コンピュータと教育　10－1
（1990. 4.25）

発達的概念形成に基づく確率概念の学習者理解状態モデルの構築

Modelling the Student's Understanding based on Formation of the Probability Concepts

坂谷内　勝
Masaru SAKAYAUCHI
金沢工業大学
Kanazawa Institute of Technology

あらまし　概念形成完成状態（エキスパート）の知識構造のみをベースにするのではなく，そこに至るまでの理解の発達段階を考慮した学習者モデルを提案する。確率概念の理解状態には，直観的理解の段階，数的理解の段階，主観的理解の段階，概念的理解の段階があり，発達的であると思われる。このモデルの特徴は，(1)学習者の誤りを“誤り”として捉えていないこと，そして，(2)同じプロセスによる誤りでもその原因系が異なる場合の説明ができることである。

キーワード　数学教育，ＣＡＩ，学習者モデル，知的ＣＡＩ，確率概念，概念形成

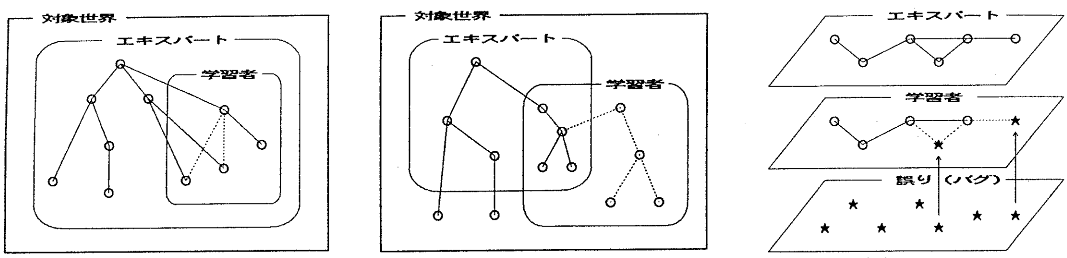
１．はじめに

学習者モデルは，学習者の理解状態や振舞いをコンピュータ上に表現するモジュールであり，知的ＣＡＩの重要な構成モジュールの１つである。初期の知的ＣＡＩでは，対象領域の教材知識構造（エキスパートが持つ知識構造）をベースにした学習者モデルの構築法が提案され，現在の学習者モデルの規範となっている。

代表的な学習者モデルとして，オーバーレイモデル[1]，バギーモデル[2]，差異モデル[3]がある。これら３つの学習者モデルを図式化して図１に示す。オーバーレイモデルはエキスパートが持つ知識体系の部分集合で，差異モデルはエキスパートの振舞いとの差異比較によって，そしてバギーモデルは誤った手続き的知識(bug)の部分置換によって，学習者の理解状態を表現している。最近の国内外のＩＴＳ研究[4]-[6]では，対象領域に表現される知識・技能を多様な視点で細分化・精緻化し，狭い限られた領域の中ではあるが，学習者の理解状態や振舞いを詳細に説明しようと試みている。

しかし，これらの多くの学習者モデルは，基本的には，理想的な専門家が持つ知識構造をベースにしているため，学習者の発達的概念形成の諸段階における理解状態や振舞いの表現が，学習者モデルの中に記述されていない。ビギナー(novice)がエキスパートになる過程（理解の発達的段階）を学習者モデルの中に表現し，この各段階における学習者の理解状態を透明な知識でモデル化することができれば，学習者の思い違い(misconception)やバグの的確な同定，そして，これに基づく有効な教授方略の選択実行が可能になると思われる。

そこで本稿では，概念形成完成状態（エキスパート）の知識構造のみをベースにするのではなく，そこに至るまでの理解の発達段階を考慮した学習者モデルを提案し，この学習者モデル構築法に関する理論的枠組みについて論じる。対象領域は，中学校数学教育の指導目標[7]程度の確率概念の理解であり，高等教育で取り扱う公理的かつ抽象的な確率論の理解ではない。



