

## 確率基礎問題 C A I の誤答処理

Pattern Matching of Incorrect Answers  
in the CAI of Basic Probability Problems

冀 幸 最首 和雄  
Pin JI Kazuo SAISHU

山形大学工学部  
Yamagata University

あらまし 数式展開の訓練をする演習用 C A I として、誤答分析等の機能をもつ C A I の設計方法について提案する。それは誤答形態から予想誤答を生成して、照合する方法である。実際に確率統計用にこの形式の C A I システムを開発した。それによる学習効果が大きいことを報告する。

キーワード 大学教育、C A I、データ処理手法、数式照合、数式展開

### 1. はじめに

数式展開の訓練をする演習用 C A I として、構文解析、式の展開、誤答形態による誤答分析などの機能をもつ C A I システムの設計方法について提案する。その一例として確率統計用に開発した C A I システム、それによる学習効果を報告する。

数式で学習者が解答する形態の演習用 C A I システムにおいては、学生の答えに対して単に「正しい、間違い、さらに展開しなさい」などの簡単な評価だけでなく、間違えの場合には誤答原因を分析して適切な助言をすることが必要である。こうすることで C A I による学習の質を高めることができる。このような機能をもつ C A I システムを開発するには効率的に解答式の解析を行い、短時間で応答文を生成することが必要になる。

いままでわれわれが使っていた確率基礎問題 C A I では照合処理時間が障害になり、誤答原因分析機能を持たせることができなかった。ところが連<sup>(4)</sup>による方法で確率式の展開の効率化を行って、解答式の処理時間の短縮をした。そして誤答解析を行い、学習者の解答に応じた応答文を表示するシステムに発展させた。ここでこのシステムの誤答処理方法、実際に演習したときの学習者のデータ分析結果とアンケート結

果について報告する。

### 2. 誤答形態をから誤答分析する C A I システム

誤答原因を分析する方法として次の方法があげられる。

- (1) 誤答式を多数用意する、固定した誤答と照合する。
- (2) 誤答形態から誤答式を順次生成して照合する。
- (3) 細かい質問を多数行って誤答原因を追求する。

つまり学習者モデルを利用する方法である。

我々は、(1)の方法で L I S P - C A I の標準的オーサリング・システムを作り、それで種々のコースウェアを作り、社会教育、高等学校、大学の C A I 演習などに利用してきた<sup>(3)</sup>。この場合に誤答式とその応答文を用意するのが最も困難な仕事である。その解決方法として誤答形態から予想誤答を生成する方法が考えられる。ただし誤答発生メカニズムは複雑で限られた誤答形態を利用できるのは、数式解答などの場合である。(3)の知的 C A I では細かい質問を行って、学習者モデルを作る方法が用いられるが、大学での多人数を対象にした C A I には利用するのが困難である。このような理由から数式解答の場合、誤答形態から誤答を順次生成して照合する方式の C A I を利用することとした。

ここで提案する C A I システムは次のような

処理からなる。

- (1) 解答式の構文解析
- (2) 解答式の正規形への変換と式の展開
- (3) 誤答形態による式の予想誤答への変換と照合  
今回はこの方式を確率統計の演習用CAIに適用した結果の報告である。

### 3. 誤答が発生する傾向について<sup>(1)</sup>

実際に演習するとき発生する誤答は多種多様である。全ての誤答に対してそれを発生する原因を調べ適切な助言をすることは不可能であるが、できるだけ多くの誤答に対して適切な応答文を返すことが必要である。多数の学生に対してCAI教育する場合は、学生の誤った認識の一般的な傾向を掴み、それらを判定して対応する措置をとることは大切なことである。そこで確率基礎問題のCAIのために誤答分析を行った。

今回の確率基礎問題のCAI演習とは以下の内容を含んでいる。

- (1) 事象演算、確率演算の表現法。
- (2) 集合演算。
- (3) 確率式の展開。
- (4) 独立、排反の条件が付いた場合の式の展開。

このCAI演習を受ける学生を指定するために前テストを行い、理解度の低い学生に演習を課した。前テストの結果を解析したところ、誤答が発生する傾向はおおよそ次のように分類された。

#### (1) 概念的な誤り。

(a) 事象と確率の分化ができない。

例えば  $P(A \cap B) + P(C \cap D) \rightarrow P(A \cap B) \cap P(C \cap D)$   
 $S - A \cap B \cap C \rightarrow 1 - A \cap B \cap C$   
(ただしSは全事象である)

