

多面体透視図の大域的構造の解析

杉原 厚吉 (電子技術総合研究所)

1. はじめに—問題の所在

透視図の性質は図学や遠近画法において古くから調べられてきたが、そこでの目的は既知の3次元形状を2次元平面に“記述”することであった。一方、最近になって、人間の描いた絵や3次元シーンの画像を計算機で解析する研究が始められ、そこでは与えられた線画から立体を“再構成”するという新しい問題が生じてきている。しかし、最も簡単な多面体の線画に限ってみても、線画が正しいか否かを判定する問題すら完全には解けていなかった。本報告では、この問題に実用的な手続きを伴った解答を与えるとともに、関連するいくつかの問題を解決する。

多面体線画の解析は、“局所的解析”と“大域的解析”に二分することができる。図1(a)のような線画を計算機で解析するためには、まず、(b)に示すように各稜線の物理的性質(十印、一印、矢印はそれぞれ凸稜、凹稜、輪郭を表す)を決定し、頂点・稜線・面の間の隣接関係を決定しなければならない。このための手法は、基本的多面体の線画に関して最初に Huffman [1] と Clowes [2] が提案し、その後、陰影線付きの線画 [3]、隠れ線付きの線画 [4]、折紙細工の線画 [5] 等に拡張されている。そこでは、頂点の形という局所的な性質を主な手懸りとして利用するため、この段階の解析を局所的解析と呼ぶことができる。ところで、隣接構造がわかったからといって線画の解析が完了するわけではない。図1(b)の線画は三角錐台を表しているように見えるかも知れないが、実はいかなる多面体をも表していないというのは、もしこれが平面のみからなる物体を表しているなら、三つの平面は空間の1点で交わるという事実から、側面の3本の稜線は1点で交わるはずなのに、実際には(c)のように交わらないからである。このように、線画が正しく多面体を表しているか否かを調べるためには、線画の“大域的性質”

も解析しなければならない。このための手段として作図による方法 [1], [6] が提案されているが、これは線画が正しいための必要条件に過ぎないので不十分なものである。これに対して、本報告では、線画の大域的解析のための代数的・組合せ論的接近法を提案し、正しい線画を判定する問題に完全な解を与えるとともに、関連するいくつかの重要な問題をも解決する。

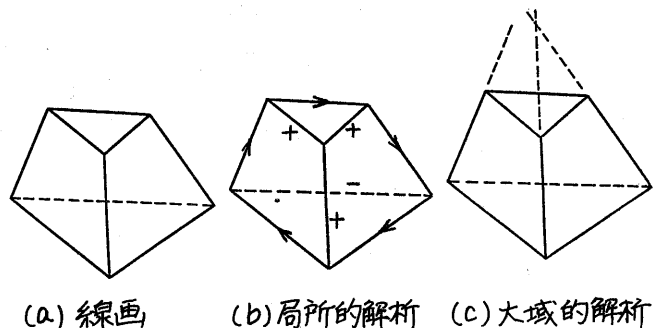


図1. 多面体線画の解析

2. 代数的性質—理論的な解

本節では、多面体線画の代数的構造を明らかにする。これは、既発表 [7] [8] を要約し

たもので、次節以降の議論の出発点となる。

図2に示すように、3次元デカルト座標系 (x, y, z) に対して静止している多面体を $x-y$ 平面へ正射影して得られる線画を考える。多面体は視線方向 (z 軸) に対して一般の姿勢に置かれているものとし、頂点と面の隣接関係および稜線の物理的性質 (凹凸等) は与えられているものとする。

線画に描かれた多面体の頂点の集合を $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 、面の集合を $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ 、頂点と面の隣接関係の集合を $R = \{r_1, \dots, r_l\} \subseteq V \times F$ とする。頂点 $v_i \in V$ の座標を (x_i, y_i, z_i) ($i=1, \dots, n$) とし、面 $f_j \in F$ の方程式を

$$a_j x + b_j y + z + c_j = 0 \quad (j=1, \dots, m)$$

とする。この方程式では z 軸に平行な平面を表現できないが、多面体は一般の姿勢に置かれているものと仮定しているから不都合は生じない。

頂点 v_i が面 f_j の上にあるという隣接関係は

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j = 0 \quad (1)$$

で表され、 x_i と y_i は線画が与えられると決まる定数だから、この式は未知数 z_i 、 a_j 、 b_j 、 c_j に関する線形方程式である。隣接する頂点と面のすべての対 (すなわち R の要素) に対して同様の方程式が得られるから、それらをまとめて

$$A \vec{w} = \vec{0} \quad (2)$$

を得る。ただし、 \vec{w} は未知数を並べた列ベクトル $\vec{w} = {}^t(z_1 \dots z_n, a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m)$ であり、 A は線画から決まる $l \times (n+3m)$ 定数行列である。(2) を線画の“基本方程式”と呼ぶ。

