとき、$f(x)$ は区間Iで連続であるという。つまり、区間Iで $f(x)$ が連続であるとはその区間で $y=f(x)$ のグラフに切れ目がないということである。

問４：例題２の関数の $x=1$ での連続性を確かめよ。

次に、二変数関数 $z=f(x,y)$ において、点 (x,y) が点 (a,b) に限りなく近づくとき、近づく方向に無関係に関数 $f(x,y)$ の値が一定値dに限りなく近づくならば、dを $f(x,y)$ の極限値または極限といい、次のように表す。

$(x,y)\to(a,b)$ のとき $f(x,y)\to d$,または

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=d$

このことは、点 (x,y) が点 (a,b) に近づく方向は無限にあるが、その近づく方向に無関係に $f(x,y)$ の値が一定値dに近づくという意味である。

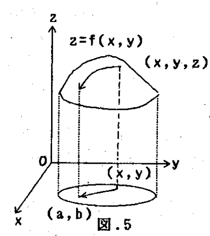

図.5

例題３．次の極限値を求めよ。

(1). $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2y)/(x^2+y^2)$,

(2). $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2-y^2)/(x^2+y^2)$

解：(1). $x=r.\cos t$, $y=r.\sin t$ とおくと、

$(x,y)\to(a,b)$ と $r\to 0$ は同値であり、

$(x^2y)/(x^2+y^2)= r.\cos^2t.\sin t \to 0, (r\to 0)$

ゆえに、 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2y)/(x^2+y^2)=0$

(2). $(x^2-y^2)/(x^2+y^2)=\cos^2t - \sin^2t =\cos 2t$

$(x,y)\to(0,0)$ のとき、角ｔの取り方によって、(2)は-1と1の間のいろいろな値を取る。よって、$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ は存在しない。

関数$f(x,y)$の定義域D内の点(a,b)において、

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$

がなりたつとき、$f(x,y)$は点(a,b)で連続であるという。また、関数$f(x,y)$がある領域内のすべての点で連続のとき、$f(x,y)$はこの領域で連続であるという。

例題4．次の関数の点$(x,y)=(0,0)$における連続性を調べよ。

(1).$f(x,y)= \begin{cases} (x^2y)/(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(2).$f(x,y)= \begin{cases} (x^2-y^2)/(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

［自己記入：以下余白］

指導案2．

3.4.4.二変数関数の偏導関数

関数$y=f(x)$において：
$\lim_{h\to a}(f(a+h)-f(a))/h$
が存在するとき、それを$f'(a)$で表し、関数$f(x)$の$x=a$における微分係数という。また、このとき、$f(x)$は$x=a$で微分可能であるという。この幾何学的意味は$x=a$ に対応する曲線上の点$A(a,f(a))$における接線ATの傾きを表す。

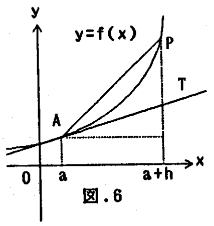

図.6

さらに、ある区間Iのxに微分係数を対応させることによって定まる関数$f'(x)$を導関数という。定義式は次のようになる。

$f'(x)=\lim_{h\to 0}(f(x+h)-f(x))/h$

問5．$f(x)=x^3+x$ の導関数$f'(x)$を定義により求めよ。

次に、関数$z=f(x,y)$ において、y に一定な値bを与え、これを固定すれば一変数関数$z=f(x,b)$が得られる。この関数の$x=a$における微分係数

$\lim_{h\to 0}(f(a+h,b)-f(a,b))/h$

が存在するとき、それを記号 $f_x(a,b)$で表し、$f(x,y)$の点(a,b)におけるxについての偏微分係数という。また、このとき、$f(x,y)$は点(a,b)において、xについて偏微分可能であるという。$f_x(a,b)$の幾何学的意味は、曲面$z=f(x,y)$を平面$y=b$で切ったときの切口の曲線をmとするとき、m上の$x=a$に対応する点 $A(a,b,f(a,b))$におけるmの接線ATの傾きを表す。

同様に、点(a,b)におけるyについての偏微分係数 $f_y(a,b)=\lim_{k\to 0}(f(a,b+k)-f(a,b))/k$ および偏微分可能性等についても考えることが出来る。

