コンピュータと教育 29—4
(1993. 9. 24)

近似多項式のいくつかの興味深い性質

佐々木建昭

筑波大学 数学系 (茨城県つくば市天王台)
email: sasaki@math.tsukuba.ac.jp

本稿では、数係数が近似数である多項式を近似多項式という。従来の計算機数学では専ら正確な多項式の演算ばかりが論じられてきたが、応用面では近似多項式が扱われることも多い。さらに、近似多項式あるいは近似べき級数を使用することにより、代数的計算法の柔軟化が可能となる。本稿では、近似多項式の数学的側面に目をあて、それが従来の多項式数学とは大幅に異なり、種々の興味深い性質を持つことを具体例により教育的に示す。

Some Interesting Properties of Approximate Polynomials

Tateaki Sasaki

Institute of Mathematics, University of Tsukuba
Tsukuba-shi, Ibaraki 305, Japan

In this article, by approximate polynomials, we mean polynomials with numeric coefficients represented approximately. Approximate polynomials will play a very important role in algebraic computation because they allow “soft” and flexible algebraic algorithms. This article explains instructively, by using simple examples, how approximate polynomials are different from exaxt ones and have various interesting properties.

1 はじめに

本稿では、数係数が浮動小数などの近似数である多項式を近似多項式（approximate polynomial）と呼ぶ。係数の精度を上げていけば、近似多項式はいくらでも正確な多項式に近づくから、一見すると近似多項式に関する数学は従来の数学のちょっとした修正にすぎないように思える。しかしながら、3 章に実例で示すように、近似多項式に関する数学は従来の多項式数学とは大幅に異なる。しかも、種々の興味深い性質を示すのである。筆者は常々、このことを古典力学と量子力学に例えている： 時刻 $t = 0$ での初期条件で以後の運動がすべて定まってしまう古典力学（したがって、われわれの人生もすべて大昔から定まっていることになり、つまらない）に対し、位置と運動量の間に微小な不確定性を入れた量子力学の世界がどれほど興味深い性質を示すことか！

近似多項式に類する考え方は、実は数値解析の世界では昔から導入されているものである。しかしながら、数値解析では専ら数式の解析的側面のみが着目され、代数的側面からのアプローチは軽視されてきた。最近、筆者らは近似代数（approximate algebra）なるものを提唱し、近似多項式を中心に近似数式一般の代数的性質を調べ、各分野への応用の道をさぐっている。応用分野では、正確な数式の正確な処理が必要なことはいうまでもないが、正確な数式を近似的に処理したり、あるいは実験で決めた近似数式を近似的に処理したりすることも多々ある。ところが、従来の計算機代数のアルゴリズムの大部分は、対象が近似数式になった途端に破綻をきたすのである（たとえば、GCD 算法や因数分解算法を考えてみられたい）。その意味で、近似代数の研究は、数学的興味をはるかに越えて、大きな実際的意味を持つのである。

本研究会が“コンピュータと教育”をテーマとするものであるからには、近似代数の教育的効果も指摘しておく必要があろう。中学生や高校生にとって、多項式は“数の数学”の次に学ぶ基本的なことがらである。彼らが正確な多項式の性質に十分に慣れたとき、近似代数の考え方を示して“ほんの少し”の修正を多項式の演算に施したとき、その性質がどれほど変わるかを具体的実例で見せるならば、数学というものの面白さを少しは実感してもらえるのではなかろうか？（因みに、筆者が高校数学で最も感動したのは、曲線に囲まれた部分の面積が積分で簡単に計算できることを学んだときである。高校物理で石を投げたときの軌跡が簡単に計算できると分かったときも感動したが ...）

2 定義

近似多項式とは数係数が近似数の多項式であることを述べたが、近似数は微小な不定性（誤差と呼ぶほうがよいかもしれない）を含むから、近似多項式も微小な不定性を含むことになる。したがって、近似多項式の処理はその不定性を自然な形で取り込むものでなければならない。不定性をどう取り込むかには任意性があるが、筆者らは以下のように定義した。