注意1 一般の透視図 (有限の距離に視点を置いてとらえられる線画) の場合でも同様の線形方程式が得られる。図3のように視点 (射影の中心) を原点とし、線画を $z=1$ の上に固定する。線画上の第 i 頂点の位置ベクトルを $\vec{p}_i = (x_i, y_i, 1)$ とすると、多面体上の対応する頂点の位置ベクトルは $\vec{v} = \vec{p}_i / t_i$ と表される。ただし t_i はスカラーである。一方、第 j 面の方程式を $\vec{\alpha}_j = (a_j, b_j, c_j)$ をパラメータとして $\vec{\alpha}_j \cdot \vec{v} = -1$ と書くことにする。この方程式では原点 (すなわち視点) を通る平面を表すことができないが、多面体は一般の姿勢に置かれているものと仮定しているから不都合はない。すると第 i 頂点が第 j

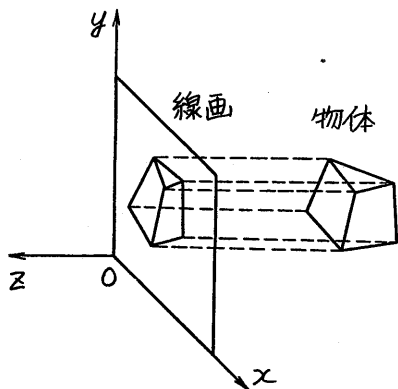


図2. 多面体とその正射影図

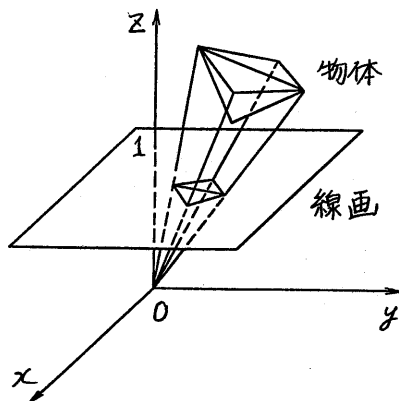


図3. 多面体とその中心射影図

面の上にあるという隣接関係は $\vec{a}_j \cdot \vec{p}_i + t_i = 0$ と表され、成分表示に置替えると

$$a_j x_i + b_j y_i + c_j + t_i = 0 \quad (3)$$

となる。これは未知数 t_i, a_j, b_j, c_j に関する線形方程式で、式(1)と同じ形式である(ただし未知数の意味は少し異なる)。すなわち、線画を正射影図とみなしても透視図とみなしても、代数構造上の差はない。従って、以下では正射影図とみなして議論を進めるが、結果はすべて一般の透視図においても成立つ。□

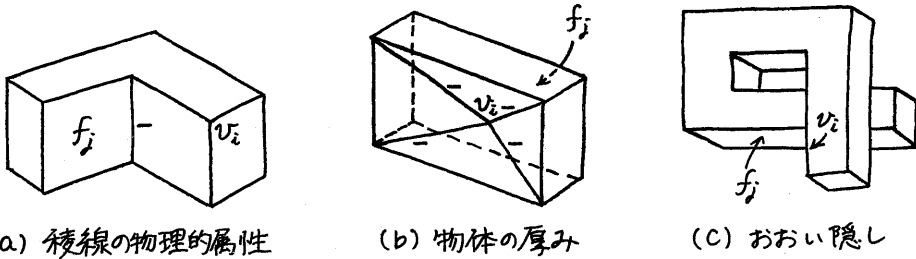
線画の構造の中には、要素間の遠近関係を表す手懸りがある。図4(a), (b), (c)の線画では、それぞれ、面が凹まは凸に交わっていること、物体に厚みがあること、物体の一部が他の部分に隠されていることにより、いずれの場合も“頂点 v_i は面 f_j より視点に近い”ことがわかる。この性質は

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j > 0 \quad (4)$$

と表される。これは未知数 z_i, a_j, b_j, c_j に関する線形不等式である。このような不等式をすべて集めたものを

$$B \vec{w} > \vec{0} \quad (5)$$

と書く。ただし、 \vec{w} は式(2)と同じ未知数ベクトルであり、 B は線画から決まる定数行列である。また、不等号はベクトルの成分ごと成立つものとする。式(5)を線画の“遠近不等式”と呼ぶ。