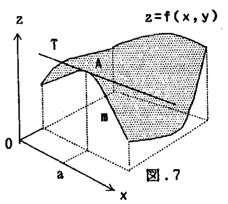

図.7

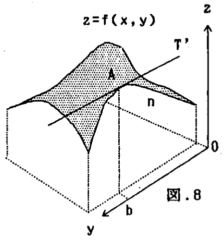

図.8

関数$z=f(x,y)$ の定義域D内のすべての点でxについて偏微分可能なとき、$f(x,y)$はDでxについて偏微分可能であるという。このとき、Dの各点(x,y)にそこでのxについての偏微分係数を対応させることによって定まる関数を$f(x,y)$のxについての偏導関数といい、$f_x(x,y)$, z_x等で表す。定義式は次のようになる。

$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}(f(x+h,y)-f(x,y))/h$

$z=f(x,y)$のyについての偏導関数$f_y(x,y)$についても同様に定義され、次のようになる。

$f_y(x,y)=\lim_{k\to 0}(f(x,y+k)-f(x,y))/k$

偏導関数$f_x(x,y)$および$f_y(x,y)$を求めることを$z=f(x,y)$を偏微分するという。

問6．$z=f(x,y)$の$f_x(x,y)$および$f_y(x,y)$を具体的に求める方法を記述せよ。

［自己記入：以下余白］

例題5．$f(x,y)=x^2-3xy^2+y^3$を偏微分し、点$(2,1)$における偏微分係数を求めよ。

解．$f_x(x,y)=2x-3y^2$,　$_y(x,y)=-6xy+3y^2$

点$(2,1)$における偏微分係数は$x=2,y=1$を代入して

$f_x(2,1)=1$, $f_y(2,1)=-9$

問7．$z=sqr(x^2+y^2)$の点$(4/5,3/5)$における偏微分係数を求め、その幾何学的意味を図9で説明せよ。

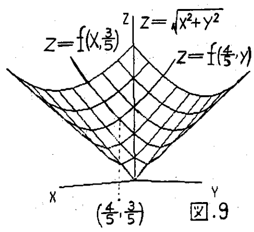

図.9

4．考察

4.1 アンケート調査集計

4.1.1 従来の指導後について

[1].関数 $y=f(x)$ の性質（極限、連続性、極値）を調べる問題等をどのように解決しますか？

(1).グラフなど考えず、問題の解決に当たる。	.... 38%
(2).まず、グラフを描いてから問題の解決に当たる。	 34
(3).わからない。(該当項目がない)	 15
(4).グラフに興味があるが、実際にはグラフは描かない。	 13

[2].関数 $y= f(x)$の極限や連続性を定義に従って求めたり、調べたり出来ますか？

(1).教科書をみれば出来る。	....75%
(2).出来ない。	14
(3).わからない。	 6
(4).はい。	 5

[3].関数 y= f(x)の極限や連続性をグラフを用いて説明出来ますか？

(1).大体できる。 44%
(2).できない。 25
(3).わからない（該当項目がない）。.. 16
(4).できる。 15

[4].関数 y= f(x) のグラフを微分を応用して描くことが出来ますか？

(1).難しい問題は教科書等を見ればできる。 62%
(2).教科書等を見ないで出来る。 23
(3).何ともいえない。（該当項目がない） 9
(4).教科書を見てもできない。 6

[5].二変数関数の極限や連続性を定義に従って求めたり、調べたりすることができますか？

(1).問題によっては本を見てもできない。 38%
(2).本を見れば出来る。 23
(3).できない。 21
(4).何ともいえない。（該当項目がない） 15
(5).できる。 3

[6].二変数関数の極限や連続性について、一変数関数のようにグラフを用いて説明ができますか？

(1).ややこしくて全然できない。 56%
(2).大体できる。 25
(3).何ともいえない（該当項目なし）。.. 16
(4).一変数関数と同じようにできる。.... 3

[7].関数 $z = 2x^3-3x^2y+y^3$ のグラフを平面x=-1,x=0およびx=1で切った切り口関数：
(a). $z = y^3-3y-2$, (b). $z = y^3$,
(c). $z = y^3-3y+2$ のグラフを三次元座標軸上の領域に描きましたが、それから二変数関数のグラフの概形を想像出来ましたか？

(1). (a),(b),(c)のグラフは描けたが曲面の概形は想像出来なかった。 59%
(2).(a),(b),(c)のグラフを描けなかったので 、曲面は想像できなかった。 22
(3).もう少し、xの値を与えれば曲面の概形を想像できたかもしれない。 13
(4).できた。 6

