

惑星運動シミュレーション

作花一志 (京都情報大学院大学)

Simulation on the Motion of Planets

Kazushi Sakka

(Kyoto College of Graduate Studies for Informatics)

概 要

ケプラーの法則に基づいて惑星の運動を視覚的に表示するプログラムを制作した。これを用いた授業で次のような事項の理解に有効であった。

- ・ 離心率、面積速度の概念の把握
- ・ 非線型方程式の解法と可視化
- ・ 二十四節気における地球の位置
- ・ 冥王星軌道の特異性と惑星の新分類
- ・ 過去未来の惑星集合

1) はじめに

惑星運動論の研究は近代科学の始まりであり、万有引力による 2 体問題は初等力学の教科書で扱われる代表例である。

その運動方程式は 3 元連立 2 階微分方程式で表され、6 個の積分定数が必要である。それをケプラーの法則に従って書き直すと任意の時刻における惑星の日心黄道座標 (x, y, z) は式 (1) で計算できる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos i \\ 0 & \sin i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - ae \\ Y \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで a (軌道長半径) e (離心率) Ω (昇交点黄経) ω (近日点引数) i (軌道傾斜) は各惑星固有の定数であり、また軌道面上の座標 X, Y は時刻を与えてケプラーの方程式 (2) を解いて得られる。この方程式は未知数を E として

$$E = e \sin E + M \quad (2)$$

という形をした非線型方程式で、平均近日点離角 M は日付を与えれば定まる数であり、離心率 e は 8 惑星では 0~0.1 以下の数である。右辺の E の初期値を M としてニュートン法を用いると、数回の繰り返し算で収束し

$$\begin{aligned} X &= a \cdot \sin E \\ Y &= \sqrt{1-e^2} a \cdot \cos E \end{aligned} \quad (3)$$

が求まる。

$a, e, \Omega, \omega, i, M$ の 6 個の軌道要素は太陽以外に他の惑星からの万有引力の寄与が無視できないので実は定数ではなく、長期間の運動を調べるにはそれらの時間変化をも考慮し

なければならない。実際の計算では6個の軌道要素については[1]に載っている式を使い、日付毎に(2)より得られた E を(3)に代入し、その X , Y を(1)に代入して日心黄道座標(x, y, z)が算出される。以上の手続きで任意の日付における惑星配置が求まる。視覚的に理解しやすいようにプログラムはVisualBasic6.0を用いた。すべての惑星について z の数値は x や y に比べて小さく、以下の惑星軌道図は $z=0$ として描いた。他の詳しい天文計算と比較してみて、誤差は ± 5000 年間で数度以下に収まっている[2]。図1はこのソフトの実行画面でBC1059年5月20日における水星から土星までの惑星配置である。その内容については第4節を参照されたい。



図1 BC1059年5月の五惑星集合
軌道線は内側から順に水星・金星・地球・火星・木星・土星

2) 面積速度一定の理解

ケプラーの法則を

- I) 惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く。
- II) 太陽と惑星を結ぶ線分と楕円の長軸とでできる扇形の面積速度は一定である。
- III) どんな惑星でも公転周期の2乗と軌道長半径の3乗の比は一定である。

という文章だけで内容を理解することは非常に難しい。特に第2法則わかりにくいのが、図2を用いて次のように理解できる。

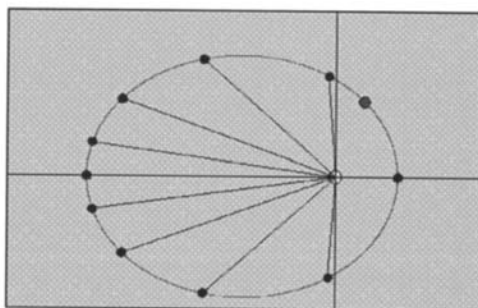


図2 面積速度一定の図示

惑星は楕円上を周回しその焦点に太陽が位置する。楕円を面積で等分すると、2つの分点と焦点で扇形ができる。各扇形の弧を通過する時間間隔はすべて同じである。したがって惑星が太陽に近いときは速く、遠いときはゆっくりと軌道上を運動する。このことは離心率の小さい8惑星ではわかりにくいのが、彗星の場合にはその運動が視覚的によくわかる。

3) 二十四節気における地球の位置

地球の軌道要素は $i = Q = 0$ で $a = 1$ でありその軌道を図3に描いた。春分・夏至・秋分・冬至における地球の位置が点A, B, C, Dである。地球・太陽を結ぶ線分が太陽・点Aを結ぶ直線となす角を太陽黄経 λ という。 λ が15の倍数になる日には季節感溢れる名前がついていて、「二十四節気」として親しまれている。もっとも最近では温暖化のせいで、小雪・大雪など時節に合わなくなったものもある。そのうち λ が30の倍数になるものは中、そうでないものは節と呼ぶ。中は旧暦の月の名前を決定するために用いられる。春分・夏至・秋分・冬至は二月・五月・八月・十一月の中で、その直前の新月の時刻を含む日とその月の一日となる。