(a) 稜線の物理的屬性

(b) 物体の厚み

(c) おおい隠し

図4. 遠近関係の手懸り

線画が正しく多面体を表すためには、式(2), (5)を同時に満たす解が存在しなければならない。逆に(2), (5)を満たす解が存在すれば、それをもとにして多面体を作ることができる。従って、次の定理が得られる。

定理1 (多面体線画の代数的構造) 隣接構造の既知な線画が正しく多面体を表すための必要十分条件は、(2)と(5)を同時に満たす解が存在することである。□

(2)と(5)を満たす解を求める問題は、式(5)を少し変形することによって、線形計画法の実行可能解を見つける問題に帰着できる[7][8]。そして、実行可能解の存在を確かめる手法は単体法として確立されている[9]。従って、線画が正しく多面体を表すかどうかの判定問題は“原理的”にはこの定理によって解決されたことになる。

しかし、この定理はこのままでは実用的ではない。なぜなら、行列 A を構成する行ベクトルの中に他の行ベクトル集合に從属なものが含まれる場合には、数値計算の誤差によって A の階数が正しくない値になってしまい、解の存在が正しく決定できないからである。この問題を解決し正しい線画を判定するための実用的手続きを得るためには、次節で考察する組合せ論

的性質を利用しなければならない。

隣接関係集合 R の任意の部分集合 $X \subseteq R$ に対して、 X の要素に対応する行列 A の行ベクトルの集合を $A(X)$ と書くと、

$$\rho_R(X) \equiv \text{rank}(A(X)) \quad (6)$$

は、 X に属する隣接関係のうち独立なものの個数を表す。また、第 i 成分が 1 で他の成分が 0 であるような $n+3m$ 次元の行ベクトルを \vec{e}_i とすると、任意の $Y \subseteq V$ に対して

$$\rho_V(Y) \equiv \text{rank}(A(R) \cup (\bigcup_{v_i \in Y} \{\vec{e}_i\})) - \text{rank}(A(R)) \quad (7)$$

は、 Y に属する頂点のうち勝手に —— ただし遠近不等式を乱さない範囲で —— Z 座標を与えることのできる頂点の個数を表す。任意の $Z \subseteq F$ に対して

$$\rho_F(Z) \equiv \text{rank}(A(R) \cup (\bigcup_{f_j \in Z} \{\vec{e}_{m+3j-2}, \vec{e}_{m+3j-1}, e_{m+3j}\})) - \text{rank}(A(R)) \quad (8)$$

は、 Z に属する面のパラメータのうち勝手に —— 遠近不等式を乱さない範囲で —— 値を与えることのできるものの個数を表す。

注意 2 ベクトルの独立・従属に関する性質を一般化した概念として“マトロイド”、“ポリマトロイド”と呼ばれる構造がある[10]。式(6)、(7)、(8)で定義された整数値関数によって、集合 R, V はマトロイド、集合 F はポリマトロイドとなる。マトロイド・ポリマトロイドの立場からこれらの構造を眺めることによって、“どのようなパラメータの組が勝手に指定できるか”とか“一部のパラメータの値を指定すると他の値がどのぐらい制約を受けるか”という問題を見通しよく扱うことができる[11]。 □

3. 組合せ論的性質 —— 実用的な解

頂点の集合 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 、面の集合 $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ 、頂点と面の隣接関係の集合 $R = \{r_1, \dots, r_k\} \subseteq V \times F$ からなる三つ組 $S = (V, F, R)$ を線画 —— あるいはそれに対応する多面体 —— の“隣接構造”と呼ぶ。おのおのの頂点は1個以上の面の上にあり、おのおのの面は3個以上の頂点を持つものとする。

隣接構造 $S = (V, F, R)$ の頂点が線画平面上で一般の位置に描かれているとき、2個以上の面が一致することなく面と頂点を空間に配置できるならば、 S は“正則”であるという。

正則という概念は、無限に広がった平面の集合とそれらの交点の集合に関するものである。すなわち、いくつかの平面を空間に配置し、それらの交点の正射影(または中心射影)が与えられた線画の頂点の位置と一致するようにできるか否かを問題にするわけである。これは基本方程式(2) —— ただし頂点が一般の位置に描かれていると考える、すなわち、行列 A に現れる $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$ を不定元とみなす —— の解で“すべての面が互いに異なる”という条件を満たすものが存在するか否かを問題にすることと等価である。

次の定理は本報告の中で最も重要なものである。(証明は文献[11]にゆずる。)

