Walsh－Hadamard, Haar 関数による高速X線断層像合成

佐藤一弘[+]　吉本千禎[+]　古村光夫[++]
＋北海道大学 応用電気研究所 ME部門　＋＋国際情報社会科学研究所

1. まえがき

X線と計算機を用いた全く新しい断層像撮影法 (Computed Tomography; CT) は，近年放射線医学の分野で大きな関心をもたれ，急速に普及しつつある。

CTでは人体各部の断面のX線吸収係数の２次元分布を，多方向の射影データ（１次元）から計算機を用いて再合成する。

CTによる断層像再合成では像再合成のアルゴリズムが重要な役割をはたし，これには単純加算法（単純逆投影法），マトリクス法，逐次近似法 (Algebraic Reconstruction Technique; ART)，フーリエ変換法，Filtered Back Projection 法（FBP法と略記する）およびFBP法におけるフイルタ処理を実空間でコンボルーション (cyclic convolution) 演算で行なうコンボルーション法（重畳積分法）などがある[(1)～(8)]。

さて，現在CTにおける問題はいくつかあるが，1つに測定の高速化とともに像再生アルゴリズムの高速化がある。現在のところ処理速度，再合成像の質，および計算機の使用メモリなどの点から最も優れているのは総ての計算が実空間で実行できるコンボルーション法であると言われている[(1),(2),(6),(7)]。

コンボルーション法（FBP法）では射影に対する補正関数のコンボルーション演算と，処理後の射影データの逆投影の計算過程の２つがある。これらは全射影数（測定方向数で，180方向が多い）だけの計算回数を必要とし，各々の計算量は非常に多いため，両方ともかなりの計算時間を必要とする。

本論文は，上述の２つの計算過程のうち，FBP法におけるフイルタ処理に対して新しく Walsh-Hadamard, Haar の２種の直交変換を用いて計算の高速化を計り，コンボルーション法あるいはそれをフーリエ空間で行なうフーリエ・フイルタ処理法（FBP法）よりもさらに高速度な断層像合成の可能性を検討したものである。

2. 逆投影による断層像合成

多数の射影データ（１次元）から２次元画像を近似的に再現する最も簡単な方法は，各射影をそのままその方向に投影 (back projection; 以下逆投影と略記する) し，加算する方法である（単純加算法）。しかしながら，この様な方法により得られる画像は原画像とはかなり異なり，原画像を $1/r$ なる２次元の重み関数でぼかした画像となる。ここで r は半径方向の距離である。今，原画像を f，上述の単純加算法により得られる像を g とすると，g は f と $1/r$ とのコンボルーションで表わされる。

$$g = f * \frac{1}{r} \tag{1}$$

＊はコンボルーション演算を表わす。

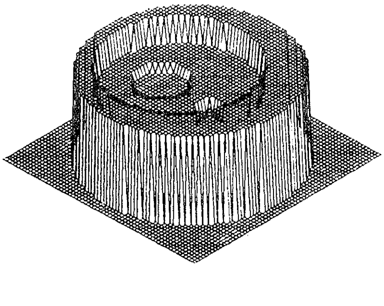
このことを周波数空間で考えると，上記原画像 f および合成像 g の２次元フーリエ変換を $F(\omega,\theta)$，$G(\omega,\theta)$（極座標で表わす）とすると，G は式(2)で表わされる。

$$G = F \cdot \frac{1}{|\omega|} \tag{2}$$

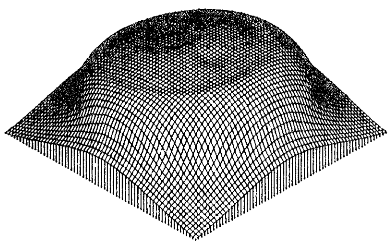
これらの式の詳細な導出については種々の文献があるので[(1)～(8)]，ここでは省略する。

式(2)から，単純加算法により得られる画像 G は，原画像 F に対して $1/|\omega|$ なるフイルタ（低周波ほど増強される

一種の低域通過フイルタである）をかけた画像となり，低域が強調されるため，非常にぼけた画像となる。この様な単純加算法による例を図１に示す。図１では1°毎180本の射影を単に逆投影し加算しただけであり，原画像とは非常に異なっている。



A; Original image



B; Reconstructed image

Fig. 1. Example of reconstructed image by simple back projection method using 180 projections and without filtering process, N^2= 64x64.

