

画像処理における窓関数とその折り返し雑音への影響

田中孝一, 渡辺裕, 橋本周司, 加藤朝一, 大照 完
(早稲田大学理工学部応用物理学科)

1. まえがき

画像を標本化し, 得られた標本値から原画像を復元する場合には画像の持つ, ている空間周波数スペクトルにより標本間隔に制限が課せられる. 今, 図-1 の様な方形格子の交点で画像を標本化するものとする. これは, 画像の前面に格子状に配置されたピンホールのマスクを置き, このマスクを通して画像を映めることと等価である. マスクは Dirac のデルタ関数を用いて

$$p(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-m\Delta x) \delta(y-n\Delta y), \quad (1)$$

と表わされる. ここで $\Delta x, \Delta y$ は x, y それぞれの方向のピンホールの間隔 (標本間隔) である. マスクを通して画像 $f(x, y)$ を映めると

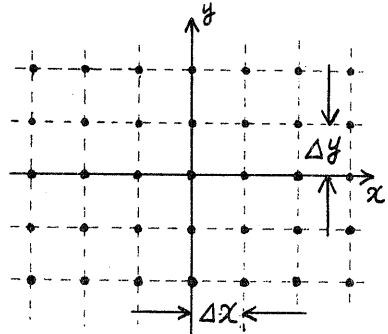


図-1 標本化用方形格子

$$f'(x, y) = f(x, y) p(x, y), \quad (2)$$

が観測される. $f(x, y)$ の空間スペクトルを $F(u, v)$ とすれば $f'(x, y)$ の空間スペクトル $F'(u, v)$ は (1), (2) より

$$F'(u, v) = \Delta u \Delta v \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(u-m\Delta u, v-n\Delta v), \quad (3)$$

$$\Delta u = \frac{2\pi}{\Delta x}, \quad \Delta v = \frac{2\pi}{\Delta y},$$

となる. ここで, 1次元の標本化定理と同様に

$$F(u, v) = 0, \quad u \geq \frac{\pi}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{2}, \quad v \geq \frac{\pi}{\Delta y} = \frac{\Delta v}{2} \quad (4)$$

であれば (図-2) $F'(u, v)$ の $m=0, n=0$ の部分 (原信号と同じスペクトル) とそれ以外の部分 (側帯波) が重なることはなく $f'(x, y)$ を理想的な低域通過フィルタで濾す事により, 1次元の信号を復元すると同様に正確に $f(x, y)$ を復元することができる. これを通常ポイントサンプリングと呼ぶ. しかし, 原画像 $f(x, y)$ が式 (4) を満たさない時, $F'(u, v)$ の側帯波が原信号に重なり, 復元した画像に折り返し雑音の影響が現れる. (図-3) 従って, 画像の空間スペクトルが, 非常に高い空間周波数

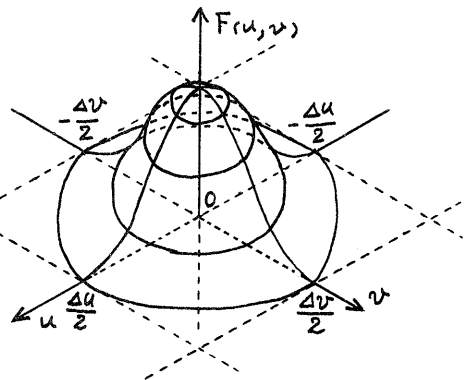


図-2 原画像の空間スペクトル

を含む場合、折り返し雑音の影響なしに画像を復元するためには、標本間隔 $\Delta x, \Delta y$ を小さな値に取らなければならなくなる。標本間隔を細かく取り画像の高周波成分まで復元する事は、標本の個数を増加させ、処理、伝送などを困難にする。一方、人間の視覚の空間周波数特性は高域で低下するため、画像によってはその低域成分のみを忠実に復元できれば十分な場合が多い。