(a) オーバーレイモデル　　(b) 差異モデル　　(c) バギーモデル

図１　代表的な学習者モデル

２．理解の発達段階と学習者モデル

先行研究として，教育心理学と認知心理学における理解や認識の発達段階に関する研究成果を簡単に紹介する。次に，理解段階を考慮した学習者モデルの概要と特徴について述べる。

2.1　教育心理学的研究による理解段階

教育心理学における理解や認識の発達段階に関する研究では，ピアジェ（J.Piaget）の発達的認識段階やブルーナー（J.S.Bruner）の認知発達段階が有名である[8]。一般に，子どもの理解能力や認識能力には発達的な段階があり，各段階を経ることによって，これらの知的能力が形成されるといわれている。

2.2　認知心理学的研究による理解段階

最近の認知心理学研究では，ピアジェやブルーナーのような比較的長期間に渡る子どもの発達段階ではなく，ある機械的原理や物理的現象を比較的短期間に理解する場面においても，理解段階（レベル）が存在することが，プロトコールの分析結果より明らかになっている[9-10]。フォーバス（K.D.Forbus）ら[11]の研究では，物理領域の理解の処理過程において４種類のメンタル・モデルを提唱し，各モデルの系列が発達的であると論じている。この学習者モデルは，ピアジェらの一般的な発達段階のモデルとは異なり，特定の物理現象を対象とする領域固有なモデルである。また，学習者モデルの表現方法は，定性的プロセス理論を用いて明示的に記述している。

2.3　理解段階を考慮した学習者モデル

教育心理学的な発達段階と認知心理学的な理解段階は，一方では子どもの知的成長と呼ばれる長期間に渡る知能の発達段階に対し，他方では大人がある原理や現象を理解する場面での短期間における理解段階であり，両者の理解段階の質的な枠組みは全く異なるが，“学習者が完全な理解に至るまでには幾つかの段階が存在する”という視点は共通している。

そこで，学習者がビギナーからエキスパートになるまでには“理解の諸段階”が存在することを前提に，理解段階を考慮した学習者モデルを提案する（図２参照）。この学習者モデルは，学習者の誤り（思い違いやバグ）を，従来の知的ＣＡＩの学習者モデルとは異なる視点で解釈することができる。

オーバーレイモデル，バギーモデル，差異モデルは，基本的にはどれも対象領域の専門家をベースにした学習者のモデル化である。したがって，学習者の誤りに対しては，エキスパートが持つ知

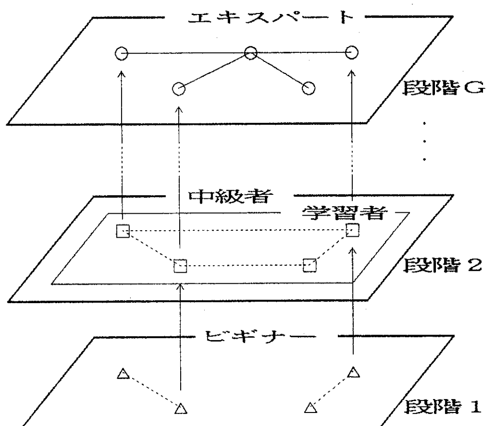


図２　発達的概念理解の学習者モデル

識やその適用法との比較，または，予め用意されたバグ知識によって説明されてきた。しかし，“誤りである”ことは説明できても，“誤りの原因系”や“時系列的な誤りの質的変容（同じ問題に対する初期の誤りと末期の誤りの相違）”についての説明が困難であった。

理解段階を考慮した学習者モデルは，ビギナー，中級者，上級者，プロ，エキスパートの各段階（この諸段階はドレイファス兄弟(H. L.Dreyfus and S.E.Dreyfus)[12]による）における理解状態が，それぞれ本質的に異なるという立場を取っている。ビギナーとエキスパートではもちろんのこと，中級者と上級者でも理解状態の本質的構造が異なるため，たとえ表層的には同じ誤りでも，深層的な誤りの原因系は各段階で全く異なるという解釈が成り立つ。つまり，誤りの原因系は各段階の理解状態の構造の特徴から導出され，時系列的な誤りの質的変容は，学習者の上位段階への移行によって説明することができる。また，このモデルでは，学習者の誤りをエキスパートの立場からみた“誤り”として同定するのではなく，理解の各段階で，むしろ学習者にとって“正しい推論による自然な理解状態や振舞い”として同定しようとするのが最大の特徴である。