正しい画像を復元するためには式(1)あるいは式(2)から，逆投影像に対して|ω|のフイルタ処理を行なうか，あるいは，それを実空間で近似した補正関数をコンボルーション演算すればよい。

上述の方法では逆投影を行なった後の画像に対して２次元のフイルタ処理（あるいは２次元コンボルーション演算）を行なうが，もう１つ別な方法として逆投影を行なう前の各射影データに対して１次元のフイルタ処理（あるいはコンボルーション演算）を行なう方法がある[(2),(13),(15)~(17)]。現在のところ，この後者の方法のうち１次元コンボルーション演算を用いる方法が最も多く用いられている様である。これは他の方法（ART その他）に比べて画質が良いこと，すべての演算が実空間で行なえること，またコンボルーション演算はフーリエ変換によるフイルタ処理の場合の様な複素数を使わないことと，FFT (Fast Fourier Transform)[(17)~(19)] を用いる時に生じるサンプル点数についての制限（2^n）が無いことなどによるものと思われる。しかしながら筆者らは計算速度および|ω|の周波数フイルタを実空間へ変換する際に起こる近似誤差の問題が生じないことなどから，周波数空間におけるフイルタ処理の方が有利であると考えている。さらにここで述べる直交関数を使うことにより，FFT，コンボルーション演算よりも大巾な計算時間の短縮が計れ，また直交変換の計算においては FFT の様な複素数および乗算を使用せず実数の加減算で済むためミニコンピュータでも十分その利点が生かせる。

周波数|ω|のフイルタ（補正関数）については再合成像の画質に直接影響するため，種々の研究がある[(2),(5)~(11)]
これらのフイルタはほとんどすべて実空間のコンボルーションフイルタ（補正関数）の形で用いられている。本論文では比較のため，Ramachandran[(2)] およびChesler[(9)]のフイルタと，筆者らが実験的に高速計算を目的として求めたフイルタの３種を取り上げた。これらのフイルタの周波数特性を図２に示す。

ここではフーリエ空間でのフイルタ処理と同じ演算をWalsh-Hadamard, Haarの各直交空間で行なう方法と，各直交空間の間のフイルタ係数行列の関係を導く。なお，フーリエ空間におけるフ

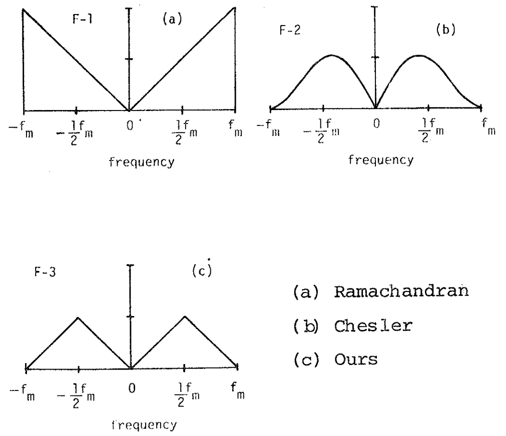


Fig. 2. Frequency domain plot of three different filter functions.

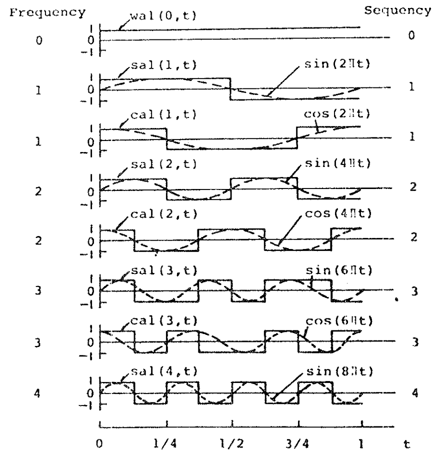


Fig. 3. First eight continuous Walsh functions and Fourier harmonics.

イルタ演算が実空間でコンボルーション (cyclic convolution)で表わせる様に，Walsh-Hadamard におけるフィルタ演算も実空間でコンボルーション (logical convolution)で表わせる[12]。

2.1 Walsh-Hadamard変換による処理

処理を行なう射影データを列ベクトルXで表わし，フーリエ，Walsh の各直交行列をF，Wとする。ここでF，Wは正規化行列とし，F行列の要素は式(3)で与える。

$$F_{j,k}=\frac{1}{\sqrt{N}}\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}j\cdot k\right) \qquad (3)$$