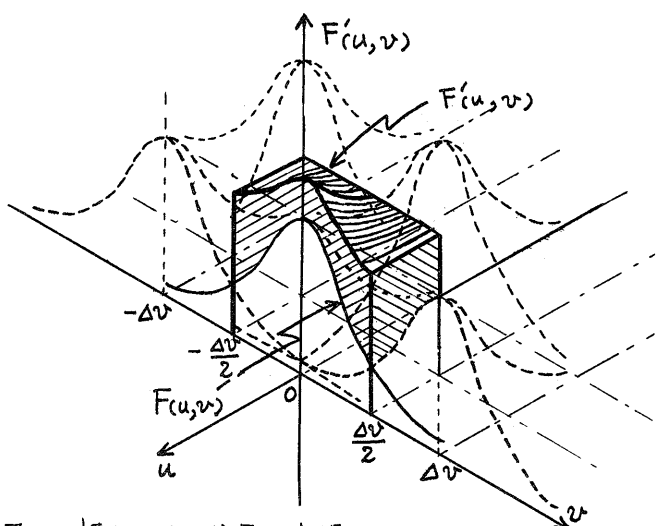


図-3 標本化された信号の空間スペクトル

このためには、標本化する前に画像を低域通過フィルタで波し、あらかじめその高域成分を減衰させたうえで標本化するほうが、画像の様な2次元の信号に対しフィルタをかける事は困難であり一般に行なわれていない。

画像に前も、てフィルタをかけるかわりに式(1)におけるデルタ関数で表わされるピンホールを、有限な大きさを持つアパーチャに変え、 $x = m\Delta x, y = n\Delta y$ を含む標本化用の領域 S_{mn} を定義する。折り返し雑音の一低減法として提案されているインテグラルサンプリングは各標本値をそのアパーチャを通過する画像の輝度の総和と考える⁽¹⁾ (図-4) アパーチャの光の透過率はその原点を中心とする座標 (ξ, η) を用いてアパーチャ関数 $h(\xi, \eta)$ と表わされるものとする。この時、各標本値 f_{mn} は

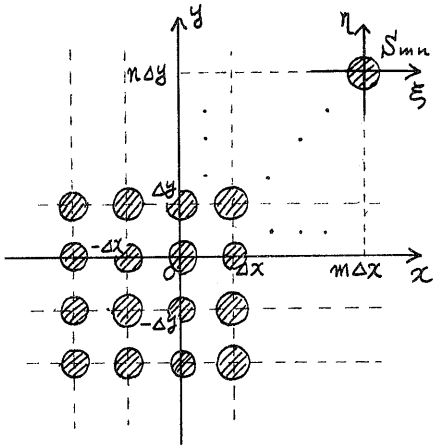


図-4 インテグラルサンプリングのアパーチャ

$$f_{mn} = \iint_{S_{mn}} f(x, y) h(m\Delta x - x, n\Delta y - y) dx dy, \quad (5)$$

で与えられる。各標本値 f_{mn} を各標本点の位置ごとに配列して標本化信号 $\hat{f}(x, y)$ (ポイントサンプリングにおける式(2) $f'(x, y)$ に対応する関数) を得る。

$$\hat{f}(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{mn} \delta(m\Delta x - x) \delta(n\Delta y - y) \quad (6)$$

式(5), (6)より、 $\hat{f}(x, y)$ の空間スペクトル $\hat{F}(u, v)$ は、 $h(x, y)$ のフーリエ変換を $H(u, v)$ として

$$\hat{F}(u, v) = \Delta u \Delta v \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(u - m\Delta u, v - n\Delta v) H(u - m\Delta u, v - n\Delta v), \quad (7)$$

$$\Delta u = \frac{2\pi}{\Delta x}, \quad \Delta v = \frac{2\pi}{\Delta y},$$

と表わされる。ここで $H(u, v)$ が

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & |u| < \frac{\pi}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{2}, \quad |v| < \frac{\pi}{\Delta y} = \frac{\Delta v}{2} \\ 0 & |u| \geq \frac{\pi}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{2}, \quad |v| \geq \frac{\pi}{\Delta y} = \frac{\Delta v}{2} \end{cases} \quad (8)$$