数学教育の中で，このような視点に立った学習者モデルの構築研究は，初等代数理解を研究対象とした，マッツ(M.Matz)[13]のプロセスモデルや，益子・木村[14]の文字式二項演算の内的プロセスモデルがある。

3．確率概念理解の発達段階

子どもの確率概念の発達的研究は，ピアジェら[15]によって初めて体系的に行われた。彼らは，確率概念が偶然概念と比例概念の２つの下位概念で構成され，各概念の理解は，最終発達段階である形式的操作の段階（11歳頃以降）で可能になると述べている。

後述するモデルは，彼らや後のブルーナー[16]の確率概念の発達的段階を参考にしているが，発達段階の捉え方に大きな違いがある。彼らは，知的成長の長期的かつ一般的な発達段階を論じているのに対し，筆者のモデルは，認知心理学的なアプローチで，対象領域を確率概念に限定し，その概念の完全理解に至るまでの段階を発達段階として捉えている。換言すれば，幾つかの本質的に異なる確率概念の理解状態が存在し，個々の理解状態の構造は，発達的に推移するという仮説のもとで，モデル化しているのである。したがって，子どもの年齢等に依存した発達段階ではなく，また，大人が必ず最終段階に達しているとも限らないのである。

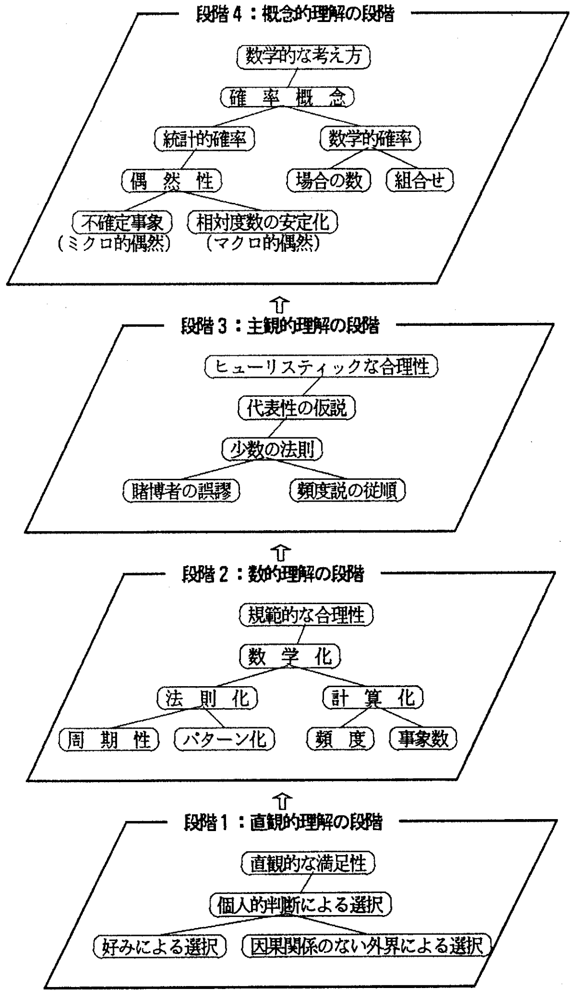


図３　４段階の確率概念理解状態

筆者は，確率概念の理解状態に，図３に示すような４つの段階があると考えている。理解段階の系列は，発達的に，下位の段階から上位の段階へ

問　題 (a)

10円玉を9回投げて，おもてが出たときH，うらが出たときTを記録しました。10回目におもてが出る確率(出やすさ)はどのくらいでしょうか。確率がわからないときは，どちらが出ると思いますか。

回　数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10円玉	H	T	T	H	T	T	H	T	T	?

問　題 (b)

10円玉を9回投げて，おもてが出たときH，うらが出たときTを記録しました。10回目におもてが出る確率(出やすさ)はどのくらいでしょうか。確率がわからないときは，どちらが出ると思いますか。

回　数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10円玉	H	H	T	H	T	T	T	T	T	?