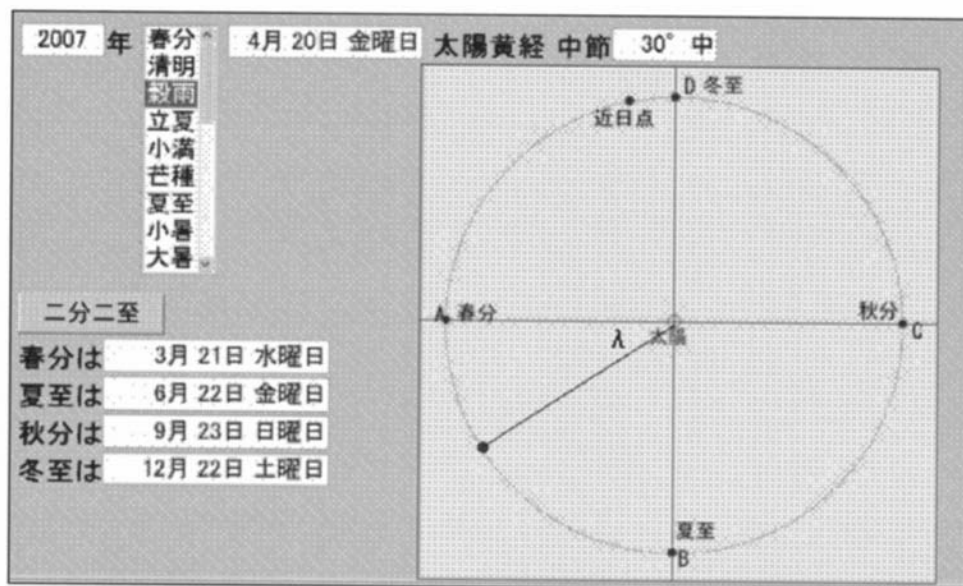


図3 二十四節気の計算法 [3]

また処暑直前の新月の時刻を含む日から数えて7日目が旧七月七日，すなわち伝統的七夕の日であり，今年は8月19日である。これら二十四節気の日時は毎年±2日の範囲で変わり，実際に計算するには λ の複雑な非線形方程式を解かねばならない。太陽は365.24219...日で天球上を360度移動するから1日については平均0.985647332度であるが，地球は等速円運動をしているわけではないから次のようにする。6月20日，21日，22日の λ を計算し90度を越すかどうかを調べる。たとえば21日午前0時では $\lambda < 90$ で，22日午前0時では $\lambda > 90$ ならば21日に夏至点通過が起こったはずだから，夏至は21日であることがわかる。このようにして24個の太陽黄経に対する日付が，図3の左のように筆者のウェブサイト [3] から計算できる。

4) 冥王星軌道の特異性と惑星の新分類

2006年8月24日，国際天文連合総会の決議により冥王星は惑星の地位を失ったが，その決定的な判断基準は冥王星を凌ぐ質量をもった新惑星が発見されたことである。冥王星はトンボー（1906－1997）によって1930年に発見されたが，発見当初から軌道の特異性は指摘されていた。他の8惑星はほぼ円軌道を描くのに，冥王星は海王星の軌道の内側に入り込む。他の8惑星はほぼ同一平面上を公転しているのに冥王星だけは軌道面が20度近く傾いている。1977年に衛星カロンが発見され，冥王星の周りを回る公転周期 p と軌道半径 a からケプラーの第3法則

$$a^3 = GM p^2 / (4\pi^2) \quad (G \text{ は重力定数})$$

により母惑星質量 M が求まると，冥王星は月よりも小さいことがわかった。それでも冥王星より大きい

惑星は見つからなかったので30年弱「惑星」として登録されていた。1990年代半ばから冥王星の彼方にカイパーベルト天体と呼ばれる小天体が多数発見され，その中には冥王星に肉薄するものも現れた。そしてついに2005年7月に冥王星を凌ぐ2003UB313（エリス）

が発見された。その質量を冥王星の場合と同じ方法で算出すると（表1）エリスと冥王星とは同程度である。ここに冥王星だけを惑星と呼ぶことはできなくなり，冥王星もエリスも惑星ではなく dwarf planet（準惑星）に分類された。これらについて詳しくは [4] を参照されたい。前述の軌道プログラムは新規の天体のデータを追加登録することができるので，図4に8惑星，冥王星，エリスの軌道を描いた。