という理想的な低域波特性を持つとは、 $|u| \leq \Delta u/2$, $|v| \leq \Delta v/2$ において原信号を完全に復元できる。しかし、この特性を持つアパーチャは、実空間で無限大の大きさを持ち、さらに透過率が負の値をとるため、実現は非常に困難である。また $H(u, v)$ を式(8)以外の実現可能な形に取った場合、 $\Delta u/2$, $\Delta v/2$ 以下の空間周波数においても $H(u, v) \neq 1$ となるため、復元操作の時 $H(u, v)$ の逆数を用い信号を等化し、復元信号 $\tilde{f}(x, y)$ を得る必要がある。 $\tilde{f}(x, y)$ は周波数空間で

$$\tilde{F}(u, v) = \frac{1}{\Delta u \Delta v} \frac{\hat{F}(u, v)}{H(u, v)} \quad (9)$$

と表わされる。

本論文ではまず始めにアパーチャ関数の形状が折り返し雑音におよぼす影響を考え、さらに折り返し雑音の空間周波数分布について考察し、任意の空間周波数に折り返し雑音の影響をなくする事のできるアパーチャ関数の形状を決定する。次にこのアパーチャ関数による信号の復元結果を検討する。

2 アパーチャ関数の形状と折り返し雑音

以後簡単のため1次元の信号を考え議論を行なう。これは理論的な取り扱いを簡単にしてその構造を明確にすることが目的であるが、画像の x 方向のシーケンシャルサンプリングをして得られた信号の復元または、ラスタースキャン(線走査)し得られた信号の y 方向の復元を行なう場合にはこの1次元の結果がそのまま適用できると思われる。

今、サンプリング間隔を Δu とし ($\Delta u = 2\pi/\Delta x$) 信号の u 。以下の空間周波数成分の復元を考え ($u_0 < \Delta u/2$) 折り返し雑音を低下させる事の可能なアパーチャ関数の形状、幅を考える。アパーチャ関数 $h(x)$ のフーリエ変換 $H(u)$ が u_0 以下の空間周波数で0となる場合、その空間周波数における原画像の復元は不可能である。従って

$$H(u) \neq 0, \quad |u| < u_0 \quad (10)$$

が求めるアパーチャ関数の1つの条件となる。今、アパーチャ関数として、領域 $D(-\Delta/2 < x < \Delta/2)$ 内で一定の透過率を持つ矩形アパーチャ (A_{p1}) を考える。

$$h_I(x) = 1, \quad -\frac{\Delta}{2} < x < \frac{\Delta}{2}, \quad (11)$$

従って

$$H_I(u) = 2 \frac{\sin \frac{\pi}{u_f} u}{u}, \quad u_f = \frac{2\pi}{\Delta}. \quad (12)$$

$H_I(u)$ は $u = n u_f$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) で0となるため、

$$u_f > u_0, \quad \therefore \Delta < \frac{2\pi}{u_0}, \quad (13)$$

となり，矩形アパーチャにおいてはその最大幅を決定する事となる。矩形アパーチャを用いて折り返し雑音を減少させるためには図-5に示す実線が点線より， u_0 以下の空間周波数で大きくなければならぬ。

$$|H_{\text{I}}(u_1)| > |H_{\text{I}}(u_2)| \quad (14)$$

$$|u_1| < u_0$$

$$|u_2| > \Delta u - u_0$$

図-5より矩形アパーチャにおいてはアパーチャ幅 Δ には原信号の持つ高周波成分の量， u_0 ， Δu の選び方により，最適な Δ が存在すると考えられる。また $H_{\text{I}}(u)$ が u_0 以下の周波数で周波数の絶対値の増加と共に減少する関数であることから，折り返し雑音は u_0 以下の空間周波数の高周波側に集中すると思われる。

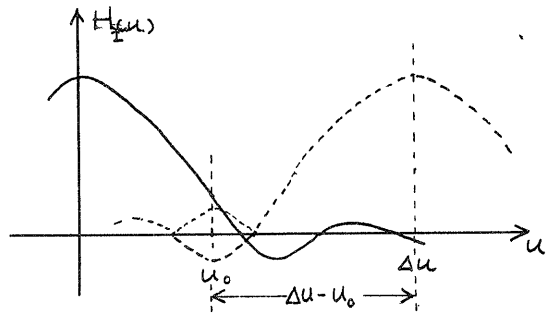


図-5 アパーチャ h_{I} のスペクトル

次に折り返し雑音の空間周波数分布を制御するためにアパーチャの形状を考える。人間の視覚の空間周波数特性は，高域，低域共に低下する。人間の最も感じやすい（眼につきやすい）空間周波数において，折り返し雑音を低下させる事ができれば，復元画像の画質は向上したと等価に思われる。最も感じやすい空間周波数を u_e として，その空間周波数に折り返し雑音が生じないためには，式(7)より

$$H(u) = 0, \quad u = \pm u_e \pm n \Delta u, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