$$j,k=0,1,2\cdots N-1, \quad i=\sqrt{-1}$$

Fは複素行列である。

Walsh 行列は一般に order のちがいにより3種に分類される。これらは各々，Walsh order (sequency order), Hadamard order (natural order), Paley order (dyadic order) と呼ばれており[13],[14]，以下の式においてWの代りにおき換えればよいので，以下 Walsh order との関係で進めていく。また，ここでは Walsh と Hadamard 行列を取り上げた。8次の Walsh 関数の連続関数形)の例を図3に示す。図3で sequencyは frequency に対応するものであり，単位時間内の零交叉数の1/2である。また，wal(0,t) は直流成分に，sal(i,t) は sine 関数，cal(i,t)は cosine 関数に対応する。また，図3の離散関数形である8次のWalshおよび Hadamard行列を図4に示す。

$$W(8)=\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\ 1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\ 1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\ 1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\ 1&-1&-1&1&-1&1&1&-1\\ 1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\ 1&-1&1&-1&1&-1&1&-1 \end{bmatrix}$$

(a) Walsh ordered

$$H(8)=\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\ 1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\ 1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\ 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\ 1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\ 1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\ 1&-1&-1&1&-1&1&1&-1 \end{bmatrix}$$

(b) Hadamard ordered

Fig. 4. Discrete Walsh-Hadamard functions, N = 8.

フーリエ空間でのフイルタ行列をG_F，WalshでのそれをG_Wとすると，フイルタ処理後の結果Yは式(4)，(5)で表わせる。

$$Y_F = F^{-1}\cdot G_F\cdot F X \qquad (4)$$

$$Y_W = W^{-1}\cdot G_W\cdot W X \qquad (5)$$

ただしYの添字は処理を行なった空間を示す。ここで処理後の結果が等しいという仮定のもとにG_FとG_Wの関係を求めると，式(6)の様になる。

$$F^{-1}\cdot G_F\cdot F = W^{-1}\cdot G_W\cdot W \qquad (6)$$

Walsh行列は対称行列であるから，$W^{-1}=W$となる(Hadamard, Paley[13][14]も同じである)。式(6)からG_W又はG_Fは各々次の様になる。

$$G_W = W\cdot F^{-1}\cdot G_F\cdot F\cdot W = B^*\cdot G_F\cdot B \qquad (7)$$

$$G_F = F\cdot W\cdot G_W\cdot W\cdot F^{-1} = B\cdot G_W\cdot B^* \qquad (8)$$

ただし$B\equiv F\cdot W$とおき，B^*はBのcomplex conjugate transposeを表わす。

一般に，フーリエ変換によるフイルタ処理では，フーリエ・スペクトラムの個々の要素(周波数成分)に対して重み係数を乗ずることによりフイルタ処理を行なうため，フーリエ・フイルタ行列G_Fは主対角要素にのみ値をもつ行列(scalar filter)となる。Walsh変換によるフイルタ処理においても同様な処理がある(sequency scalar filter)が，フーリエ・フイルタと同一の結果は得られない。同一の結果を得るため，式(7)から得られる行列G_Wは，主対角要素以外にも値をもつフイルタ行列(ベクトル・フイルタ)になる場合が多い。これは図3に示した様に，フーリエとWalsh関数のちがいから来るものである。逆に言うと，Walshフイルタ行列が主対角にのみ値をもつ行列であっても，対応する行列G_Fはスカラ・フイルタ行列にならないことが多い。式(7)，(8)から，フーリエ空間でフイルタ係数を与えればWalsh空間で等価な係数行列が得られ，逆も可能である。

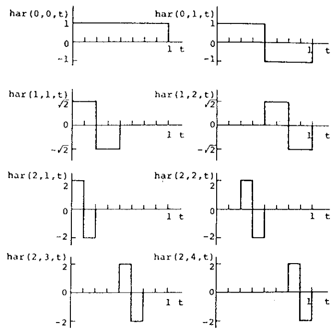
Walsh-Hadamard変換に対してもFFTと同様にCooley-Tukey形の高速変換アルゴリズムFWHT (Fast Walsh-Hadamard Transform)がある[13],[14],[16]。その場合，サンプル数Nに対して演算は$N\log_2 N$の加減算で済むため，複素数の乗算を用いるFFTに比べてかなり高速である。さらにFWHT(Hadamard order)の方がビット反転演算が不要であるため，Walsh orderよりも高速となる。

2.2 Haar変換による処理

2.1と同様にして，Haar空間のフイルタ行列G_{Ha}が式(9)で得られる。

$$G_{Ha} = H_a\cdot F^{-1}\cdot G_F\cdot F\cdot H_a^T = Q^*\cdot G_F\cdot Q \qquad (9)$$

ただし$Q\equiv F\cdot H_a^T$であり，Haar行列では$H_a^{-1}\neq H_a$である。8次のHaar関数の連続形と離散形を図5に示す。



$$Ha(8) = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Fig. 5. Continuous and discrete Haar functions, N = 8.