(b) 定数と集合の分化ができない。

例えば  $5 * A \cap B$  のような記法の誤り。

#### (2) 公式の適用の誤り。

3種類の誤答を以下のようにした。f<sub>i</sub>をg<sub>i</sub>で誤って展開すると、f<sub>i</sub>→g<sub>i</sub>の誤りとした。

(a) e<sub>x1</sub>:  $P(A \cup B) \rightarrow P(A) + P(B)$

(b) e<sub>x2</sub>:  $P(A - B) \rightarrow P(A) - P(B)$

(c) e<sub>x3</sub>:  $P(A \cap B) \rightarrow P(A) * P(B)$

#### (3) 独立性、排反性の間違った理解。

(a) 独立と排反を反対に理解する。

(b) 独立性と排反性の条件を無視していて、展

開が不十分である。

(c) 独立、排反の考え方が汎化されてない。

例えばA, B, Cが独立なとき、 $P(A \cap B \cap C)$ を正しく展開して、 $P(A \cap B)$ を展開しない。A, Bが排反なとき、 $P(A \cap B)$ を正しく展開して、 $P(A \cap B \cap C)$ を0にしない。

(4) その他の誤り。  
(a) 途中の解を結果とする。(展開が不十分な場合)

(b) 記号が間違っている。例えば質問の中には記号が出る場合。

実際利用するとき、学生たちは正しい考え方を持っているが、しかし式の入力する際の不注意による僅かな誤りで答えが正解と照合ができない場合が多々発生する。それを判断して照合の範囲を広めることが望ましい。そのために次の誤りを判断できるようにした。

(1) 符号や係数などの誤り。

(2) 単純化していない式の場合。

一般的に解を得る場合、いくつかの展開規則を組合せて式を展開する。式展開で数段階の式の展開が必要な場合、その中の一式だけの誤りにより誤答となることが多い。そのとき正しい解を求めるために、学習者はすべての段階の式を調べなければならぬ。そこで調べる式の範囲を狭めて誤りの式を早く探すために、システムに各段階の解答の正誤を判断する機能をもたせた。続けて解くとき、複数個の展開規則を同時に用いる場合、それぞれの展開の誤りを判定することも必要である。今回のCAIシステムは、この場合に各段階の解答の正誤を判断するのに、上記の(2)の(a)(b)(c)の誤った展開規則の組合せて生ずる誤答を判定する機能を持たせた。この様な機能があるので、解答に自信がない学生にはすべての段階の式を入力して学習するように指導した。

### 4. 誤答処理の方法

学習者が入力した解答は次のステップでチェックする。

ステップ1 入力形が正しいか。

ステップ2 最終結果の解であるか。

ステップ3 予想された誤答形態であるか。

(予想誤答形態の誤答との照合)

概念的な誤りは入力形の間違いとなること

多いので、主にステップ1で処理される。正解と等価な解で最終結果でない解答はステップ2で検出できる。予想される公式の適用の誤り、独立性、排反性の間違っただけの理解、正解の近似解などはステップ3でチェックして処理する。

このCAIシステムはすべてLISPで書かれている<sup>(2)</sup>。これら処理するところを図1の流れ図に示した。点線枠の中に書いたのは応答文の内容である。入力形式の間違いは、解答を構文解析する段階でエラーと判定したときの誤答処理である。最終結果でない解答は正規形で表現したときは照合するが、最終の式であるかの判定で検出される誤答である。ここではこれらの処理の詳しい説明は省略して、予想される誤答形態との照合について報告する。

誤答形態を  $e_{x1}, e_{x2}, \dots, e_{xn}$  とする。  $n$  個の誤答形態は次式で定式化できる。

$$e_{x1}: f_1 \rightarrow g_1, e_{x2}: f_2 \rightarrow g_2, \dots, e_{xn}: f_n \rightarrow g_n$$

ただし  $f_1, f_2, \dots, f_n$  は展開する式の集合またはある属性である。  $g_1, g_2, \dots, g_n$  は各  $f_i$  に対する予想誤答形、またはある属性の集合である。  $e_{xi}$  は  $f_i$  から  $g_i$  への一対一の写像を意味する。