定義 1 (ノルム) 多項式 P に対し、その数係数のうち絶対値最大のものを P のノルム

(norm) と言い、$\|P\|$ と表す。(ベクトルに対する通常のノルムの定義によれば、本稿のそれは係数ベクトルに対する無限大ノルムである。) □

例. $P = 1.2x^2y^2 + 3.4x^2y - 2.1xy^2 - 4.3xy + 2.3x - 2.1$ のとき、$\|P\| = 4.3$ となる。

定義 2 (O 記号) g と h は 0 でない数とする。g と h の比が 1 とあまり異ならないとき、$g = O(h)$ と表す。 □

この定義は数学的には曖昧であるが、実際的には分り易いであろう。O 記号は、より具体的には、多項式 F と G が与えられたとき、

$$\|F \cdot G\| \le O(\|F\| \cdot \|G\|) \tag{2.1}$$

が成立するものとして定義する。なお、O 記号は通常 Landau の記号とよばれ、極限値で定義されるが、われわれの O 記号はそれと異なることに注意されたい。

定義 3 (精度) ε は微小な正数とする：$0 < \varepsilon \ll 1$. 多項式 F (特別な場合として数を含む) のすべての数係数が $O(\varepsilon)$ まで正確である (したがって、不定性は $O(\varepsilon)$ 以下となる) とき、P の精度は $O(\varepsilon)$ であると言い、

$$\mathrm{acc}(F) = O(\varepsilon) \tag{2.2}$$

と表す。 □

定義 4 (演算精度) ε は微小な正数とする：$0 < \varepsilon \ll 1$. 多項式 F と G が $\|F - G\| = O(\varepsilon)$ であるとき、F と G は精度 $O(\varepsilon)$ で等しいと言い、

$$F = G \quad (\mathrm{acc}\ \varepsilon) \tag{2.3}$$

と表す。代数演算 op を多項式 $F_1, \ldots, F_r$ に適用し、

$$op(F_1, \ldots, F_r) = G \quad (\mathrm{acc}\ \varepsilon) \tag{2.4}$$

なる結果を得るとき、G は精度 ε での答えであると言う。 □

上記の演算精度の定義によれば、多項式 $F_1, \ldots, F_r$ (正確であっても近似式であってもよい) に対する演算として、ノルムが ε 程度の "微小項" を無視して (適当に捨てたり付加したりして) 演算を行なえば、それが近似代数的演算であることが分る。

3 近似多項式のいくつかの性質

通常の多項式 F と G に対しては、$\deg(F \cdot G) = \deg(F) + \deg(G)$ (ここで、deg は主変数に関する次数を表す) となるが、近似多項式に対してはこれは一般に成立せず、$\deg(F \cdot G) \le \deg(F) + \deg(G)$ となる。

例1．$F=0.0010x^2+1.0000x-0.0100,\ \ G=0.0100x^2-1.0000x+0.1000$ に対し、精度 10^{-5} ではその積は以下となる。

$$FG=0.0090x^3-1.0000x^2+0.1100x-0.0010\ \ (\mathrm{acc}\ \varepsilon).\ \ \square$$

次に、通常の多項式に対しては、$F\neq 0,\ G\neq 0\iff FG\neq 0$ であるが、近似多項式に対してはこれも成立しない。

例2．$F=(x+1)^{10}/252,\ \ G=10^{-3}(x-1)^{10}/252.$
$\|F\|=1, \|G\|=10^{-3}$ であるが、$FG\approx 0.4\times 10^{-5}(x^2-1)^{10}/252$ ゆえ、$\|FG\|\approx 0.4\times 10^{-5}$ したがって、$FG=0\ (\mathrm{acc}\ 10^{-5})$ となる。 $\square$