[8].三次元空間（xyz-座標）に z=f(x,y) のグラフを描くことは大変ですが、もし z=f(x,y) のグラフを三次元空間（xyz-座標）に描くことが出来れば、授業が面白くなると思いますか？

(1).はい。 55%
(2).わからない（該当項目がない） 30
(3).いいえ。 15

4.1.2 コンピューター導入後について

[1].コンピューターで二変数関数 $z = 2x^3-3x^2y+y^3$ の x に適当な値を与えて、一変数関数のグラフとして三次元座標軸に描きましたが、それによって想像した曲面とコンピューターで見た曲面と比較してどうですか？

(1).想像もしないものであった。 68%
(2).わからない。 28
(3).大体一致した。 4
(4).完全に一致した。 0

[2].コンピューターによる二変数関数の曲面の観察後、偏導関数を学びましたが、先生の図形的説明などが理解出来ましたか？

(1).大体理解出来た。 51%
(2).何ともいえない（該当項目がない）.. 21
(3).いいえ。 20
(4).はい。 8

[3].曲面の切り口関数が一変数関数になっていることが理解出来ましたか？

(1).はい。 53%
(2).何ともいえない。 35
(3).いいえ。 12

[4].二変数関数の極値問題は理解出来ましたか？

(1).大体理解できた。 38%
(2).いいえ。 26
(3).はい。 20
(4).何ともいえない。 16

[5].極値問題の解法後、プロジェクターを用いて二変数関数のグラフを見ながら極値の指導を受けましたがこのような授業はどの様に思いますか？

(1).大変興味がある。 80%
(3).何ともいえない。 17
(4).いちいちグラフを見る必要はない。.. 3
(5).従来のように自分でイメージする授業の方がよい。 ... 0

[6].前問[5]で「(1).大変興味がある。」と答えた人にその理由は、

(1).このような授業は問題を解くとき張合いがある。 44%
(2).自分で極値問題の解法後、グラフを想像したものと一致するかどうかが楽しみである。 36
(3).ただ何となく（該当項目なし） 20

4.1.3　授業効果について

[1].コンピューターやプロジェクター・グラフィクを見て、授業に興味がでましたか？

(1).はい。 65%
(2).何ともいえない。 21
(3).いいえ。 14

[2].コンピューター・グラフィクの観察を導入した授業についてどのように思いますか？

(1).曲面のイメージがはっきりして授業中の説明が良く分かる。 44%
(2).興味はあるがもう少し工夫が欲しい。 32
(3).グラフを見てから自分で良く考えるようになった。 14
(4).何も変化を感じない。 7
(5).わからない（該当項目がない） 3

[3].授業で配布されるプリント（曲面のハード・コピー）のグラフとコンピューターで見た曲面のグラフについてどのように思いますか？

(1).コンピューターではグラフを描いて行く過程を観察することが出来るので、プリントの曲面のグラフとは大きな違いがある。 81%
(2).プリントや教科書のグラフよりコンピュータ ー・グラフィクの方が立体的に曲面を観察出来るが、それを描く過程はいらない。 13
(3).わからない（該当項目がない）。.... 6
(4).プリントや教科書の曲面のグラフで十分理解出来る。 0

[4].コンピューター・グラフィクをどのように観察しましたか？

(1).コンピューターが曲面のグラフを描く過程を注意深く観察した。 45%
(2).グラフの完成までボンヤリ見ていた。 31
(3).曲面の形状を想像しながら完成を待っていた。 17
(4).どのように観察したか思い出せない。 7

[5].今後のことを含めて、授業のあり方について

(1).従来の授業法だけでなく、実験的な授業や興味ある授業をして欲しい。 69%
(2).論理的な数学でなく、自分の専門に必要な数学を中心に教えてほしい。 25
(3).分からない（該当項目がない）。.... 4
(4).従来どうりの授業でよい。 2

4.1.4　コンピューター一台当りに対して、学生の適切な人数配置について

[1].あなたはコンピューターを操作出来ますか？

(1).すこしできる。 45%
(2).はい。 40
(3).いいえ。 15

[2].今回はコンピューターの台数の関係で、１台を２、３名で利用しましたが、何名位で１台を利用するのが良いと思いますか？

(1).２人 57%
(2).１人 26
(3).３人 16
(4).わからない 1
(5).４人以上 0

[3].前問[2]で「１人」と答えた人に、その理由は

(1).じっくり自分で観察したい。 58%
(2).自分で機械を操作するのが好きであるから。 ... 16
(3).他の人がいると気が散って、よく観察出来ない。.... 10
(3).気の合う人であれば２人でもよい。.. 10
(5).別に理由はない。 6