ここでは2種類の方法で照合した。

#### 誤答照合法1:

確率式  $F < f_1, f_2, \dots >$  とする。  $f_1, f_2, \dots$  は確率式の形態、またはその属性である。一般の関数の引き数ではない。  $e_{x1}, e_{x2}, e_{x3}$  は2節の誤答分類(2)の(a)(b)(c)を繰り返して適用した誤答形態(次式)である。

$$e_i(F) = e_{xi}(e_{xi}, \dots, (e_{xi}(F)), \dots)$$

学習者の誤答と区別するために、 $\{e_i\}$  を予想誤答集合と呼ぶ。

例えば  $f_1 = P(E_1 \cup E_2)$ 、 $f_2 = P(E_1 - E_2)$ 、 $f_3 = P(E_1 \cap E_2)$  とすると、 $P(A \cup B) - P(A \cap B - C)$  では  $f_1$  の形が  $P(A \cup B)$ 、 $f_2$  の形が  $P(A \cap B - C)$  となり、 $f_3$  の形は含まない。即ち式  $F$  を  $f_1, f_2, f_3$  で照合した結果を表す。  $F < f_1, f_2, \dots >$  で  $e_{xi}$  の形態の誤答が起きた場合の確率式を次式で与える。

$$e_{xi}(F) = e_{xi}(F < f_1, f_2, \dots >) = F < f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, g_i, f_{i+1}, \dots >$$

この式は次のような式である。

$f_i$  が式の形態の場合:  $F$  を  $f_i$  で照合して、得られた部分を  $g_i$  で置換した式

$f_i$  がある属性の場合:  $F$  を条件  $g_i$  で展開した式

後者は誤答形態  $e_{xi}$  で  $f_i, g_i$  が次のような場合である。

$$f_i = [A, B, C \text{ が独立}], g_i = [A, B, C \text{ が排反}]$$

例えば  $e_{1x}(P(A \cup B) - P(A \cap B - C)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B - C)$  である。展開する式  $F$  の形態  $f_i$  に対して学習者が入力した解答が  $e_i(F)$  と照合できれば、誤答原因  $e_i$  により発生した誤答と推測して、用意した応答文を出力する。上記の処理は予想誤答生成ルーチンで行う。システムの中で予想される誤答形態により全ての予想誤答生成ルーチンを予め用意して置く。

#### 誤答照合法2:

この方法は展式の中で多項式を展開する場合で予想誤答を生成するのに利用される。誤答照合法1と違う点は予想誤答を生成方法である。その一つの項を処理するのは次式で表現される。

$$e: e_{x1}e_{x2} \dots e_{xn}(f)$$

ただし  $f$  は展開する一つの項である。この場合  $f_1, f_2, \dots, f_n$  はすべて異なる形である。 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  を式の形態の集合とする。ルーチン  $e$  を実行する時、まず  $f$  と  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  を照合する。

$$f = f_1 \text{ ならば } e = e_{x1} \text{ つまり } f_1 \rightarrow g_1$$

.

$$f = f_n \text{ ならば } e = e_{xn} \text{ つまり } f_n \rightarrow g_n$$

すなわち  $f$  は形態式によって対応する予想誤答生成規則  $e_{xi}$  を1回利用して置換する。多項式を含む展式は  $F$  とする。この式をそれ以上展開できない式の部分  $F_1$  と展開不十分な部分  $F_2$  に分ける。

$$F_1 = \pm f_{11} \pm f_{12} \pm \dots \pm f_{1m}$$

$$F_2 = \pm f_{21} \pm f_{22} \pm \dots \pm f_{2k}$$

一般的に  $F$  を展開する過程にある誤答になる原因は  $F_2$  を間違い展開するのである。  $F_2$  だけ処理してもいい。  $F_2$  の中で幾つの項を間違い展開し、他の部分を正しく展開するいろいろな場合がある。そのような組合せてできる予想誤答の

総数は  $2^k - 1$  式である。ただし  $k$  は  $F_2$  の項数である。 $2^k - 1$  以下の2進数表現で1となった項を  $e$  で処理して、0となった項を正しく展開する。こうする結果を  $G_i'$  とする。1種類の予想誤答は次のようになる。

$$G_i = F_i + G_i'$$

$J$  を1から  $2^k - 1$  までの変換にもとづいて予想誤答を作りながら照合する。ある予想誤答と照合したら、次の予想誤答の生成が停止する。全ての予想誤答と照合できなければ、「展開が間違いです、よく考えてください」というメッセージが出る。