Haar変換の計算については2種の高速アルゴリズムFHT (Fast Haar Transform)がある[14]。1つは2(N-1)回の実数の加減算で済むAndrewsのアルゴリズムであり，もう1つはさらに$\log_2 N$回のビット反転演算を必要とするCooley-Tukey形のアルゴリズムである。計算時間からみるとAndrewsのアルゴリズムが有利であるが，後者を使う場合はFFT，FWHT，FHTが1つのハードウエア・プロセッサにより計算可能であるという利点がある。

以上の3種の直交変換の計算速度の比較のため，データ数 N = 64 ～1024について計算時間を実測した例を図6に示す。ただしFHTはAndrewsのアルゴリズムを用いた。これら3種の直交変換のうち，FHTが2(N-1)回の加減算で済むため最も高速であることがわかる。

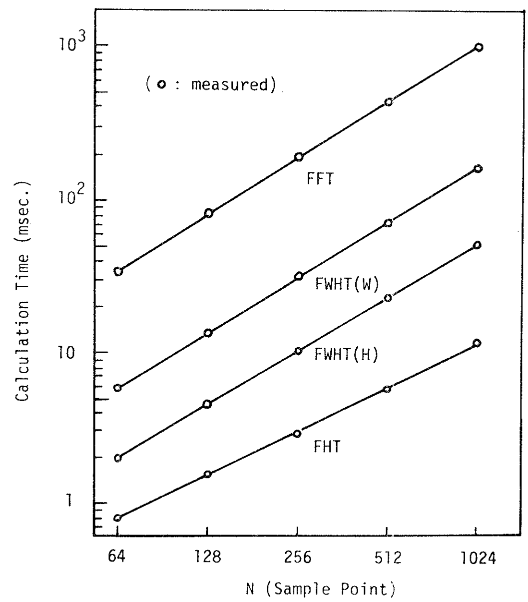


Fig. 6. Relationship between mean computing times and the number of sampled data for three orthogonal transforms.

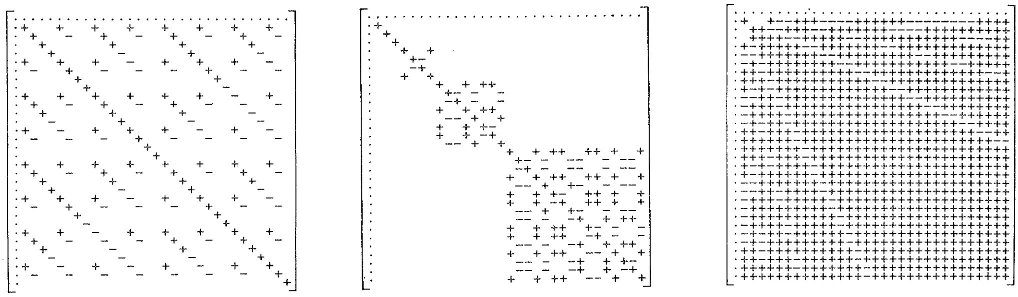
3. シミュレーション

ここでは実際に計算機によりシミュレーションを行ない，再合成像の質および処理速度の点を検討した結果について述べる。シミュレーションでは，計算機内で64x64の大きさの画像を発生し，それを等角度で回転してその射影を計算し，得られた射影を前記3種の直交変換を用いて処理を行ない，逆投影して再合成像を得るという方法を用いた。ただし，各空間でのフイルタ行列は，図2のフーリエ空間の関数形から式(7),(9)を用いてあらかじめ求めておく。

図2のフイルタを他の直交空間へ変換したフイルタ行列は前述した様に，主対角以外にも非零要素をもつ。32x32の行列の場合の各空間での行列を図7に示す。図7で空白および・は零要素を示し，＋－は±1を意味するのではなく，単に要素の符号を表わすだけである。図7から，Walsh-Hadamard空間における行列は零要素が非常に多く，いわゆるスパース行列となっている。フイルタ処理は射影の直交変換ベクトルとこの行列との積を計算するため，計算速度の点からは行列の非零要素の数ができるだけ少ないフイルタの方が乗算回数が少ないため速い。しかし，これは再合成像の質も含めて判断しなければならない。これらの行列の非零要素の割合を表1に示す。64x64～512x512のサイズに対してフイルタ行列を計算した結果，この割合は表1に示す様にほとんど一定であった。