代数学では、$a\neq 0,\ b\neq 0$ でありながら $ab=0$ を満たすものを零因子（zero divisor）と呼んでいる。上例から、近似多項式の集合は零因子を持つ環であることが分る（しかも、精度によって零因子になったりならなかったりする）。さらに、例2が示すように、多項式の積のノルムは時として非常に小さくなるが、これは組織的桁落ち（systematic cancellation）によるものである。与えられた多項式 G に勝手な多項式 F を乗ずるとき、組織的桁落ちがどの程度まで生じ得るかは [Sas93] で解明されている。

正確な多項式の場合、その因数分解は（数因子を除いて）一意的であるが、近似多項式に対してはこれも成立しない。しかも、以下に示すように不定性はびっくりするほど大きいのである。

例3．$F(x,y)=x^3+0.01x^2y-0.01xy^2-y^3$ を精度 10^{-2} で分解すると

$$F=(x^2+xy+y^2)(x-y)\ \ (\mathrm{acc}\ 10^{-2})$$

と分解できることはすぐわかるが、さらに

$$\begin{aligned}F\ &=\ (-0.2x^2y+x^2-0.2xy^2+xy-0.2y^3+y^2)\\ &\quad\times(0.04xy^2+0.2xy+x-0.04y^3-0.2y^2-y)\ \ (\mathrm{acc}\ 10^{-2})\end{aligned}$$

など、無数に異なった分解が可能である。 $\square$

代数学では、$uv=1$ となる元 u と v を単元（unit）とよんでいる。上例における二つの異なった因数分解は、実は単元の不定性によるものなのである。実際、上例において $u=1-0.2y,\ v=1+0.2y+0.04y^2$ とおくと、$uv=1-(0.2y)^3=1\ \ (\mathrm{acc}\ 10^{-2})$ となるから、$F=GH\ \ (\mathrm{acc}\ 10^{-2})$ であるなら $F=(uG)(vH)\ \ (\mathrm{acc}\ 10^{-2})$ となるのである。なお、上例では簡単のため、主変数 x の次数は等式の右辺と左辺で等しいとした。このように、主変数 x を含まない単元を x に対する単元と呼ぼう。例1のように主変数の次数低下も考慮に入れるならば、単元としては主変数を含むものも考えるべきであり、この場合は単元による不定性は因数分解の概念そのものをゆるがすものとなる。

1変数多項式に対しては、主変数に対する単元は数しかない。したがって、単元と組織的桁落ちによる不定性を除けば因数分解は一意的かと言えば、そうとも言えない。

例 4．$F=(x+1)^3=(x+0.9)(x^2+2.1x+1.11)$ (acc 10^{-3}).
すなわち、$x+1$ と $x+0.9$ のいずれも F の精度 10^{-3} の近似因子である。 □

上例における不定性は、1 変数多項式に限らず多変数多項式でももちろん生ずるが、次の自明な関係式によるものである。

$$f^m-\delta^m=(f-\delta)(f^{m-1}+f^{m-2}\delta+\cdots+f\delta^{m-2}+\delta^{m-1}). \tag{3.1}$$

上式で δ が $\delta^m=0$ (acc ε) を満たすとすれば、次式を得る。

$$f^m=(f-\delta)(f^{m-1}+f^{m-2}\delta+\cdots+f\delta^{m-2}+\delta^{m-1}) \ \ (\mathrm{acc}\ \varepsilon). \tag{3.2}$$

したがって、この種の因数分解の不定性は（近似）多重因子に対しては常に生じ得ることが分る。そして、数値解析ではよく知られた「1 変数代数方程式が m 重根を持つとき、精度 ε の計算では各根は $\sqrt[m]{\varepsilon}$ の精度でしか定まらない」という事実に対応する。

4 近似多項式の四則演算

以下の例では、数値の末尾の記号 ? は誤差を表すものとする。たとえば、1.2345? は $O(10^{-5})$ 程度の誤差を含む近似数 1.2345 を意味する。

精度と演算精度の定義によれば、近似多項式の和（差）と積の演算は簡単である。すなわち、F と G を精度がそれぞれ ε_f と ε_g の近似多項式とするとき、それらの和と積は従来のとおりに計算すればよく、注意しなければならないのは結果の精度だけである。

- $F+G$ の精度は $\max\{\varepsilon_f,\varepsilon_g\}$.
- $F\times G$ の精度は $\max\{\|G\|\varepsilon_f,\|F\|\varepsilon_g\}$.