例えば

$$F_2 = P(A \cup B \cup C) + P(A \cup B) - P(B - C)$$

$$J = 5 \text{ は } 2 \text{ 進数で } (101)$$

$$\begin{aligned} G_5' &= e(P(A \cup B \cup C)) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) - e(P(B - C)) \\ &= P(A \cup B) + P(C) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(B) + P(C) \\ &= P(A \cup B) + 2 * P(C) + P(A) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

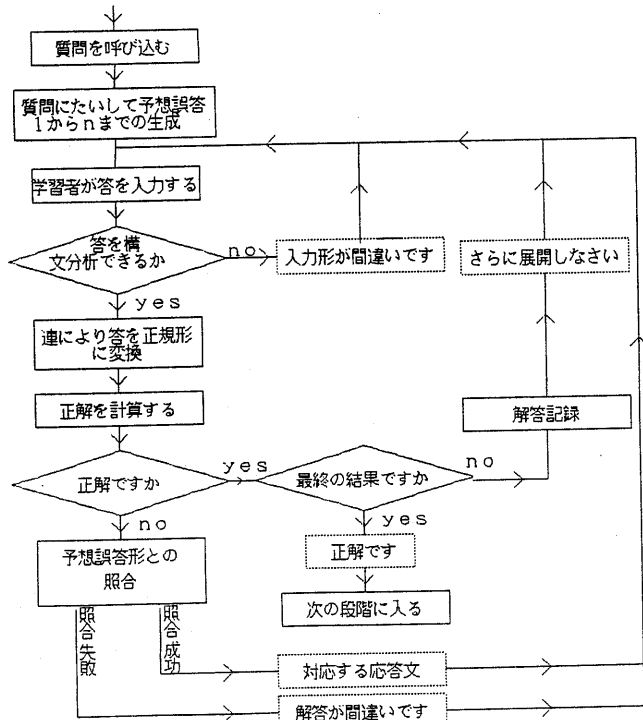


図1 学習者の入力解答をチェックする流れ図

$$\text{予想誤答 } G_5 = F_1 + G_5'$$

予想される誤答形態との照合を図2の流れ図に示した。その照合は一般に3つの段階に分けられる。

- (1) 正解の近似解との照合。
- (2) 最終解を入力する場合で予想される誤答形態との照合。
- (3) 途中解を入力する場合で予想される誤答形態との照合。

次に各々の段階の処理方法を説明する。

(1)は学習者の式の入力において、不注意による僅かな誤りにより答えが正解と照合できない場合に利用される段階である。このシステムでは学習者の解答を正規形に変換する。正規形として連による展開式を利用している。正解の近似性の照合では、もし全ての項部の照合ができれば、正解の近似解と判定する。そうでなければ正解の近似解ではないと判定する。

(2)は学習者が最終解答を入力して、誤答が発生する場合で利用される段階である。誤答照合法1による照合である。各々予想誤答生成ルー

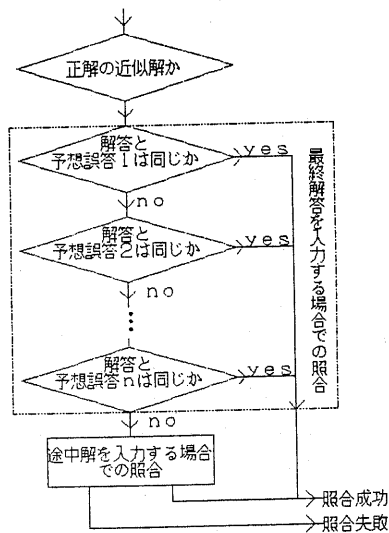


図2 解答は予想される誤答との照合する流れ図

チン  $e_i$  に対して入力部分は質問である。出力部分の予想誤答は1種類の誤答形態により生じるものである。照合の前後順位は予想される誤答形態が発生する回数の統計規則性によって行い、処理時間の短縮を図った。予想誤答の生成は質問文表示の直後に行い、誤答が入力されるとそれらと照合する。照合したら次部分の誤答形態との照合は終止する。図2で予想誤答  $i$  とは  $e_i(F)$  を意味する。

(3)は学習者が各解答のステップを細かく入力して、途中で誤答が発生する場合に利用される段階である。誤答照合法2による照合である。ルーチンの入力部分は前段階の展開不十分の解または質問の式である。この処理では誤答形態  $e_{x1}$  の適用を1回だけ利用する。だから(2)と(3)では入力部分が同じ場合であっても、同じ誤答形態により生成する予想誤答は違う。例えば式  $P(A \cup B \cup C)$  を展開するとき、公式の適用の誤りの形態により予想誤答はそれぞれ次のようになる。