図4　10円玉の確率問題

移行すると思われる。図4に示す簡単な10円玉の問題に対する学習者の応答を具体例にして，各段階の理解状態を解説していく。

3.1　段階1：直観的理解の段階

段階1は，確率概念を直観的に捉えようとする。したがって，偶然を必然的概念として捉えたり，あるいは，偶然に起こることは理解できても，科学的根拠のない直観や因果関係のない外界に依存して次に起こる事象を決定しようとする。10円玉の問題(a)または(b)に対して，「絶対，表だ」，「裏の絵の方が好きだから，裏」と答える。

3.2　段階2：数的理解の段階

段階2は，事象数や統計数等の得られる情報を数学化し，数学的な法則や演算（例えば，頻度の計算）を根拠に，確率概念を捉える。段階1の直観理解を数学的理論によって合理的に打破する段階である。10円玉の問題(a)に対して，「周期的に表が出ているので，表」，または，問題(a)(b)に対して，「表か裏の2つの内どちらかが出るので1／2」，「過去に表が出た頻度から1／3」と答える。

3.3　段階3：主観的理解の段階

段階3は，段階2の数的理解に主観が干渉する段階で，確率概念理解に主観が大きく影響を及ぼす段階である。この段階の学習者は，数学的操作によって得られた結果を，主観的な判断によって修正したり，数学的操作の過程に主観が入り込んだりする。

トヴェルスキー(A.Tversky) とカーネマン(D. Kahneman) [17] は，人間の確率判断の興味深い誤謬として，“少数の法則”を提唱している。少数の法則とは，「確率概念の大数の法則が，少数の試行回数においても成り立つ」という，統計学的には誤った概念である。10円玉の問題(a)(b)において，「今度表が出て確率が1／2に近づくように なる」とか，問題(b)において，「連続5回も裏が続いた（表があまり出ていない）ので表が出る確率は2／3」という回答がこの概念の典型例である。この概念は古くから“賭博者の誤謬 (gambler's fallacy) ”と言われている [18]。

後にカーネマンら [19] は，少数の法則の上位概念として，「少ない試行回数で得た結果でも，母集団を代表する」という“代表性の仮説”の概念を提案している。筆者は，彼らの主張に同感であるが，この下位概念には“賭博者の誤謬”の他に“頻度説の従順”という概念も存在すると考えている。“頻度説の従順”とは，10円玉の問題(a)(b)において，「本来1／2だが，裏が出やすいので表が出る確率は40％（または1／3）」という回答である。

このような概念は，段階2の“規範的な合理性 (normative rationality) ”に対し，“ヒューリスティックな合理性(heuristic rationality) ”と呼ばれており，人間の情報処理の特徴であるといえる [20]。

3.4　段階4：概念的理解の段階

段階4は，数学教育的に正しい確率概念を理解する段階である。この段階に至ると，段階3の主観的な確率概念理解が排除され，偶然のミクロ的な概念である不確定事象の概念とマクロ的な概念である相対度数の安定化の概念が，統合して理解できるようになる [21-22] 。10円玉の問題(a)(b)に対して，「試行回数が少ないので，過去の記録に関係なく1／2」と答える。また，連続9回裏が続いている場合でも，「滅多にないことが起きた

が，やはり1／2」と答え，「10円玉の実験に何かトリックがあるのではないか」という疑問を持つようになる。

4．確率概念理解モデルの表現

確率概念理解モデルを表現する概念ネットワークと，個々の概念の特徴を表す学習者のメンタルプロセスの規則について述べる。

4.1 概念ネットワークと諸概念の記述

各理解段階における確率概念の理解構造は，概念ネットワーク，即ち個々の概念表すノードと概念間の上位／下位関係を示すリンクで表現する。段階3における確率概念の主観的理解の具体的構造を図5に示す。個々の概念には，概念名(concept)，概念の理解段階(level)，上位(super concept)／下位概念(lower concept)，この概念が持つ必須条件(precondion)，学習者がこの概念を保持している度合いを示す確信度(certainty factor)，そして，この概念を持つ学習者のメンタルプロセスを表す具体的規則(rules)が記述されている。