しかし、除算を従来のように行なうとうまく行かない場合が多々ある。

例 5．F と G を与えて商 H を従来のアルゴリズムで計算する。ただし、

$$G=0.0100?x^2-1.0000?x+0.1000?,\quad H=0.1000?x^2+1.0000?x-0.0100?$$

であり、F は精度 10^{-5} での G と H の積とする：

$$F=0.0010?x^4-0.0900?x^3-0.9901?x^2+0.1100?x-0.0010? \ \ (\mathrm{acc}\ 10^{-5}).$$

従来の除算アルゴリズムは、G の主項 $0.0100?x^2$ により F の高次項を順に消去するものである。$0.0010?/0.0100?=0.10?$ であるから、F の x^4 項を消去すると

$$F-0.10?x^2G=0.01?x^3-1.00?x^2+0.1100?x-0.0010?$$

を得る。さらに消去を進めると、次式を得る。

$$F-(0.10?x^2+1.?x)G=0.?x^2+0.0?x-0.0010?.$$

したがって、商として得られるのは桁落ちした $0.10?x^2+1.?x$ である。 □

上例が示すように、除多項式の主係数が小さい場合には、従来の除算アルゴリズムは精度の小さい答えしか与えない。では、除算では精度落ちは避けられないのかと言うと、そうではない。除算アルゴリズムをちょっと工夫すればよいのである。たとえば、$F=GH$ (acc ε) を満たす1変数多項式 F と G が与えられたとき、商 H を計算することを考えよう。F,G,H を

$$\begin{aligned} F &= f_l x^l + f_{l-1}x^{l-1}+\cdots+f_0, \\ G &= g_m x^m + g_{m-1}x^{m-1}+\cdots+g_0, \\ H &= h_{l-m}x^{l-m}+\cdots+h_0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

と表すと、$F=GH$ より係数ベクトルに対する以下の関係式が得られる。

$$(f_l, f_{l-1},\cdots,f_0)=(h_{l-m},h_{l-m-1},\cdots,h_0)\times M_G. \tag{4.2}$$

ここで、M_G は次に示す $(l-m+1)\times(l+1)$ 行列である。

$$M_G=\begin{pmatrix} g_m & g_{m-1} & \cdots & \cdots & g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_m & g_{m-1} & \cdots & \cdots & g_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & g_m & g_{m-1} & \cdots & \cdots & g_0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

F と G を与えて商 H を計算することは、ベクトル $(f_l,\cdots,f_0)$ と行列 M_G を与えて (4.3) を満たすベクトル $(h_{l-m},\cdots,h_0)$ を計算することに他ならず、この種の線形方程式を精度よく解く方法は数値解析で詳しく研究されている。いくつかの解法のなかで最も分り易いのはピボット選択ガウス消去法である。

例6. 例5に与えた F と G に対し、ガウス消去法でその商を計算する。
計算を行列演算として行なうため、上記の行列 M_G に上から $(0,f_l,f_{l-1},\cdots,f_0)$ を、左から $(0,-x^{l-m},-x^{l-m-1},\cdots,-x^0)$ を付け加え、結果として得られる $(l-m+2)\times(l+2)$ 行列を M とする。行列 M は今の場合、以下となる。

$$M=\begin{pmatrix} 0 & +0.0010? & -0.0900? & -0.9901? & +0.1100? & -0.0010? \\ -x^2 & +0.0100? & \boxed{-1.0000?} & +0.1000? & 0 & 0 \\ -x & 0 & +0.0100? & -1.0000? & +0.1000? & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +0.0100? & -1.0000? & +0.1000? \end{pmatrix}$$