(2)の段階は  $P(A) + P(B) + P(C)$

(3)の段階は  $P(A) + P(B \cup C)$

そのほかに、出力部分の予想誤答は2種類以上の誤答形態を含むことはできる。実は途中解を続けて解く場合、誤答形態により一つの項からいろいろな誤答が発生する。一般的に、ある段階から次の段階へと解き続ける場合に利用できる公式は少ないから、誤答が発生する形態も一部の形に偏る傾向がある。副次的な要因を省略して各項からは一つ種類の誤りしか発生しないと仮定して予想誤答を作っている。このとき公式の適用の誤りは和、差、積事象を展開する時の予想誤答の形態  $e_{x1}$ 、 $e_{x2}$ 、 $e_{x3}$  だけとした。この流れ図を図3で示した。不十分な展開式を項に分ける。その項数を  $k$  として、 $2^{k-1}$  以下の2進数表現で1となった項を順次誤答形態で置換する。この場合の2進数表現で1となった項の選択をこの図で処理選択と言った。

誤答処理機能は問題毎に異なっている。問題と誤答処理の主な関係は以下のようなのである。

問題2. 確率式の展開の問題

(2)の処理

質問の式に  $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$  の誤答形態の一つを繰り返し適用して、式を置換した予想誤答。

(3)の処理

前段階の解答不十分な式に  $e_{x1}$ 、 $e_{x2}$ 、 $e_{x3}$  の誤答形態の組合せを適用して、式を置換した予想誤答。

問題3. 独立、排反条件があるときの確率式の展開の問題。

(2)の処理

独立と排反を逆に理解する誤答形態。

独立、排反の不十分な理解という誤答形態。

上記のように問題2で展開規則を指導するので、問題3ではこのような誤った使用による誤答形態の検査は行わなかった。以下に質問、誤答、応答文の例を示す。

例 質問: [[Aかつ[Bでない]]か、またはC]である事象の確率、A、Bは独立。

誤答:  $P(A) + P(C) - P(A \cap C)$

応答文: 独立と排反の意味を区別して再考えしなさい

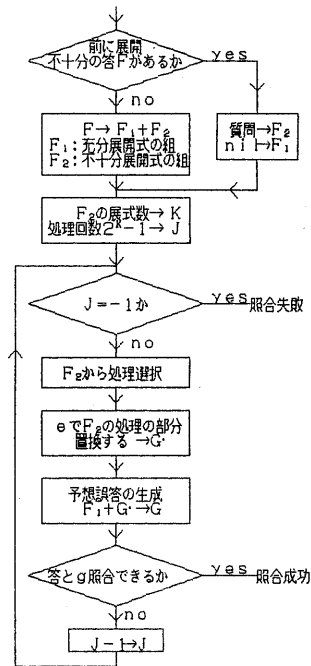


図3 途中解を入力する場合での照合

## 5. 学習者のデータ解析とアンケートの分析

前テストにより理解不十分な学生103人にCAL演習をさせた。その中の73人の学習者のデータを解析した結果をここで報告する。今回の演習では1人当たり7問を答えさせた(事象の表現法、確率式の展開、独立と排反の条件が

付いた場合の式の展開はそれぞれ2、2、3問)。平均演習時間は約2時間である。

この確率C A I用の解答解析プログラムにより解析した結果を報告する。この解析で照合不能解答ファイルを生成する。これは全部の学生について学習過程で生ずる照合できない答えを集めるものである。それは誤答処理してないがよく発生する誤りの傾向を捜して、誤答処理の範囲の広め、指導方法を改良するのに利用する。全体解答ファイルにより演習者全体の解答を見ることができる。今回の全体解答ファイルの誤答分析結果は表1、表2のようになった。73人の解答の延べ回数が1424回であり、表1にそれを正解と誤答3種類の回数に分けて表示した。表2はそれを誤答の種類により分けた結果である。これを見ると、誤答の中で予想誤答と照合したのは22.3%であることがわかる。この程度でも学生は「親切なC A I」と感じていることがアンケート結果から言える。