これを満足する $H(u)$ の一例として，

$$H_{\text{I}}(u) = H_1'(u) H_2'(u) \quad (16)$$

$$H_1'(u) = \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta u} (u - u_e)}{u - u_e}$$

$$H_2'(u) = \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta u} (u + u_e)}{u + u_e}$$

を考え（図-6），さらに u_0 以下の全空間周波数における折り返し雑音の低減のため，

$$H_3'(u) = \frac{\sin \frac{\pi}{u_s} u}{u} \quad (17)$$

の効果を加える，ここで u_s はアパーチャの幅を決めるパラメータである。これを正規化し，アパーチャ $H_{\text{II}}(u)$ を得る（ A_{p2} ）。

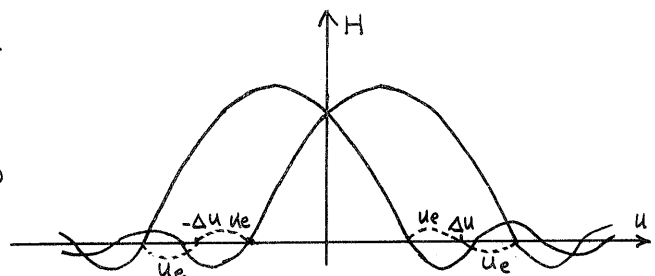


図-6 アパーチャ H_{II} のスペクトル

$$H_{II}(u) = H_1(u) H_2(u) H_3(u)$$

$$H_1(u) = 2u_e \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta u} (u - u_e)}{u - u_e}$$

$$H_2(u) = 2u_e \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta u} (u + u_e)}{u + u_e}$$

$$H_3(u) = 2A \frac{\sin \frac{\pi}{u_f} u}{u}$$

(18)

$$A = \left[2 \cos \left\{ u_e \left(\frac{2\pi}{\Delta u} - \frac{\pi}{u_f} \right) \right\} - \cos \frac{2\pi}{\Delta u} u_e \right]^{-1}$$

このアパーチャは実空間で重畳積分を用い、

$$h_{II}(\xi) = \begin{cases} 2A \left[\cos \left\{ u_e \left(\frac{2\pi}{\Delta u} - \frac{\pi}{u_f} \right) \right\} \cos u_e \xi - \cos \frac{2\pi}{\Delta u} u_e \right] & |\xi| < 2\pi/\Delta u - \pi/u_f \\ A \left[1 - 2 \cos \frac{2\pi}{\Delta u} u_e + \cos \left\{ u_e \left(\frac{2\pi}{\Delta u} - \frac{\pi}{u_f} + |\xi| \right) \right\} \right] & 2\pi/\Delta u - \pi/u_f \leq |\xi| < \pi/u_f \\ A \left[1 - \cos \left\{ u_e \left(\frac{2\pi}{\Delta u} + \frac{\pi}{u_f} - |\xi| \right) \right\} \right] & \pi/u_f \leq |\xi| \leq 2\pi/\Delta u + \pi/u_f \\ 0 & 2\pi/\Delta u + \pi/u_f < |\xi| \end{cases} \quad (19)$$

$h_{II}(\xi)$ の概形を図-7に示す。実空間においてすべての ξ に対し正の値を取り実現の容易な形状をしている。またアパーチャの幅は $2(2\pi/\Delta u + \pi/u_f)$ となり、折り返し雑音をなくした周波数 u_e には関係しない。