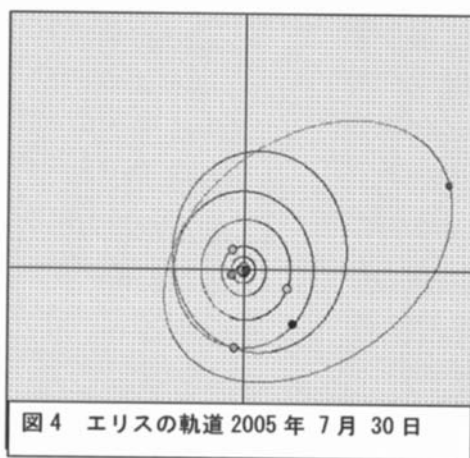


表1 準惑星の質量

Name	a	p	M/M ₀
Pluto	19640	6.387	1.000
2003 UB313	36000	1.8	0.775
2003 EL61	49100	49.05	0.265
(82075) 2000 YW134	1900	3	0.004
(79360) 1997 CS29	2300	6	0.002

5) 過去未来における惑星集合

このソフトを用いて BC3000 年から AD3000 年までの間，水星・金星・火星・木星・土星が20度以内に収まる日を検出したところ61回，うち太陽と同方向で観望できないものを除

くと 36 回見つかった。表 2 はそれらの密集度ベスト 5 である。そのとき、水星から土星までがほぼ一直線上に並び、天球上では 5 惑星が密集しているのが眺められる。最近では 2000 年 5 月 18 日に起こったが、昼間だったので眺められなかった。次回の観望の機会は 2040 年までない。

これらの計算結果と中国古代史書に記された記録との照合の一例を示す。詳しくは [5] を参照されたい。

『漢書高帝紀』に「漢元年の冬十月に五惑星が井宿の東に集合し、このとき沛公が覇上に到着した。」という記述がある。今より 2200 年前、秦が滅び漢が興えるころの天象である。沛公、すなわち後に漢の初代皇帝高祖となっ

た劉邦が秦の首都である咸陽近くの覇上に到着した時に、水星・金星・火星・木星・土星がふたご座の北からかに座にかけての天域に会したという。『史記天官書』には年代は記されていないが、漢が興る時に五星聚井が起こったという記事があり、昔から重視されていた有名な天文現象らしい。通常、漢元年とは BC206 年を指すが、BC206 年の秋から冬にはそんな天文現象は起こらなかったことが古くから確かめられている。実際、木星・土星はふたご座周辺にいるが、火星はみずがめ座・うお座辺りにある。そこで数字の写し間違いではないかとか、五星とは一般に惑星のことで必ずしも 5 個の惑星の集合を意味しないとか、そもそもこの記述は後世の捏造であるとか様々な議論がなされているが、果して秦末漢初に五星集合は起っていないものだろうか？

BC206 年にこだわらず、BC300 年から 300 年間、五惑星が 25 度以内に収まる日を探してみると 5 回見つかった。そのうち 2 回は太陽と同じ方向なのでその姿は見られない。件の五星集合は BC205 年の 5 月末に実際に起こっていた。しかも秦から漢の初期にかけて、これに匹敵するような五星の近接集合は他には起こっていない。彼らは実際に井宿の東に聚まっていたのだ。しかしなぜ半年ずれているのか？この食い違いはなぜだろうか？

BC1059 年 5 月末、「五星聚井」より 854 年前のほぼ同じ月日の同じ時刻に同じ方向で五星集合が起こっていた。惑星たちは 7° の範囲に収まるという、BC3000 年から 6000 年間で 3 番目にコンパクトな惑星集合である。しかも日没後 1 時間余、西の空かに座に見えたはずで観望条件は非常にいい。明るい星のないかに座に 5 つもの惑星が集合したのだから、多数の人の目に留ったことだろう。この天象の記録は『史記』や『漢書』にはない。しかし唐の時代の占星書『大唐開元占経卷十九』の「周将殷伐五星聚於房」という記載に対応している。殷末周初、文王・武王・太公望・紂王の時代にこのような天象は他にはない。BC1059 年 5 月 20 日（ユリウス暦では 5 月 30 日）に地球を含めた惑星配置は図 1 のようであった。図の下より地球・水星・金星・火星・木星・土星がほぼ一直線上に並び、地球から見ると 5 惑星はかに座に集合していた。なお、集合場所が房宿（さそり座の西部）ではないから誤記事だというのは早計である。「いつ、どこで」ということは忘れても、事件そのものは長く覚えているということは、現在のわれわれもよく体験するものだ。

表 2 五惑星集合ベスト 5

年	月 日		範囲 (度)	星座
BC1953	2 28	日出前	5	みずがめ
710	6 30	日没後	6	かに
BC1059	5 30	日没後	7	かに
BC 185	3 26	日出前	7	うお
2040	9 09	日没後	9	おとめ

惑星軌道論はモデル化シミュレーションの最初の成功例であり，今も豊富な教材の源である。

[参考文献]

- [1] 『天体位置表』 海上保安庁 1998
- [2] 作花一志・中西久崇 『天文学入門』 オーム社 2001
- [3] 作花一志 <http://www.kcg.ac.jp/kcg/sakka/koyomi/shunbun.htm>
- [4] 作花一志 <http://www.kcg.ac.jp/kcg/sakka/MP/pluto1.htm>
- [5] 作花一志 <http://www.kcg.ac.jp/kcg/sakka/oldchina/page1.htm>