定理 2 (正則性定理) 隣接構造 $S = (V, F, R)$ が正則であるための必要十分条件は、 $|X| \geq 2$ を満たすすべての $X \subseteq F$ に対して $\mu_S(X) \geq 0$ となることである。ただし

$$\mu_S(X) \equiv |V(X)| + 3|X| - |R(X)| - 4 \quad (9)$$

であり、 $V(X)$ は X に属するいずれかの面に載っている頂点の集合、 $R(X)$ は X に属するいずれ

かの面に関する隣接関係の集合である。□

この定理の重要性は、隣接構造が正則であるか否かを組合せ論的計算のみによって判定できるという“実用性”にある。これを利用すると、前節で定義した諸量を実際に求めるための実用的算法を構成することができる。証明は[11]にゆずり結果だけを掲げる。

定理3 (線画の基本的諸量の組合せ論的特徴づけ) 頂点が線画上で一般の位置に描かれている場合には、式(6), (7), (8)で代数的に定義された量はそれぞれ次のように隣接構造に関する組合せ論的計算のみによって求めることができる。($X \subseteq R, Y \subseteq V, Z \subseteq F$ とする。)

$$\rho_R(X) = \max \{ |X'|; X' \subseteq X, S' = (V, F, X'), \mu_{S'}(Z) \geq 0 \text{ for } \forall Z \subseteq F \}, \quad (10)$$

$$\rho_V(Y) = \max \{ |Y'|; Y' \subseteq Y, |V(Z)| + 3|Z| - |\hat{R}(Z)| - |V(Z) \cap Y'| \geq 0 \text{ for } \forall Z \subseteq F \}, \quad (11)$$

$$\rho_F(Z) = \max \{ |X|; X \subseteq V(Z), |V(Z)| + 3|Z| - |\hat{R}(Z)| - |V(Z) \cap X| \geq 0 \text{ for } \forall Z' \subseteq F \}. \quad (12)$$

ただし、 $\hat{R} \subseteq R$ は構造 $\hat{S} \equiv (V, F, \hat{R})$ が正則となるような極大な隣接関係の集合の任意の一つであり、 $\hat{R}(Z)$ は構造 \hat{S} において Z に属するいずれかの面にかかわりのある隣接関係の集合である。□

定理3はこのままでは効率が良いとはいえない。式(10), (11), (12)で最も基本となるのは、隣接構造が正則であるか否かの判定であるが、定理2に沿ってこの判定を実行しようとすると、その手間は面の数の指数関数に比例して増大する。しかし、定理2を少し変形することによって、次に示すように、隣接構造の大きさの多項式関数に比例する時間で正則性を判定することができる。

点集合 N_1, N_2 , 辺集合 W からなる二部グラフ $G = (N_1, W, N_2)$ を次のように定義する。

$$N_1 \equiv R,$$

$$N_2 \equiv \{z_1, \dots, z_m, a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m\},$$

$$W = \{(x, z_i), (x, a_j), (x, b_j), (x, c_j) \mid x = (v_i, f_j) \in R\}.$$

すなわち、 N_1 は基本方程式の集合、 N_2 は変数の集合、 W は“ある方程式がある変数を含む”という関係の集合である。次に、 $1 \leq i < j \leq m$ を満たす任意の i, j に対して、 G に4個の点と4個の辺を加えてできる二部グラフ $G_{ij} = (\bar{N}_1, W_{ij}, N_2)$ を次のように定義する。

$$\bar{N}_1 \equiv N_1 \cup \{t_1, t_2, t_3, t_4\},$$

$$W_{ij} \equiv W \cup \{(t_1, a_i), (t_2, b_i), (t_3, a_j), (t_4, b_j)\}.$$

二部グラフ $G_{ij} = (\bar{N}_1, W_{ij}, N_2)$ の辺の部分集合 $U \subseteq W_{ij}$ が、“ U に属する辺の端点はすべて異なり、 \bar{N}_1 のすべての点は U に属するいずれかの辺の端点となっている”という性質を持つとき、 U は G_{ij} の \bar{N}_1 に関する“完全マッチング”と呼ばれる。

以上の準備のもとで次の定理が得られる。(証明は文献[11]を参照。)

定理4 (多項式オーダの手間による正則性判定法) 隣接構造 $S = (V, F, R)$ が正則であるための必要十分条件は、 $1 \leq i < j \leq m$ を満たす任意の i, j に対して二部グラフ $G_{ij} = (\bar{N}_1, W_{ij}, N_2)$ が \bar{N}_1 に関する完全マッチングを持つことである。□

各二部グラフ G_{ij} が完全マッチングを持つか否かの判定は、グラフの大きさ(点や辺の数)の3乗に比例する時間でできることが知られており[12]、 G_{ij} ($1 \leq i < j \leq m$) の種類数は面の数の2乗に比例する。従って、定理4に従うと、隣接構造の大きさの5乗に比例する時間で正則性を判定することができる。