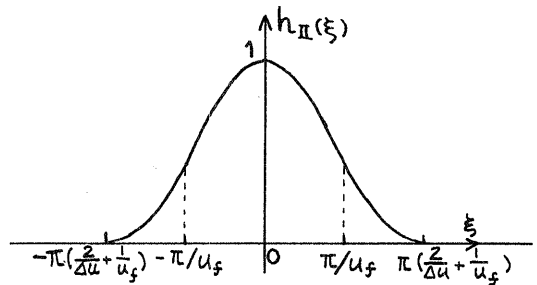


図-7 アパーチャ $h_{II}(\xi)$

3. 誤差の評価

数値計算により、式(19)で与えられるアパーチャ A_{p2} と矩形アパーチャ A_{p1} を同一の標本化周波数 $\Delta u = 2u_0$ の下と比較した。画像が u_0 以上の周波数帯に一定値 ε の成分を持つ場合、

$$F_I(u) = \varepsilon, \quad |u| \geq u_0. \quad (20)$$

と u_0 以上の周波数帯で指数関数的に減少する場合(図-8)

$$F_{II}(u) = \varepsilon 2^{-|u/u_0|}, \quad |u| \geq u_0. \quad (21)$$

について、復元画像 \tilde{f} と原画像 f の空間周波数 u 以下の帯域における2乗平均誤差の総和 E を図-9, 図-10に示す。実線は A_{p1} における E , 破線は A_{p2}

におけるEを表わし、横軸 Δ 、 Δ' はそれぞれ A_{p1} 、 A_{p2} のアーチ幅を示す(A_{p2} においては $\Delta' = 2\pi/u_f$ とする.)

A_{p2} においてEは広い範囲で変化しない、しかし A_{p1} では大きく変化し、 $1/\pi/u_0$ または、 $1.16\pi/u_0$ において極小点を持つ。したがって A_{p2} は最適なアーチ幅は A_{p1} の場合と比較し