項目	正解	照合不能誤答	照合した誤答	展開不十分
数	531	422	121	350

表1 解答照合のまとめ

問題	照合種類	回数	照合種類	回数
1	正解	156	照合できない	113
	入力の誤り	1		
2	展開不十分	146	照合できない	83
	正解	148	公式の適用の誤り-a	3
	公式の適用の誤り-b	0	公式の適用の誤り-c	2
	符号または係数の誤り	14	問の中にない記号を使う	21
	余分な項が存在する	1	入力形の誤り	3
3	独立、排反条件を無視する	204	照合できない	226
	正解	227	独立と排反を反対に考える	8
	余分な項が存在する	19	入力形の誤り	32
	符号または係数の誤り	4	展開不十分	7
	独立条件を理解していない	0	排反条件を理解していない	6

表2 正解と予想誤答に照合した回数

照合不能解答ファイルによって照合不能の場合には以下の種類に分けられる。

(1) (2)の段階でいくつか種類の誤りが混在する場合。

(2) (2)の段階で公式を利用するとき、正し

い使用と誤った使用が混在する場合。

(3) (3)の段階で3種類公式の適用の以外の誤りを発生する場合。

(4) 誤答原因を推測しにくい誤り。

以上のなかで(4)の場合は照合が不可能である。

(1)、(2)、(3)の場合に誤答の予想誤答との照合率を高めるために、誤答形態を増やすことが必要である。しかしそうすると処理時間が長くなる。このため誤答形態の数は処理時間との関係で適切に決めることが必要である。

演習の時は学生間で異なった問題になるように一つの質問が多数の小問からなり、学生にその中の一つをランダムに選んで解かせている。学生同志で互いに教え合ってもよい、参考書を見てもよいという条件で演習している。このようなC A I演習を5年間継続して行っている。毎年約150名の学生が演習している。このような演習の必要性を学生が認識することがC A I演習を効果的に行う第1要素である。確率統計の講義ではこの式展開を理解することの重要性を教えており、そのため講義の資料も独自に作成している。このような背景があり、C A I演習を受けた学生のアンケートの反応も非常によい。この演習者の中でアンケートを提出した者88人の結果を簡単にまとめておく。このアンケートは無記名である。

(a)このような演習のレポートなどと比較した有効性について(学生数)

より有効 73、効果は同じ 1、効果は低い(またはレポートにして欲しい)5、どちらも好ましくない 1、白紙 7

(b)C A I演習で応答文が役立った程度とそう答えた学生数

役立った程度	0%	20%	40%	60%	80%	100%
学生数	12	23	18	17	9	8

(c)もっと細かく応答文を表示するように希望した学生数 5人

アンケート全体から多くの学生は満足して演習を受けており、応答文もある程度役立っていると考えられる。このような演習がよいとした学生の理由の主なものを以下に記す。

(1)自分で解かなければならないから、実力がつく。

(2)一人で学べる。

(3)誤答の時、応答文が直ちに出るので、勉強し易い。

## 6. おわりに

数式展開の訓練をする演習用 C A I として、誤答形態による誤答分析などの機能をもつ C A I システムの設計方法について提案した。その一例として確率統計用に開発した C A I システム、それによる学習効果を報告した。

従来の確率基礎問題 C A I では処理時間の関係で誤答原因分析機能を持たせることができなかった。ところが連による確率式演算方法で確率式の展開の効率化を行って、解答式の処理時間の短縮をした。そして誤答解析を行い、学習者の解答に応じた応答文を表示するシステムに発展させた。その誤答解析方法を報告した。このシステムで実際に演習したときの学習者のデータ分析結果とアンケート結果より、この C A I システムが非常に実用的であることを示した。

これからは工学教育で必要になる微分、積分の演習やその他の数式展開教育用 C A I にこの方式が適用し易くなるようなオーサリング・システムの研究を進める予定である。

## 参考文献

- (1)最首和雄：“確率基礎問題でのコンピュータ利用教育による学習効果”電子情報通信学会技術研究報告 EI87-4 (1987-06)
- (2)P. H. ウィンスト、B. K. P. ホーン著 (白井、阿部訳)：“L I S P”培風館(昭和57)
- (3)最首和雄、津川昭良、日下部千春、横田俊幸：“C A I における数式解答の照合機能とコースウェア改良におけるその応用”C A I 学会誌 Vol.6、No.1 March,1989
- (4)最首和雄、龔萃：“記号確率空間の効果的な確率式の展開法”電子情報通信学会論文誌 D II 掲載予定