コンピュータビジョン 24－1
（1983. 5. 19）

平面の傾きと運動の検出

Detection of Surface Orientation and Motion

金谷健一（群馬大学工学部情報工学科）

Ken-ichi Kanatani (Department of Computer Science, Gunma University)

A new method is given to detect the surface orientation and motion from a projected texture, making use of "integral geometry" or "stereology". Information about the surface orientation is given by "features" computed from the number of intersections with the curves in the texture by parallel line scanning. A slight modification of this method can also detect the motion of the surface relative to the viewer.

1. はじめに

面の3次元空間内での向きを2次元画像上のみから決定することはコンピューター・ビジョンの重要なテーマのひとつであり，いろいろな手法が考えられる。そのひとつは面上のテキスチャに着目するものである。たとえば面上に一様なパターンが繰り返されているとすると，視点から離れるに従って，そのパターンの並びが密になる。従って，そのようなみかけの密度を微分すれば傾きの方向がわかる。このような原理に基いたものは多い。一方，このテキスチャの「一様性」を仮定しないものとして，Witkin [1] はテキスチャの「等方性」に着目した。ここで等方性というのは，テキスチャの線図形を多数の微小線素に細分割したとき，あらゆる方向の微小線素がほぼどの方向についても等しい割合で含まれていることをいう。もし，もともとのテキスチャが等方性でなく，ある特定の方向を向いた線の割合が多いと，それはあたかも投影図のように見える，というのでWitkinはそのようなものを避けて，等方性のものだけを考慮した。

彼の手順は次の通りである。(1)まず画像上のテキスチャの線図形を微小線素に分割して方向ごとに分類し，ヒストグラムを作る。(2)面の傾きは「スラント」σと「ティルト」τの2パラメータで指定されるので，ある(σ, τ)を仮定したとき，観測されたデータのヒストグラムが一様分布から得られる確率（正確には「尤度」）$P(\sigma, \tau)$を計算する。(3)これをあらゆる可能な(σ, τ)について行ない，その2次元領域上で$P(\sigma, \tau)$が最大になる点を探索する。これが求める解である。

従来のコンピューター・ビジョンの教科書を見ればわかるように，何らかの解を求めるのに反復探索の原理が広く行なわれている。これは要するに，いろいろな可能性を次々と調べて，データと最もよく適合するものを探す，という最も原始的で最初に思いつくものである。そのためにいろいろの距離関数とか相関関数，コスト関数が試行錯誤的に提案されている。このような反復探索の原理は何にでも適用できるという汎用性の長所のある反面，というより，正にそのために，多くの計算時間を要し，正解に収束しないことも多い。（特にコスト関数に局所的な極大極小がある場合など。）収束を速め，確実なものにするにはよい初期近似解を与えなければならない。

以上のように，反復探索ではなく，直接的計算によって解を得ることは，それがたとえ仮に近似解であるにせよ，極めて重要なことであるといわねばならない。ここでは最初にWitkinと全く同じ前提に立って，直接的計算で解をもとめる。その手法はパタン認識で用いられているもの

であり，多数のデータからある少数のパラメータ（「特徴量」とよぶ）を計算し，その特徴量だけから代数的計算によって直接に解を得るものである。ここで用いる特徴量は線素の方向の分布密度関数の２次のFourier係数である。これが適切なのは，これが「ステレオロジー」または「積分幾何学」の原理によって図形から直接に計測できるからである。次に，この手法を少し修正すれば，単に面の向きだけでなく，面の相対的回転，すなわち３次元空間における運動を検出できることを示す。この場合，等方性の仮定すら不要である。

２．Buffon変換とステレオロジー

線素の分布密度関数を $f(\theta)$ とする。すなわち，線図形を長さ dl の微小線素に分割したとき，方向が θ と $\theta+d\theta$ の間にあるものの総長を単位面積当り $f(\theta)d\theta$ とする。ただし，微小線素の向きをどうとるかにより，向きが θ, $\theta+\pi$ となるので，各線素ごとに独立にランダムに確率 $1/2$ でどちらかに決めると約束する。（実際は $0\leq\theta<\pi$ で考えてから半分にして残りを $\pi\leq\theta<2\pi$ に割り当てればよい。） $f(\theta)$ は「点対称」，すなわち $f(\theta)=f(\theta+\pi)$ であり，$\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta$ が単位面積当りの総長である。

この平面上に方向 ϕ の直線をランダムに置くとする。方向が θ と $\theta+d\theta$ の間の長さ dl の微小線素はその中心が図１の幅 $|\sin(\phi-\theta)|dl$ の領域に落ちるとき直線と交わる。単位面積当りそのような線素が，$f(\theta)d\theta/dl$ だけあるから，直線の単位長さ部分に交わるものの数は $|\sin(\phi-\theta)|f(\theta)d\theta$ である。ゆえに，図形との交点の期待値は直線の単位長さ当り

$$N(\phi)=\int_0^{2\pi}|\sin(\phi-\theta)|f(\theta)d\theta \qquad (1)$$

となる。したがって，十分多数の直線によって走査して交点数を求めれば「大数の法則」によって式(1)が実際の単位長さ当りの交点数となる。（金谷[2][3]は式(1)を３次元の場合の面や線との関係に一般化してテンソル関係式に表わし，Buffon変換とよんだ。）