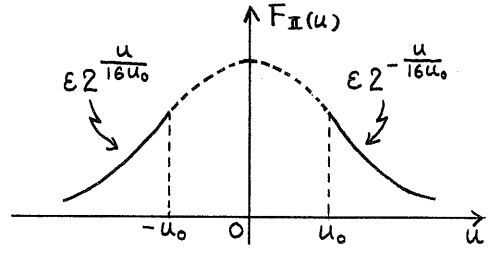


図-8 入力画像 $F_{II}(u)$

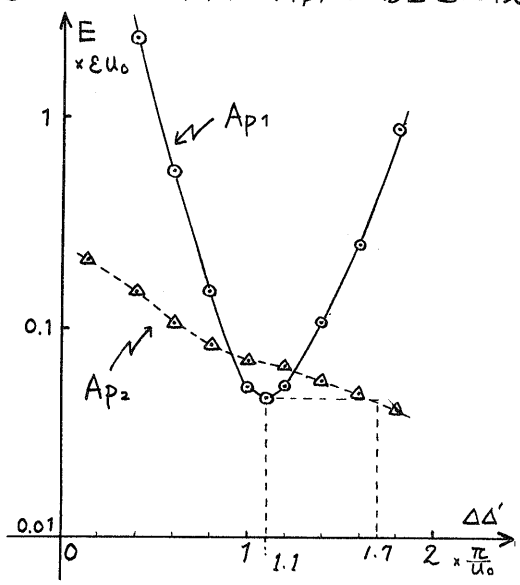


図-9 2乗平均誤差E (原画像 F_I)
 $u_e = 0.5u_0$

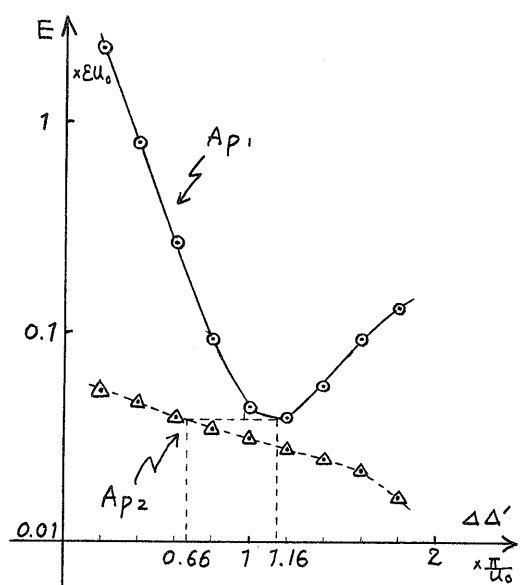


図-10 2乗平均誤差E (原画像 F_{II})
 $u_e = 0.5u_0$

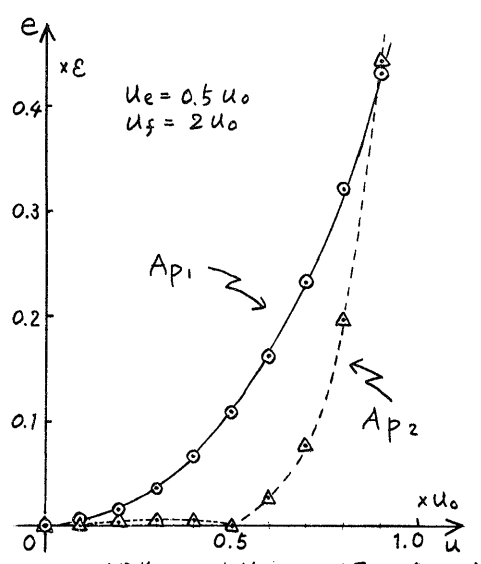


図-11 誤差の周波数分布 (原画像 F_I)

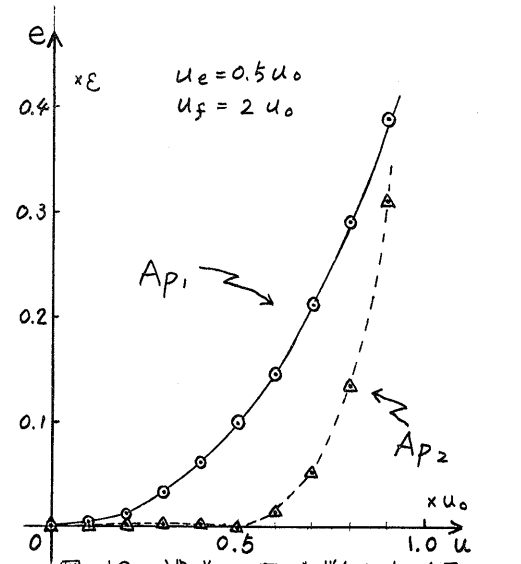


図-12 誤差の周波数分布 (原画像 F_{II})

余裕がある。

A_{p2} における誤差の総和は、 A_{p1} における誤差の総和を $\Delta' > 1.7\pi/u_0$ 、または、 $\Delta' > 0.66\pi/u_0$ と選ぶは“越える”事はない。さらに A_{p2} は特定の周波数 u_e において折り返し雑音を排除できるが、 A_{p1} では不可能である。 $u_e = u_0/2$ 、 $\Delta' = 2\pi/u_0$ とした時の復元信号 $\tilde{f}_x(u)$ 、 $\tilde{f}_x(x)$ の折り返し雑音の空間周波数分布を図-11、図-12に示す。折り返し雑音の大きさは、 A_{p2} では、 u_e 以下の空間周波数においてはほとんど“0”で、高周波の領域で増加する事がわかる。 $\Delta = 2\pi/u_0$ とした、 A_{p1} における折り返し雑音との比較では u_e 以下の空間周波数で大きく改善されているわかる。ここで A_{p2} の場合、前述の特定の空間周波数 u_e の変化はアパーチャの幅にはよらずその形状で決定される。

4. 実験と検討

例として画像 $f(x)$ を次の2通りに選ぶ、

$$i) f(x) = 5 \cos \pi x + 3 \cos 5\pi x + 2 \cos 8\pi x \quad (22)$$

$$ii) f(x) = 5 \cos \pi x + 4 \cos 4\pi x + 5 \cos 5\pi x + 4 \cos \frac{13}{2} \pi x \quad (23)$$

通常のサンプリングとインテグラルサンプリングを用いて空間周波数 u が 3π 以下の信号 $\tilde{f}(u)$ の復元を試みた。インテグラルサンプリングには A_{p1} と A_{p2} の2種を用い、 A_{p2} の幅 Δ' は $1/3$ 、 A_{p1} の幅は $2/3$ とした。サンプリング間隔 Δx は $1/3$ 、 u_s は 3π 、 u_e は π とした。