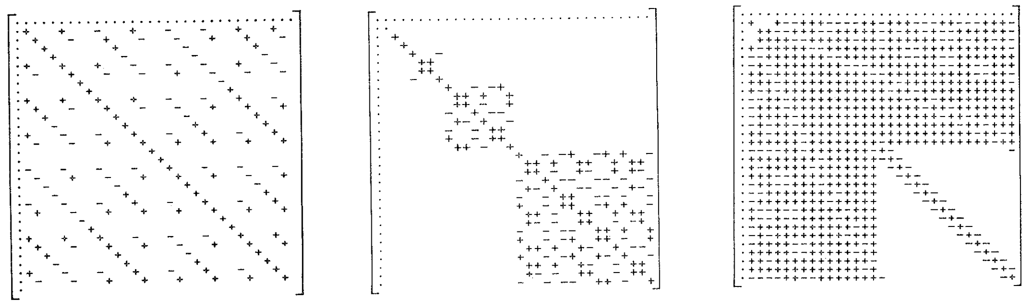
Table 1. Ratio of non-zero elements to total elements for three filter matrices.

Orthogonal domain	Filter F-1	Filter F-2	Filter F-3
Walsh-Hadamard	0.166	0.166	0.084
Haar	0.935	0.731	0.356



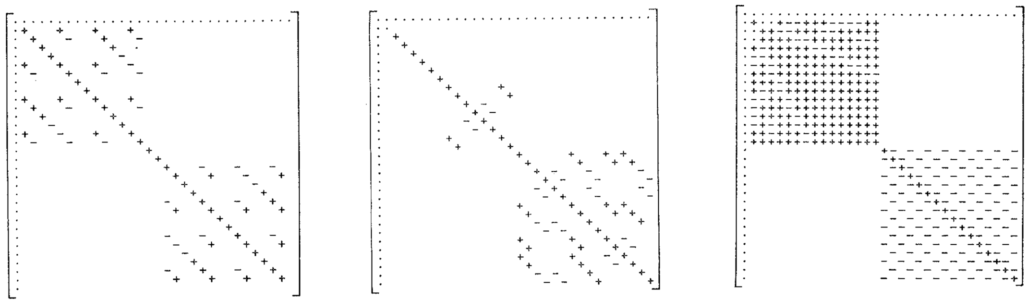
(a) Walsh (b) Hadamard (c) Haar

A: Filter F-1



(a) Walsh (b) Hadamard (c) Haar

B: Filter F-2



(a) Walsh (b) Hadamard (c) Haar

C: Filter F-3

Fig. 7. Examples of Walsh-Hadamard and Haar domain filter matrices, N^2= 32x32. Blank and dot denote zero element, + and - denote sign of element.

3.1 計算時間の比較

再合成像を得るには，全射影に対して1度射影を直交変換し，フイルタ行列を乗じ逆変換し，それを逆投影する。計算時間の比較はフイルタ処理（変換→行列の乗算→逆変換）の部分だけであり，逆投影の計算過程はすべての方法とも共通である。射影数30方向のときの測定値を図8に示す（計算は北海道大学大型計算機センターで行なっ

た）。図８の 512x512 以上のサイズは表１の結果をもとにしてフィルタ処理の計算を行ない，時間を測定した結果である。フィルタ行列との乗算ではスパース行列の性質から，非零要素の値とその各々の位置番号および行方向の非零要素の数を記憶して，計算速度の向上を計った。