[4].前問[2]で「２人」と答えた人に、その理由は

(1).分からないとき、尋ねることが出来るから。 46%
(2).2人でコンピューターを見ながら、話し合ったり、分析できるから。 42
(3).１人では不安であるから。 5
(3).別に理由はない。 5
(5).機械を操作出来ないから 2

[5].前問[2]で「３人または４人以上」と答えた人に、その理由は

(1).なるだけ多くの人と議論したり、分析しながら観察したい。 43%
(2).別に理由はない。 37
(3).分からないとき、誰かに頼れる。.... 10
(3).２人では不安である。 10
(5).人数が多いと何もしないで見ておれるから。 0

4.1.5 従来の授業とコンピューターおよびプロジェクターを利用した授業との比較について

[1].従来の授業とコンピューターおよびプロジェクターを利用した授業について、どのように感じましたか？

(1).プロジェクターは大画面であるからクラス全体で授業を受けられ，また、自分で操作しなくてもよいから授業に専念出来る。	.... 72%
(2).パソコンは自分で操作するので授業に専念できる。	 13
(3).わからない（該当項目がない）。	 10
(4).黒板だけによる授業の方がよい。	 5

[2].コンピューターによる授業とプロジェクターによる授業の理解度について

(1).プロジェクターによる授業の方が理解できる。	.... 37%
(2).パソコンによる授業の方が理解できる。	 36
(3).理解度は同じである。	 22
(4).わからない（該当項目がない）	 5

[3].今後、コンピューター（パソコンとプロジェクター）を利用した授業や従来の授業を受けるとき、どの様な組合せがよいと思いますか？

*(A).従来の授業。 (B).パソコンで小人数教育。
(C).プロジェクターを利用した共通の授業。

(1).(A) --> (C) --> (B)	.... 35%
(2).(A) --> (B) --> (C)	 29
(3).(A) --> (C). {(C)は必要ない}	 17
(4).(A) --> (B). {(B)は必要ない}	 12
(5).わからない（該当項目がない）	 6
(6).(A). {(B),(C)は必要ない}	 1

[4].授業への集中度は

(1).プロジェクターを利用した方がよい。	.... 40%
(2).パソコンを利用した方がよい。	 36
(3).わからない（該当項目がない）	 16
(4).黒板だけの方がよい。	 8

4.2 従来の授業後のアンケート調査集計分析

一変数関数の問題（極限、連続性、極値）処理には図形的にその性質を調べようとする学生が34%、はじめから解析的に処理すると回答した学生が51%ほどいることが分かった。そして、85%が本等を見ればそれらの関数のグラフ等は微分を応用して描くことが出来るとしている。また、一変数関数の極限や連続性をグラフによって説明出来る，あるいは大体説明出来るとしている学生は60%ほどいる。このことは大方の学生が簡単な一変数関数については解析的理解と図形的理解が出来ていることを意味していると考えられる。しかし、二変数関数になると曲面のグラフに興味をもちつつもそれが描けないため一変数関数で育てた図形的直観とうまくかみ合わない。解析的な手段で問題を処理できたとしても二変数関数はややこしい、さっぱり分からない、または分かったような分からないようなという声が聞かれる。このことはアンケート調査からも読み取れる。すなわち、通常の授業において、二変数関数の極限や連続性を解析的に理解できた、あるいは大体理解出来たと判断できる学生は64%いるが、それを図形的にも理解出来た、あるいは大体理解出来たとしている学生は28%である。つまり、大方の学生は一変数関数の極限や連続性のように二変数関数の極限や連続性を図形的には理解出来ていないといえる。
また、演習問題 $z=2x^3-2x^2y+y^3$ でxに適当な値を与えた切り口関数のグラフは描けたとしている者が78%いる。しかし、それを三次元座標軸に描けた者は全体で19%、その曲面を大体想像出来たと答えている者はわずか6%である。そして、$z=f(x,y)$のグラフを三次元座標軸に描くことが出来れば授業が面白くなると思うかという問に対する肯定的な回答が55%であった。これらのことから曲面のグラフを描けないことが彼らの二変数関数の理解の一つの障害になっていると思われる。