定理1に述べた正しい線画の判定法は、本節の結果と組合せることによって初めて実用

的な判定法となる。線画を入力する際のライトペンやデータタブレットの分解能が有限であることおよび計算機内で表現される実数の有効ケタ数が有限であることを考えると、正則でない線画は本質的に頂点位置誤差を含んでいるとみなすべきであろう。そこで、頂点位置のわずかな誤差は無視して、稜線の凹凸から導かれる遠近関係に矛盾がないかどうかを確かめることに目的を制限すれば、次のような手続きを構成することができる。すなわち、与えられた線画から任意の極大な正則部分構造 $\hat{S} = (V, F, \hat{R})$ ($\hat{R} \subseteq R$) を取り出し、 \hat{S} に関する基本方程式

$$A(\hat{R}) \vec{w} = \vec{0} \quad (13)$$

を作る。この方程式系は、最初の構造 S に関する基本方程式において本質的な条件はすべて含み、しかも線形独立である。従って、(2) と (5) を組合せる代わりに (13) と (5) を組合せて線形計画法の実行可能解を求める問題に帰着できる。この場合には $A(\hat{R})$ の行ベクトル集合は線形独立だから、数値計算の誤差によって実行可能解の存在が乱されることはない。従って、これは実用的な算法である。

4. 計量的性質 — いくつかの応用

本節では、線画が正しく多面体を表すために頂点の座標値が満たすべき関係を考察し、線画の修正等に利用する。

隣接構造が正則ならば、頂点が線画平面上で互いに一般の位置にあってもその線画を透視図として持つ構造を3次元空間に構成することができる。一方、構造が正則でないときは、それを3次元空間に構成できるようにするには頂点が線画平面上で特別な位置関係になければならない。この性質を利用すると、3次元形状を知らなくても線画の頂点位置の誤差を修正したり描かれていない部分を推測したりできる。

構造 $S = (V, F, R)$ の頂点位置が線画平面上に与えられ、それが正しくないとする。すなわち、この線画に関する基本方程式は“すべての面が異なる”という解を持たないとする。このとき、隣接関係の集合 R からいくつかの要素を除いて — すなわち拘束条件を減らして — いくと、正則な構造に到達する。そのような正則な構造は、3次元空間での面の配置として実際に構成することができる。そして、これらの面の交点として、除いた隣接関係にかかわる頂点の正しい位置が3次元空間で求まり、それを線画平面へ射影することによって、線画平面上での頂点の正しい位置を求めることができる。正確に表現すると、次の定理が成立つ(証明は文献[11]を参照)。

定理5 (頂点位置誤差の修正) 隣接構造 $S = (V, F, R)$ の頂点位置が線画平面上で与えられているとする。 F に属する非三角形面 (4個以上の頂点を持った面) の集合を F_0 とする。ある $\hat{R} \subseteq R$ に対して構造 $\hat{S} = (V, F, \hat{R})$ が正則で、かつ任意の $(v, f) \in R - \hat{R}$ が $|(v \times F_0) \cap R| \leq 3$ を満たすとき、 $\{v\} \times F_0$ に属する頂点のみの位置を線画平面上で修正することによって構造 S の正しい線画を作ることができる。 \square

また、正しい位置の任意性に関しては次の定理が成立つ。

定理6 (修正の任意性) 隣接構造 $S = (V, F, R)$ の正しい線画が与えられているものとする。 $\nu(S) \equiv |R| - \int_R(R)$ とおく ($\nu(S)$ を S の“過剰拘束度”と呼ぶ)。ある頂点 $v \in V$ に対して、構造 $(V - \{v\}, F, R - \{v\} \times F)$ が正則ならば、線画平面上での頂点 v の微小変動に関して次の性質が成立つ。