この行列で、第2行以下と第2列以下でピボット選択を行ないながら、第1行の第2要素以下を0にするよう消去を進める。ピボット要素は四角形で囲んで表す。

まず、上記 M のピボット要素は $M(2,3)$ であるから、これにより M の第3列を消去し、そのあとで第2行を捨てる：

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} +0.0900?x^2 & +0.0001? & * & -0.9991? & +0.1100? & -0.0010? \\ -0.0100?x^2 - x & +0.0001? & * & -0.9990? & +0.1000? & 0 \\ -1 & 0 & * & +0.0100? & \boxed{-1.0000?} & +0.1000? \end{pmatrix}$$

ここで、$*$ は 0 か 0.0000? のいずれかを表す。次に、上記の行列のピボット要素は $M(3,5)$ であるから、第5列を消去し第3行を捨てる：

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} +0.0900?x^2 - 0.1100? & +0.0001? & * & -0.9980? & * & +0.0100? \\ -0.0100?x^2 - x - 0.1000? & +0.0001? & * & \boxed{-0.9980?} & * & +0.0100? \end{pmatrix}$$

最後に、第4列を消去し第2行を捨てる：

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0.1000?x^2 + 1.0000?x - 0.0100? & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

以上より、商として $0.1000?x^2 + 1.0000?x - 0.0100?$ を得る。 □

与式 F と G の精度が ε で $\|G\| = 1$ である場合、上記のピボット選択ガウス消去法により、$F = GH$ (acc ε) を満たす商 H が精度 ε まで求まることが [Sas93] に証明されている。さらに、多変数多項式の商の計算、余りのある場合の商の計算も論じられている。余りがある場合、商 Q と余り R の不定性は一般に非常に大きくなるが、$F = QG + R$ の関係式は精度 ε まで満たされることが証明できる。

References

[Kit93A] T. Kitamoto, Approximate eigenvalues, eigenvectors and inverse of a matrix with polynomial entries. 1993, 13 pages (to appear in JJIAM).

[Kit93B] T. Kitamoto, Approximate eigenvalues, eigenvectors and inverse of matrix with polynomial entries and application to control theory (in Japanese). Preprint of Univ. Tsukuba, 1993, 8 pages.

[KN93] H. Kai and M-T. Noda, Hybrid rational function approximation and smoothing of data (in Japanese). 1993, 13 pages (to appear in JSIAM).

[NM92A] M-T. Noda and E. Miyahiro, A hybrid approach for the integration of a rational function. J. CAM, **40** (1992), 259–268.

[NM92B] E. Miyahiro and M-T. Noda, On extension of hybrid integration by new rational function approximation (in Japanese). Trans. JSIAM, **2** (1992), 193–206.

[ONS91] M. Ochi, M-T. Noda and T. Sasaki, Approximate greatest common divisor of multivariate polynomials and its application to ill-conditioned systems of algebraic equations. J. Inf. Proces., **14** (1991), 292–300.

[Sas88] T. Sasaki, Approximate algebraic computation (in Japanese). Sūriken Kōkyūroku (Collection of Research Reports, RIMS, Kyoto Univ.), Vol. 676 (1988), 307–319.

[Sas93] T. Sasaki, A study of approximate polynomials, I – representation and arithmetic –, Preprint of Univ. Tsukuba, 1993, 24 pages.

[SN89] T. Sasaki and M-T. Noda, Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations. J. Inf. Proces., **12** (1989), 159–168.

[SS89] T. Sasaki and M. Sasaki, Analysis of accuracy decreasing in polynomial remainder sequence with floating-point number coefficients. J. Inf. Proces., **12** (1989), 394–403.

[SS93P] T. Sasaki and M. Sasaki, A study of approximate polynomials, II – approximate GCD –, Preprint of Univ. Tsukuba, 1993 (in preparation).

[SSH92] T. Sasaki, T. Saito and T. Hilano, Analysis of approximate factorization algorithm I. Japan J. Indus. Appl. Math., **9** (1992), 351–368.

[SSKS91] T. Sasaki, M. Suzuki, M. Kolář and M. sasaki, Approximate factorization of multivariate polynomials and absolute irreducibility testing. Japan J. Indus. Appl. Math., **8** (1991), 357–375.