シミュレーションの結果を図-13、図-14に示す。インテグラルサンプリングによる復元画像は通常のサンプリングに比べて、

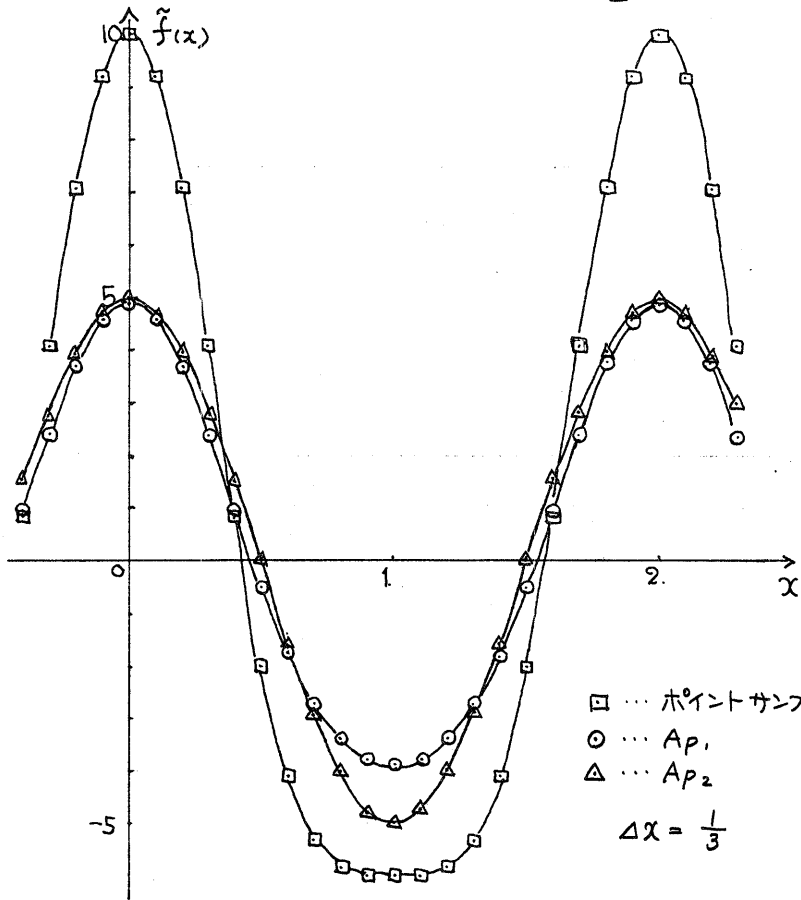


図-13 i)の画像に対する復元画像 \tilde{f}

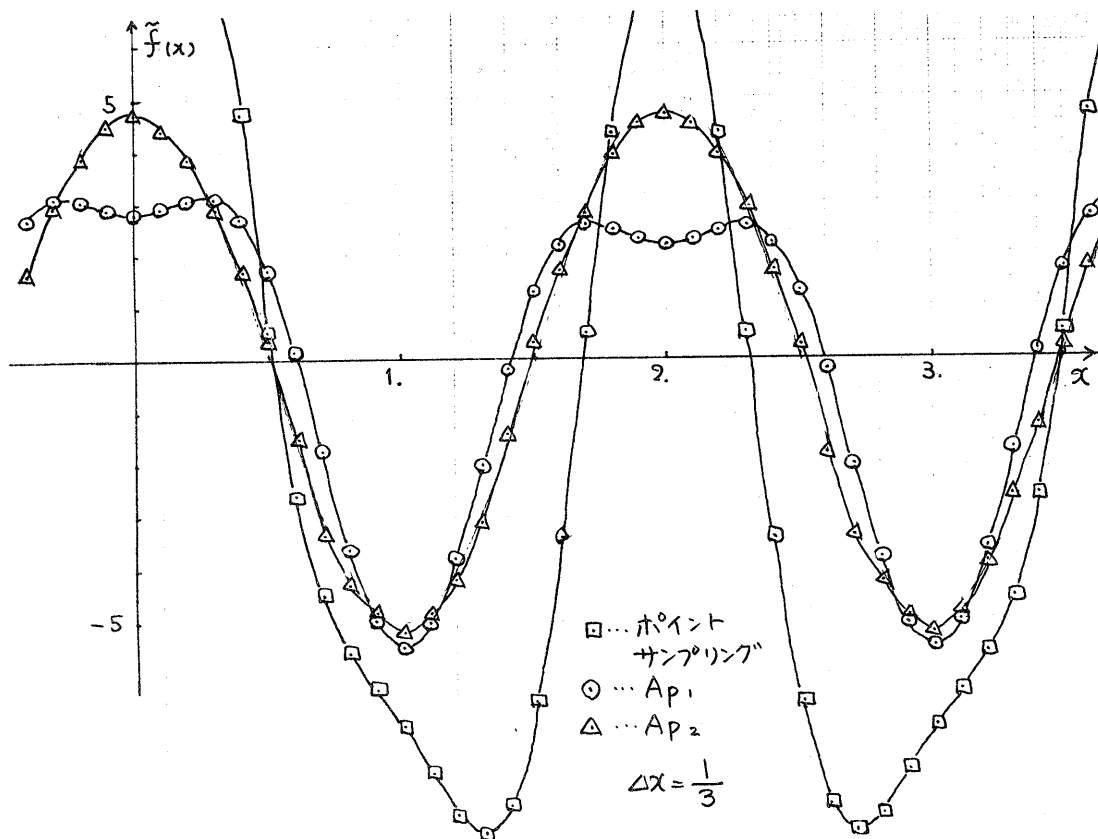


図-14 ii)の画像に対する復元画像 \tilde{f}

いずれの場合も原画像に忠実なものが得られている。またインテグラルサンプリングでは A_{p2} の方が A_{p1} より良い復元画像が得られている。

また、 $h(x)$ の形を決める事は、加重平均の重みを決める事である。アパーチャ関数 A_{p1} はすべての点への等荷重を意味し、 A_{p2} では荷重が図-7に示す様な標本点からの距離の関数となっている。

5. 結論

本論文では、高い空間周波数成分を含む原像を標本化定理を満足しない標本間隔でインテグラルサンプリングした時、アパーチャの幅、アパーチャ関数の形状が折り返し雑音に与える影響を考察した。折り返し雑音の量は A_{p2} ほどアパーチャの幅によらず主にその形状によることが明らかにされた。特定の空間周波数 u_c において折り返し雑音を低減させることができ、低空間周波領域において、原画像との2乗誤差の少ないアパーチャ関数の決定法を提案した。またこの決定法に基づき矩形アパーチャに比べて折り返し雑音を低減することのできる実現可能な一のアパーチャを見出した。