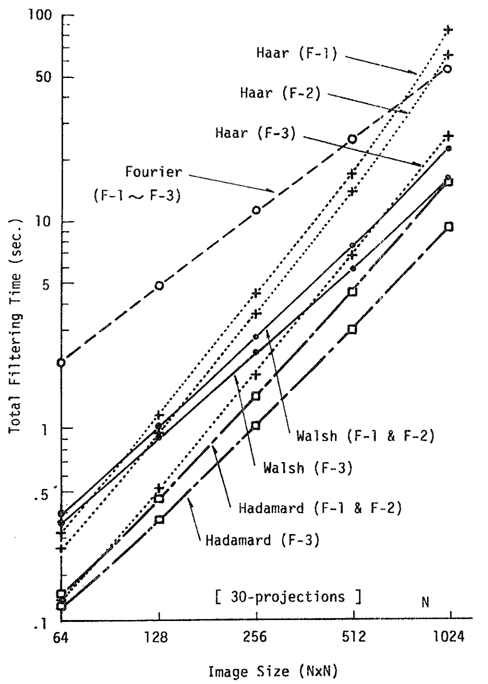


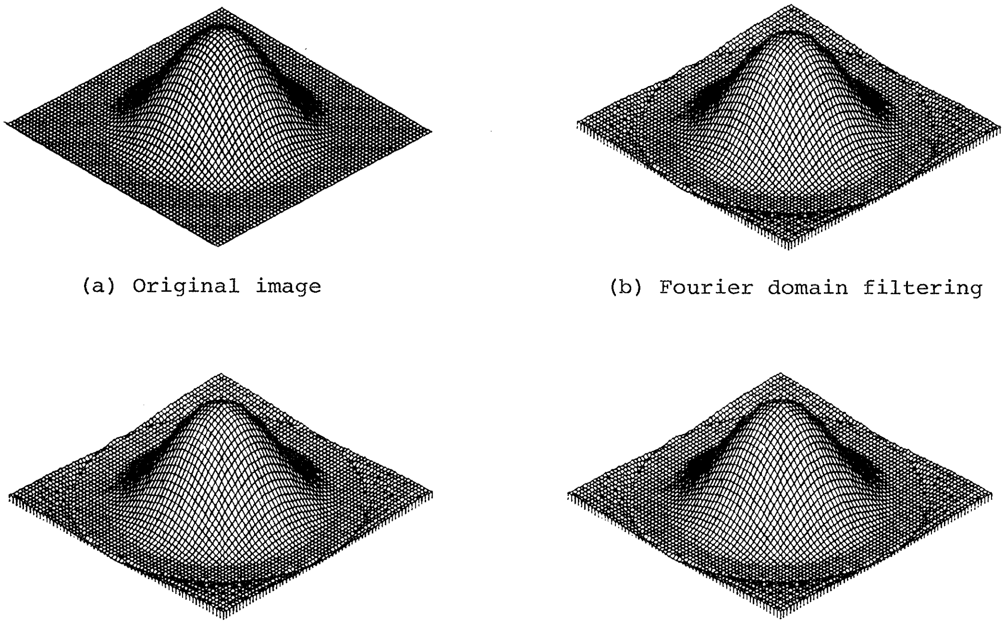
Fig. 8. Comparison of total filtering times for several image sizes and three orthogonal transforms. Frequency characteristics of filter F-1, F-2 and F-3 are shown in fig. 2.

図８から，フイルタF-1，F-2，F-3とも Hadamard変換による処理が速く，その中でもF-3が最も速い。逆に，Haar変換による処理が図６の変換－逆変換のみの時間に比べて非常に遅くなっているのは，フイルタ行列の非零要素の数が Walsh-Hadamard フイルタに比べてかなり多く，フイルタ行列との乗算に時間がかかっているためである。

変換－逆変換だけの演算ではサンプル数をＮとすると，簡単に考えると FFT は $2N\log_2 N$（複素数）回の乗算が必要なのに対して，FWHT では $2N\log_2 N$（実数）回の加減算，FHT では $4(n-1)$（実数）回の加減算で済むため，FHT が最も高速である。しかしながらフイルタ行列との乗算ではフーリエ変換ではＮ（複素数）回の乗算で済むのに対し，他の２つは kN^2（kは表１の値である）（実数）回の乗算が必要である。コンボルーション法ではN^2回の乗算が必要であるから，コンボルーション法に比べると計算時間は FWHT, FHT の方が速い。このことからサンプル点数Nが大きくなるにつれて FFT に比べて，Walsh-Hadamard, Haar 変換による処理が不利になる（コンボルーション法も同じ）。このことは図８からも明らかである。しかしながら実用上の範囲である 1024x1024 程度までならば，Hadamard による処理が最も高速であり，しかも変換が加減算で済むことを考えると本方法による処理が有利であると考える。

3.2 直交変換による再合成像の差

射影データを直交変換することは，フーリエでは sine, cosine 関数系，Walsh-Hadamard では図３,４， Haarでは図５の関数系で展開近似することであるから，次数（サンプル数）一定の場合，一般的に滑らかに変化する波形に対してはフーリエによる展開が近似度が良く，逆に矩形波に近い様な波形に対しては Walsh-Hadamard あるいはHaar 関数系の方が近似度が良くなる。このことから，同一フイルタに対して直交変換により再合成像に差が出てくるかを検討した。非常に滑らかに変化する図形を使い，３種の直交変換（フーリエ，Walsh-Hadamard, Haar ）を用いて再合成した結果を図９に示す。図９の原画像はその中心断面が $1+\cos(\pi R)$（R；半径）で表わされる画像であり，



(a) Original image　(b) Fourier domain filtering

(c) Hadamard domain filtering　(d) Harr domain filtering

Fig. 9. Example of reconstructed images by Fourier, Hadamard and Haar domain filtering with same filter (F-2), N^2= 64x64. Projection number N_Θ= 30.