$\nu(S)=0$ のとき, v をどの方向へ動かしても線画は正しい。

$\nu(S)=1$ のとき, v を通るある直線が存在し, その方向へ v を動かしたときのみ線画は正しい。

$\nu(S) \geq 2$ のとき, どの方向へ v を動かしても線画は正しくなくなる。 □

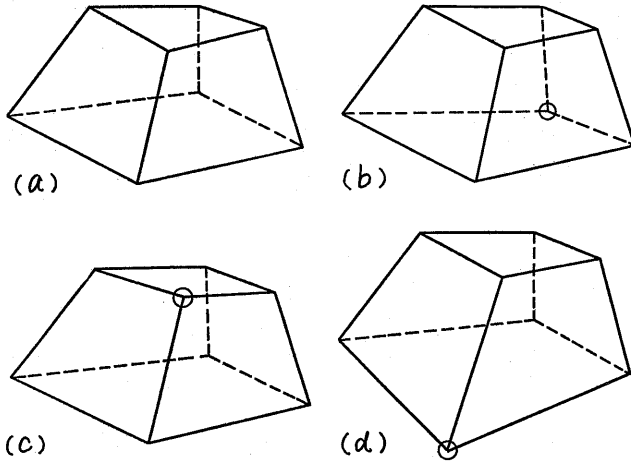


図5. 過剰拘束度が2の線画の修正

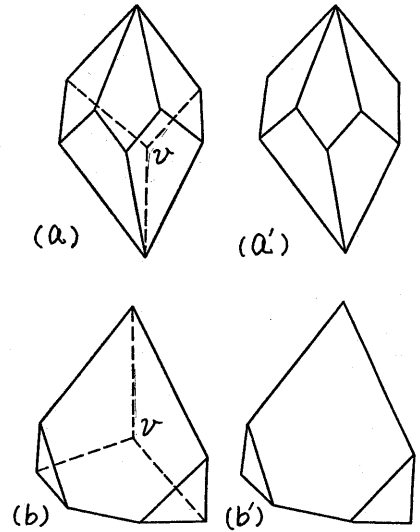


図6. 裏側が一義的に決まる線画

例1 図5(a)の六面体の線画では $f_R(R)=22$, $\nu(S)=2$ である。また, 任意の1個の頂点に関する隣接関係を2個除くと正則な隣接構造が得られる。従って, 定理6より, 1個の頂点に着目し残りの頂点を線画平面上で固定すると, 着目した頂点の正しい位置は1点に限られる。実際に(a)は頂点位置が誤って描かれており, これを修正するとたとえば図の(b), (c), (d)のようになる。これらの図では, 修正のために位置を動かした頂点を丸印で示した。 □

例2 図6(a), (b)の線画はいずれも $\nu(S)=2$ の線画で, 頂点 v に関する隣接関係を2個除くと正則な構造が得られる。従って, 裏側については隣接構造さえ与えられていれば(a'), (b')の線画から裏側の頂点位置が一義的に再現できる。逆に, 裏側を無造作に描くと誤った線画になってしまう。 □

射影幾何学では次の事実が知られている。

定理7 (作図問題の解の一意性) $f_V(V)=4$ の隣接構造を持った正しい線画が与えられているものとする。このとき, 2面の交線あるいは面と直線の交点を求める作図問題の解は一意に存在する。 □

そして, 今まで, 線画の隣接構造が $f_V(V)=4$ を満たすための十分条件が知られており, それを利用して作図問題の解の一意性を保証する十分条件が与えられていた[13]。一方定理3によって $f_V(V)=4$ であるための必要十分条件が得られているため, 定理3と定理7を組合せると, 作図問題の解が一意であるための必要十分条件が得られる。

例3 図7(a)は $f_V(V)=4$ の線画で, (b)は $f_V(V)=6$ の線画である。従って, “隣り合った三つの面上の点 L, M, N を通る平面でこの多面体を切断したときの切口を線画平面上に作図せよ” という問題は, (a)では解が一義的に決まり(b)では一義的には決まらない。 □

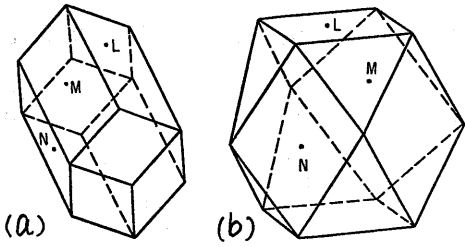


図7. 解が一義的に決まる作図問題
と決まらない作図問題

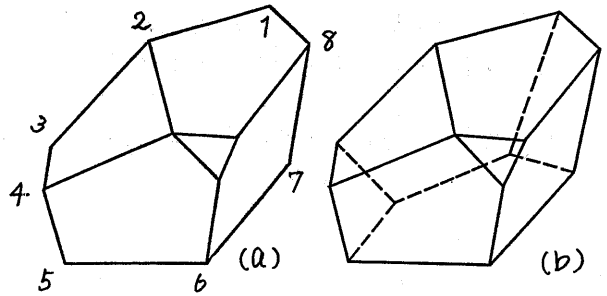


図8. 裏側が一義的に再現できる線画

例4 図8(a)は $P_V(V) = 4$ の線画である。従って、定理7より、頂点1, 2, 3を通る平面と頂点3, 4, 5を通る平面の交線、頂点3, 4, 5を通る平面と頂点5, 6, 7を通る平面の交線等は一義的に決まる。その結果、裏側の隣接構造さえ与えられていれば、図の(b)のように裏側の線画は表側の線画から一義的に再現できる。裏側の頂点位置を実際に求めるためには、与えられた線画を平面図とみなしこれに立面図を加えて、多面体の任意の実例を一つ作ってやればよい。□