この概念ネットワークは，学習者の理解状態を推論するときの知識ベースになる。即ち，学習者の回答からどの概念を適用しているかを同定することによって，学習者の理解段階と保有している概念を明確化する。

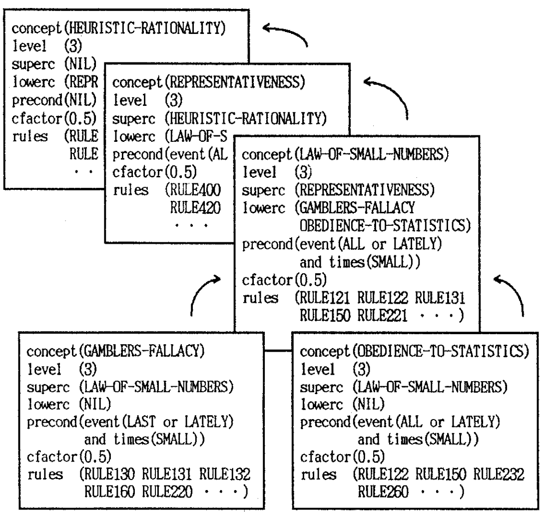


図5　主観的理解の具体的構造

4.2 メンタルプロセスを表現する規則

学習者が確率に関する問題を解く場面で用いると思われる，メンタルプロセスを表現する規則（一部）を図6に示す。規則の前提節は，学習者が問題解決する際に考慮する条件であり，動作節は導かれた結論である。

規則130は，10円玉の問題(a)において，“A”に“10円玉の表（即ちH）”，“過去（1回）”に“9回目”を代入することによって，「9回目が表でない（not H）ので，今回は表（H）が出るであろう」というメンタルプロセスを表現している。同様に，10円玉の問題(b)において，規則132は，「連続5回（N＝5）表でない（not H）ので，今回は表（H）が出るであろう」というメンタルプロセスを表現している。規則130と規則132は，共に，段階3の“賭博者の誤謬”概念から参照されている規則である。

1つの規則は必ずしも1つの概念から参照されているわけではない。規則130は，段階1の“個人的判断による選択”や，段階2の「前回の事象といつも異なる」という“法則化”の概念からも参照されている。このように規則の中には，同一理解段階の複数の概念や，理解の段階の異なる幾つかの概念から，参照される場合がある。

学習者が適用しているメンタルプロセスの規則を見つけることができても，理解段階や理解状態によって，その規則を適用している原因系が異なる場合がある。学習者の理解段階がどの段階か，そして学習者の理解状態がどの概念であるかを推

規則100 ： if　t
then［今回（A）］
⋮
規則130 ： if［事象（not A）and 過去（1回）］
then［今回（A）］
規則131 ： if［事象（not A）and 過去（全回）］
then［今回（A）］
規則132 ： if［事象（not A）and 過去（連続　and N回）］
then［今回（A）］
⋮
規則160 ： if［事象（（not A）and 頻度（多））and
過去（N回　or　全回）］
then［今回（A）］
⋮

図6　メンタルプロセスを表現する規則

論するときには，概念の前提条件や確信度を手掛かりに推論する。また，推論に必要な情報を得るために，学習者に与える問題内容の変更，多肢選択式問題の生成，学習者回答に対して解釈方法の確認等が考えられる。

5．おわりに

学校教育のベテランの教師は，生徒の発達的な概念形成の各段階に応じて指導内容と指導方法を適時選択している。必ずしも，数学教育の最終目標である，完成された教科領域の知識集合のみを用いて指導しているわけではない。本稿では，このような教育利用の視点に立ち，学習者の発達段階を考慮した確率概念理解モデルを提案した。このモデルの特徴は，従来のＩＴＳ研究と異なる発想で，学習者の誤りを捉えようとしていることである。即ち，(1)学習者の誤りを“誤り”として捉えず，そして，(2)同じプロセスによる誤りでもその原因が異質な概念である場合を説明することができる。

しかし，この学習者モデルをＩＴＳに組み込むためには，解決しなければ問題が沢山ある。中でも，学習者理解状態の具体的推論法や，推論結果に基づく教授方略については，今後の重要な課題である。

〔参考文献〕

(1) I.P.Goldstein:The Genetic Graph:A Representation for the Evolution of Procedural Knowledge, in D.Sleeman and J.S.Brown (eds.), Intelligent Tutoring Systems, Academic Press,pp.51-57,1982.