フーリエ関数系による近似度が最もよく，他の直交関数による近似の方が悪くなると考えられる。図9では3種の処理による再合成像の間には差異は全く認められない。このことは式(7),(9)の関係によりフイルタ行列を求めた結果であり，ベクトルフイルタの効果である。画像のサイズを小さくした場合には差異が現われてくると考えられるが，64x64 以下では実用上意味が無いであろう。

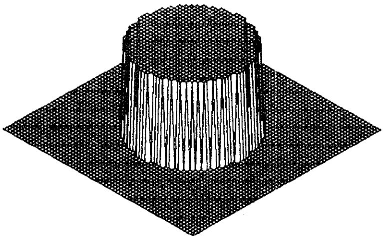
3.3 フイルタによる再合成像の差

FBP法やコンボルーション法ではフイルタあるいは補正関数の形が再合成像の画質に大きな影響を及ぼす。フイルタによる再合成像の差異を調べるため，図2に示した3種のフイルタを用いて phantom imageの再合成を行なった結果を図10に示す。図10の射影数は1°毎で180方向であり，フイルタ処理には Hadamard変換を用いた。図10から，フイルタF-1がノイズが最も多く，以下F-3，F-2の順に少なくなっているのが分かる。また，F-2を用いて射影数を30，60，90，180と変化させたときの再合成像の変化を図11に示す。図11から射影数が少なくなるにつれて，円周方向のリプルが出てくるのが見られる。図11では見やすくするため，画像マトリクス（64x64）に内接する円の外側を零にした。また，逆投影の計算では画素の各点の値を計算する場合，対応する射影点に一致しない時は一次近似を用いた。

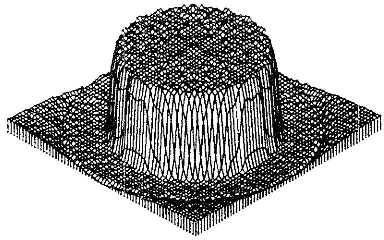
計算時間の点からは図8に示した様にF-3による処理が最も高速であるが幾分リプルがあり，画質が劣るが実用に耐えると考えている。

4. 結言

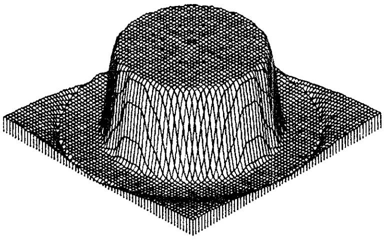
本論文では FBP法による断層像合成を Walsh-Hadamard, Haarの2つの直交変換を用いて高速で計算する方法について検討し，その可能性を示した。



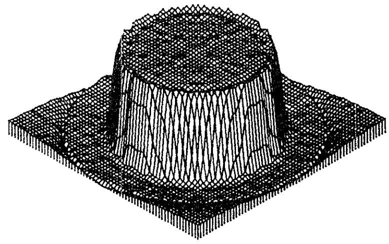
A: Original image



B: Reconstructed image
(Filter F-1; Ramachandran)

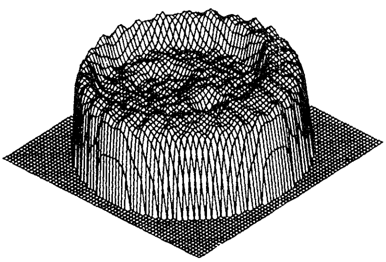


C: Reconstructed image
(Filter F-2; Chesler)

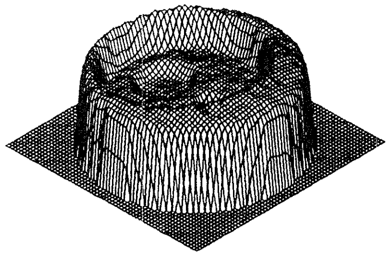


D: Reconstructed image
(Filter F-3)

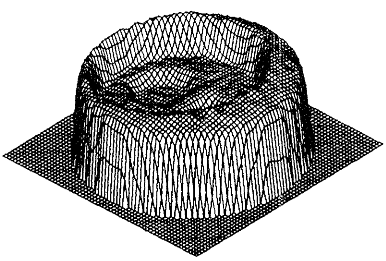
Fig. 10. Example of reconstructed images by three different filters (F-1, F-2 and F-3) with Hadamard domain filtering, image size N^2= 64x64. Projection number N_θ= 180.