頂点位置に誤差のある線画の修正法を上で構成したが、線画によってはこの手順に従って修正しようとする破綻をきたしてしまうことがある。このような線画を“修正不可能”な線画と呼び、それ以外の線画を修正可能な線画と呼ぶ。

今までの考察をまとめると、多面体を表しているか否かという立場から、線画を図9のように分類することができる。正則な線画は定理2・定理4で、正しい線画は定理1・定理3で、修正可能な線画は定理5で、隣接構造の決定できる線画は文献[1~5]で、それぞれ実際に判定する手続きを伴って特徴づけられている。

例5 視覚心理学の分野で変則図形 (anomalous picture) と呼ばれる一群の線画がある[14]。これは、“人が見たとき立体が描かれていると思うと同時に何だか変だと感じる図形”と定義され、図10に掲げるのがその例である。この定義は心理学的要素を含んだ定義で

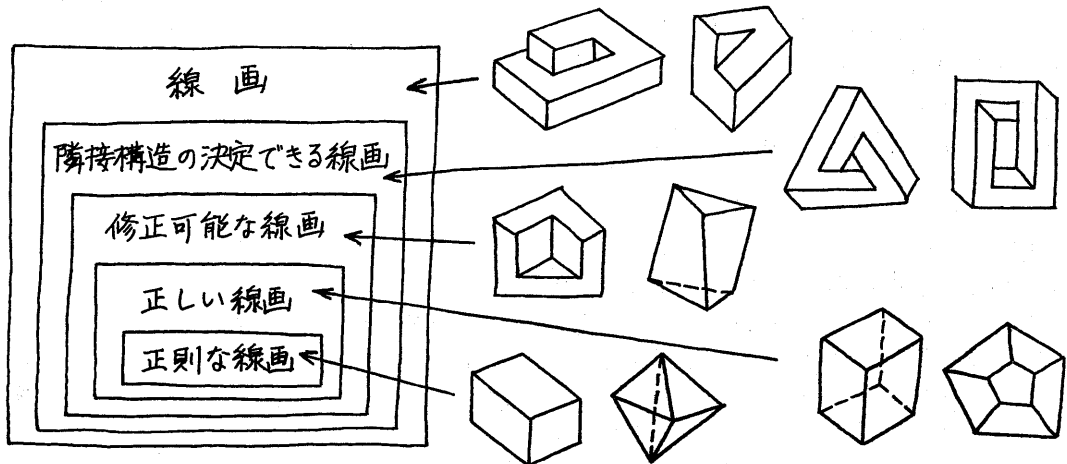


図9. 線画の分類

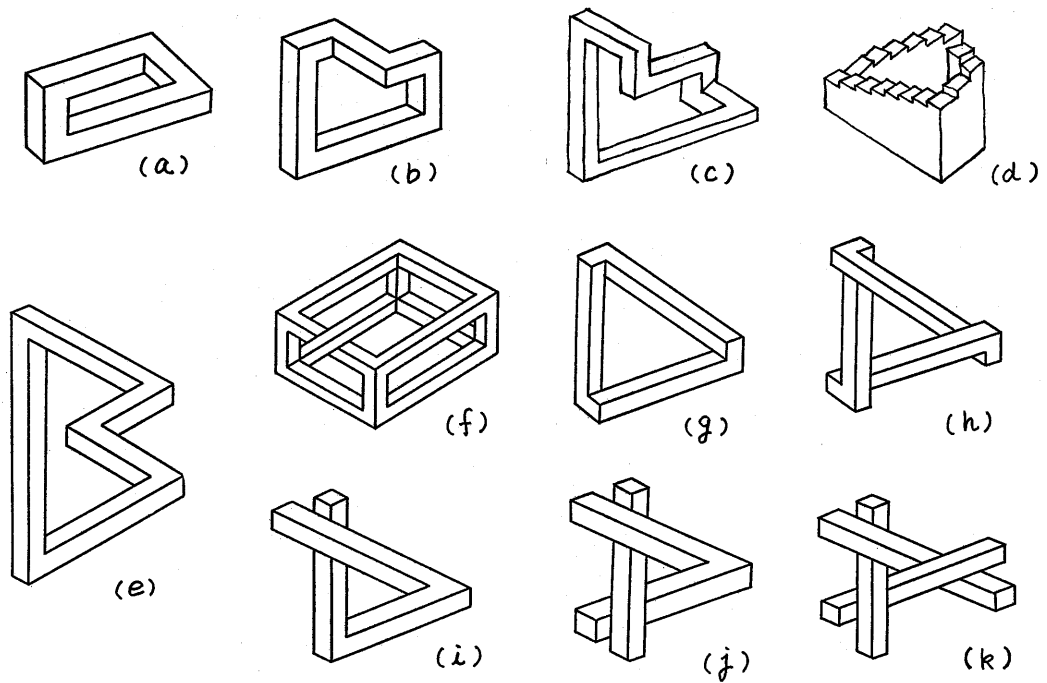


図10. 変則図形

あり、図9の数学的分類とは観点の異なるものである。実際、これらのうち修正不可能な図形は(a), (b), (e), (f), (g), (i)のみであって、残りの(c), (d), (h), (j), (k)は正則な図形である。従って、(c), (d), (h), (j), (k)を遠視図として持つ多面体を実際に作る事ができる。にもかかわらずこれらの図形を見て何か変だと感じるのは、見る人がそこに描かれている面や部材が互いに直交していると無意識のうちに思い込むためであろう。視覚心理学の分野でこれらの図形の認知過程について議論するとき、図形が正しいか否かはあまり考慮されていないようである。しかし、変則図形の中には誤った線画だけでなく正しい線画もあるということに認識し、両者に対して異なる考察を行なうことが必要であると思われる。□

5. おわりに

多面体透視図の数理的性質を代数的・組合せ論的な側面から明らかにし、線画解析のためのいくつかの基本的な問題を実用的な手続きを伴った形で解決した。注意2でも述べたように、多面体線画の構造は、マトロイド・ホリマトロイドの観点から眺めることにより、いっそう見通しよくかつ精密な議論が可能である[11]。実際、ここで述べた定理の証明にはそのような観点からの議論が多く利用される。また、リンク構造と図面の寸法指定構造が線画と同一の代数的・組合せ論的性質を持ち、構造物を剛に保つのに必要以上の部材が使われている——このような構造は不静定構造と呼ばれ、勝手に部材の長さを変えると構造が実現できなくなる——ことと、図面に書込んだ寸法が過剰指定である——このとき加工誤差の許容値を勝手に与えると加工手順に矛盾をきたす——ことと、線画が非正則である——このとき不用

意に描くと誤った線画になってしまう——ことを同一の数学的性質として眺めることが可能である[11]。これらの議論は別の機会にゆずる。

謝 辞