この理論の具体的な一例として、フライングスポットスキャナー (FSS) 及びドラムスキャナーの様なスリットを用いるスキャナーを考えこみよう。FSS のスポットの輝度分布は CRT のほけにより式(19)と類似しており、これに対しスリットではアパーチャ内の透過率は一定で矩形関数で表わされるため、本文での議論と同じ条件の下で画像の低周波成分のみの再成を考えると、FSS を

用いればスリットスキャナと比較してより忠実な復元画像を得る事ができることがわかる。また矩形関数で表わされるアパーチャはその幅の選び方によ、折り返し雑音の量が大きく変化する。従、このアパーチャ幅の一定な装置で空間周波数の高い画像をサンプリングするときは、特に注意が必要となる。逆に画像を鮮明にするため極度にスポットサイズを小さくすると、折り返し雑音の予期せぬ増加がおこりうる事が明らかにされた。

なお、標本系列をFFTを用いてスペクトル解析する際に、積分範囲が有限なために生ずる誤差を低減する手段としてデータ系列に重み付けを行う方法がある⁽²⁾。この重み付け関数として、ハミング窓、ガウス窓等が知られているが、数学的にはこれらは本論文のアパーチャ関数と同じ効果を持つと思われる。画像の標本化にこれらの窓関数をアパーチャとして用いた場合と、本文で提案したアパーチャとの比較を検討中である。

参考文献

(1) W. Schneider and W. Fink : "Integral Sampling in Optics" *Optica Acta*, vol. 23, No. 12, p.p 1011-1028, (1976)

(2) 電子通信学会編 : "ディジタル信号処理" コロナ社, 第2章, (昭和51年)