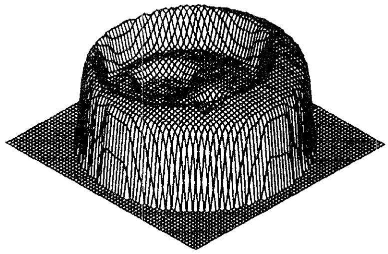
A: 30 projections



B: 60 projections



C: 90 projections



D: 180 projections

Fig. 11. Example of reconstructed images with 30, 60, 90 and 180 projections, image size N^2= 64x64. Hadamard domain filtering and filter function is F-2. Original image is shown in fig. 1.

さらにコンピュータ・シミュレーションにより高速計算の点から求めた新しいフィルタ関数を検討した。従来提案されている関数のうち2種類の関数(Ramachandran, Chesler)を取り上げ，phantom imageを用いて比較を行ない，新しい関数が高速計算に適し，また画質は幾分劣るが実用に耐えることを確認した。

最後に，ここでは逆投影の計算過程を取り上げなかったが，この部分も非常に多くの計算量と計算時間を必要とする。本論文において述べたフィルタ処理の高速化とともに，逆投影の過程の時間短縮も大きな問題である。

本論文の計算は北海道大学大型計算機センター及び当研究所画像処理装置を用いて行なった。

References

1. R. A. Brooks, G. Di Chiro:"Principles of Computer Assisted Tomography (CAT) in Radiographic and Radioisotopic Imaging", Phys. Med. Biol., 21, 5, p.689-732(1976)
2. G. N. Ramachandran, A. V. Lakshminarayan:"Three-dimensional Reconstruction from Radiographs and Electron Micrographs: Application of Convolutions Instead of Fourier Transforms", Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 68, 9, p.2236-2240(1971)
3. R. N. Bracewell, A. C. Riddle:"Inversion of Fan-Beam Scans in Radio Astronomy", The Astrophysical Journal, 150, p.427-434(Nov. 1967)
4. R. A. Crowther, D. J. DeRosier and A. Klug:"The reconstruction of a three-dimensional structure from projections and its application to electron microscopy", °roc. Roy. Soc. Lond., A, 317, p.319-340(1970)
5. Z. H. Cho, I. S. Ahn:"Computer Algorithm for the Tomographic Image Reconstruction with X-ray Transmission Scans", Computers and Biomedical Reseach, 8, p.8-25(1975)
6. Z. H. Cho, J. K. Chan:"A Comparative Study of 3-D Image Reconstruction algorithms with Reference to Number of Projections and Noise Filtering", IEEE Trans., NS-22, p.344-358(Feb. 1975)
7. R. M. Mersereau, A. V. Oppenheim:"Digital Reconstruction of Multidimensional Signals From Their Projections", Proc. IEEE, 62, 10, p.1319-1388(Oct. 1974)
8. L. A. Shepp, B. F. Logan:"The Fourier Reconstruction of a Head Section", IEEE Trans., NS-21, p.21-43(1974)
9. D. A. Chesler, S. J. Riederer:"Ripple Suppresion during Reconstrucion in Transverse Tomography", Phys. Med. Biol., 20, 4, p.632-636(1975)
10. E. Tanaka, T. Iinuma:"Correction Functions for Optimizing the Reconstructed Image in Transverse Section Scan", Phys. Med. Biol., 20, 4, p.789-798(1975)
11. Z. H. Cho, I. S. Ahn, C. Bohn:"Computerized image reconstruction method with photon/X-ray transmission scanning", Phys. Med. Biol., 19, p.511-522(1974)
12. G. S. Robinson:"Logical Convolution and Discrete Walsh and Fourier Power Spectra", IEEE Trans., AU-20, 4, p.271-280(Oct. 1972)
13. H. F. Harmuth:"Transmission of Information by Orthogonal Functions, 2nd ed", Springer-Verlarg, Berlin-Heiderberg-New York, 1972
14. N. Ahmed, K. R. Rao:"Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing", Springer-Verlarg, Berlin-Heiderberg-New York, 1975
15. J. E. Shore:"On the Application of Haar Functions", IEEE Trans., Communications, p.209-216(1973)
16. J. W. Manz:"A Sequency-Ordered Fast Walsh Transform", IEEE Trans., AU-20, 3, p.204-205(Aug. 1972)
17. L. R. Rabiner, C. M. Rader:"Digital Signal Processing", IEEE Press, New York, 1972
18. B. Gold, C. M. Rader:"Digital Processing of Signals", McGraw-Hill, New York, 1969
19. Bede Liu:"Digital Filters and The Fast Fourier Transform",Dowden Hutchinson & Ross, Inc. Strousberg, Pensylvania, 1976