4.3 コンピューター導入後のアンケート調査集計分析

講義による二変数関数の極限と連続性の指導が終わって、コンピューターよる幾何学的指導を行った。
その授業終了後の調査で、偏導関数の授業で、先生の図的説明等が理解出来た、あるいは大体理解できたと回答した者は59%、理解出来なかったと回答した者は20%であつた。また、曲面の切り口関数が一変数関数になっていることが理解できたとしている者が52%いる。これと偏導関数の理解度とをクロスさせたところ有意な連関が認められた（分割表によるカイ二乗検定：有意水準 5%)。つまり、曲面の切り口関数が一変数関数になっていることを理解できた学生は偏導関数の理解度が高いということが分かった。
さらに、関数 $z=2x^3-2x^2y+y^3$のグラフをコンピューターが描いた曲面を観察してそれが想像も出来ないものであったと答えた者は68%であった。このことは従来の指導で学生が描けなかった関数のグラフをコンピューターが描けたことへの驚異と受けとることが出来る。これらのことからコンピューター導入の授業は大きな意味を持っているといえる。
そして、81%の学生はコンピューターが曲面を描いて行く過程を観察する授業と曲面のグラフのプリントよる授業とは大きな違いがあると答えていることが分かった。さらに、コンピューター一台当りの適切な学生配置の調査では学生数は２名が適当であるとしている者が全体の57%で、第２位の１名(26%)を大きく引き離している。その理由の第１位には分からないとき友達に尋ねることができるを上げている者が46%であった。

4.4 コンピューターとプロジェクターによる授業効果の比較

プロジェクターの画面は大画面であり、クラス全体で共通の授業を受けられ、またパソコンのように自分

で操作しなくてもよいので授業に専念できると72%の学生が回答している。このことはプロジェクターによる授業が講義による授業とパソコン導入による授業の長所を合わせ持っていると解釈できる。
そして、パソコン導入による授業の理解度とプロジェクター導入による授業の理解度には差が認められない。また、それらの授業への集中度にも差が認められない。

5．まとめ

二変数関数の指導にコンピューター・グラフィクを導入することにより、次のような意義が認められた。グラフが空間における曲面になることを一変数関数のグラフと関連づけながら理解させることが出来た。
また、幾何学的指導が可能になり解析的指導の理解を深めさせることが出来た。さらに、学生は授業に意欲的に取り組むようになったこと等である。
次に、今回の試行でコンピューター１台当りの適切な利用人数は学生がコンピューターとの対話をする上で２名が適当であることが分かった。
さて、今回、我々は二変数関数の指導にあたって、教育機器の導入は次の順序で行うのが適当であると考え試行した。：

(1).講義による授業で解析的指導を行う。
(2).コンピューターによる授業を行い、講義による授業を幾何学的に理解させる。
(3).二変数関数の総合的指導をプロジェクターでクラス全体に行う。

この試行結果、学生は(2)の段階でプロジェクターを用い、(3)の段階でコンピューターを導入してもらいたいとの意見が我々が考えた方法より若干多かった。
しかし、過去の経験とそれぞれの教育機器の持つ特徴から考えるとき、プロジェクターは問題演習等を含めた”まとめ”の段階で利用した方が良いと考える。
また、コンピューター導入の授業はその長所として、講義による授業では一般的に難しいとされる学生の能動的学習姿勢を引出し、空間的想像力を育成する機能を持っていることが分かったので、我々の順序が適当であると思う。
なお、これらの教育機器を利用する段階で分かった問題点は、コンピューター・グラフィクを観察させながらの指導は従来の指導より時間を取る。またプロジェクターを利用した授業は室内を暗くしなければならないためグラフを見ながら黒板等を使えない等である。
従って、高専の数学の限られた授業数の中でのコンピューター導入のあり方とプロジェクターを利用した授業環境のあり方については、今後、さらに研究をかさね必要がある。

参考文献

(1). 稲葉三男.　　微分積分の根底をさぐる（現代数学社）
(2).上田ほか４名.　新版・微分と積分（２）.（大日本図書）
(3).山田・松浦.　　パソコンによる一斉授業 数学教育(No.359), p37 - 44.
(4).数学セミナー　1982 8月号, p 21 - 24.