有益な議論をいただいた東京大学工学部計数工学科伊理正夫教授，電子技術総合研究所視覚情報研究室白井良明室長，千葉大学工学部情報工学教室星守講師に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] D. A. Huffman: Impossible objects as nonsense sentences. Machine Intelligence 6, B. Meltzer and D. Michie (eds.), Edinburgh Univ. Press, 1971, pp. 295-324.
- [2] M. B. Clowes: On seeing things. Artif. Intell., Vol. 2(1971), pp. 79-116.
- [3] D. Waltz: Understanding line drawings of scenes with shadows. The Psychology of Computer Vision, P. H. Winston (ed.), McGraw-Hill, New York, 1975, pp. 19-91.
- [4] K. Sugihara: Picture language for skeletal polyhedra. Comput. Gr. Image Process., Vol. 8(1978), pp. 382-405.
- [5] T. Kanade: A theory of Origami world. CMU-CS-78-144, Carnegie-Mellon Univ., 1978.
- [6] D. A. Huffman: Realizable configurations of lines in pictures of polyhedra. Machine Intelligence 8, E. W. Elcock and D. Michie (eds.), Ellis Horwood, England, 1977, pp. 493-509.
- [7] K. Sugihara: A step toward man-machine communication by means of line drawings of polyhedra. Bul. Electrotech. Labo., Vol. 42(1978), pp. 848-871.
- [8] 杉原厚吉: 多面体線画の代数的解析法. 信学論文誌, Vol. 62-D(1979), pp. 201-208.
- [9] 伊理正夫: 線形計画法. 白日社, 1973.
- [10] D. J. A. Welsh: Matroid Theory. Academic Press, 1976.
- [11] 杉原厚吉: 多面体透視図の数学的性質とその応用に関する研究. 電算研研究報告 No. 800(予定)
- [12] M. Iri: Network Flow, Transportation and Scheduling. Academic Press, New York, 1969.
- [13] G. B. グーリエビッチ: 射影幾何学, 下巻. 東京図書, 1962.
- [14] S. W. Draper: The Penrose triangle and a family of related figures. Perception, Vol. 7(1978), pp. 283-296.