(2) J.S.Brown and R.R.Burton：Diagnostic Models for Procedural Bugs in Basic Mathematical Skills,Cognitive Science,pp.155-192,1978.

(3) R.R.Burton and J.S.Brown：An Investigation of Computer Coaching for Informal Learning Activities,Int.J. of Man-Machine Studies 11,pp.5-24,1979.

(4) D.H.Sleeman:Inferring Student Models for Intelligent Computer-aided Instruction, in R.S.Michalski,J.G.Carbonell,and T.M. Mitchell(eds.),Machine Learning,Tioga,pp. 483-510,1983.

(5) 矢野正己，上野晴樹：知的プログラミング支援環境における知的ＣＡＩ，信学技報，AI 89-16,pp.109-116,1989.

(6) 柏原昭博，平島宗，中村祐一，豊田順一：対象理解のための問題解決モデルと教育戦略，教育におけるコンピュータ利用の新しい方法シンポジウム，情報処理学会，pp.83-92,1989.

(7) 文部省：中学校学習指導要領，大蔵省印刷局，p.65，1969.

(8) 広岡亮蔵：ブルーナー研究，明治図書，pp. 62-79,1977.

(9) 三宅なほみ：理解におけるインターラクションとは何か，佐伯胖編，理解とは何か，東京大学出版会，pp.69-98,1985.

(10)M.D.Williams,J.D.Hollan,and A.L.Stevens:簡単な物理システムについての人間の推論，in D.Gentner and A.L.Stevens(eds.),Mental Models，古川康一，溝口文雄編，メンタルモデルと知識表現，共立出版，pp.75-100，1986.

(11)K.D.Forbus and D.Gentner：物理学の定性的学習，in R.S.Michalski et al.(eds.), Machine Learning，電総研人工知能研究グループ他訳，知識獲得と認知科学，共立出版，pp.123-163，1988.

(12)H.L.Dreyfus and S.E.Dreyfus:Mind over Machine,純粋人工知能批判，椋田直子訳，アスキー，pp.11-12,1978.

(13)M.Matz：Towards a Process Model for High School Algebra Errors,in D.Sleeman and J.S.Brown(eds.),Intelligent Tutoring Systems,Academic Press,pp.25-50,1982.

(14)益子典文，木村捨雄：知的ＣＡＩにおける学習者理解モデルの構築，ＣＡＩ学会研報，Vol.86,No.1,pp.9-14,1986.

(15)J.Piaget and B.Inhelder:The Origin of the Idea of Chance in Children, trans. L.Leake,Jr.,P.Burrell,and H.D.Fishbein, W.W.Norton&Company,Inc.,pp.95-160,1975.

(16)J.S.Bruner:Beyond the Information Given, 認識の心理学　下，平光昭久訳，明治図書，pp.170-171,1978.

(17)A.Tversky and D.Kahneman：Belief in the Law of Small Numbers, Psychological Bulletin,Vol.76,No.2,pp.105-110,1971.

(18)J.Cohen　：現代心理学の展開　第２巻　心理的確率，北村晴朗，佐藤怜訳，誠信書房，pp.56-89,1976.

(19)D.Kahneman and A.Tversky：Subjective Probability,A Judgment of Representativeness,Cognitive Psychology,3,Academic press Inc.,pp.430-454,1972.

(20)佐伯胖：認知科学の方法，東京大学出版会，pp.35-87,1986.

(21)坂谷内勝，木村捨雄：確率概念を形成するシミュレーションＣＡＩ，信学技報，ET84-11, pp.39-42,1985.

(22)坂谷内勝：確率概念の形成とその指導に関する研究，統計教育研究，全統研，Vol.23, No.2,pp.75-81,1990.