もし式(1)の逆変換がわかれば，交点数 $N(\phi)$ の測定によって分布密度 $f(\theta)$ がわかることになる。式(1)は単位円周上の関数間の変換を表わしているが，この変換は $\sin n\theta$, $\cos n\theta$ を固有関数とし，その固有値はともに $4/(1-n^2)$ であることがわかる。（直接確めてもよいが，式(1)の変換が回転群と可換な不変作用素であることと，既約表現の直交性，Schurの補題に着目すればすぐわかる。詳細は金谷[2]。） ゆえに，$N(\phi)$ をFourier級数に展開して

$$N(\phi)=\frac{C}{2\pi}\Big[1+{\sum_{n=2}^{\infty}}'(A_n\cos n\phi+B_n\sin n\phi)\Big] \qquad (2)$$

と表わせば，分布密度 $f(\theta)$ は

$$f(\theta)=\frac{C/4}{2\pi}\Big[1-{\sum_{n=2}^{\infty}}'(n^2-1)(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\Big] \qquad (3)$$

となる。ただし $\sum'$ は偶数のみに関する和を表わす。$f(\theta)$ も $N(\phi)$ も点対称のため，奇数次のFourier成分は現われない。実際には高調波成分は雑音の影響を受けやす

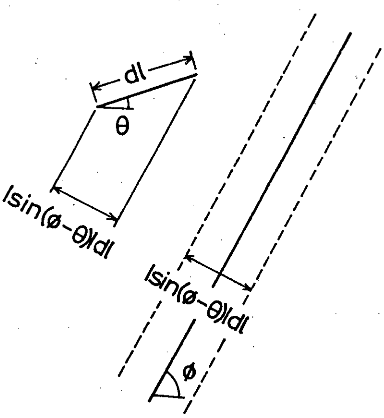


図１．線素と走査線。

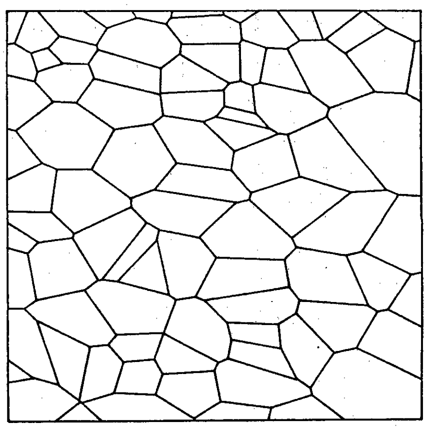


図２．非等方なテキスチャ。

いので2次まで考え，実際問題ではこれで十分である。測定によって計算できる$N(\phi)$の値は有限個のϕに対するものであるから，C, A_2, B_2は離散Fourier係数として計算する。具体的には，区間$[0,\pi]$をN等分して，$\phi=\pi k/N$, $k=0,1,\cdots,N-1$，に対応する$N(\phi)$の値をN_kとして，次のように計算する。

$$C=2\pi\sum_{k=0}^{N-1}N_k/N \tag{4}$$

$$A_2=2\sum_{k=0}^{N-1}N_k\cos(2\pi k/N)\Big/\sum_{k=0}^{N-1}N_k \tag{5}$$

$$B_2=2\sum_{k=0}^{N-1}N_k\sin(2\pi k/N)\Big/\sum_{k=0}^{N-1}N_k \tag{6}$$

図2は乱数を発生して作った非等方なランダムパタンである。これに平行線を重ねて交点数を数えたデータが図3に示してある。（規格化してある。）ただし走査の方向は$N=16$とし，走査の間隔は一辺の1/22とした。図3の実線は2次の近似$N(\phi)/\int_0^{2\pi}N(\phi)d\phi=1+A_2\cos2\phi+B_2\sin2\phi$を示したもので，この場合$A_2=-0.17213$, $B_2=0.06845$であった。図4は対応する分布密度$f(\theta)$を示したものである。このように，平行線走査による交点数さえわかれば，分布密度（この場合は2次までの調和成分）が容易に求まる。特に「対称軸」などを知るには2次までで十分である。

3．面の回転による変換

面の傾きを考える。Witkin同様，正射影のみ考える。ある面上にxy軸を考え，原点を通り，x軸とτの角をなす直線lを引く。この直線の回りに面を角度σだけ（どちらの向きでも）回転し，その回転した面上のテキスチャをもとの面上に正射影する。この操作によって，xy面上のテキスチャはlと垂直な方向に$\cos\sigma$だけ縮むがlと平行な方向の長さは不変である。したがって問題は，そのように変換されたテキスチャのみを見て，σ, τを知ることである。σを「スラント」，τを「ティルト」とよぶ。

上に述べた変換を具体的に書けば

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-(1-\cos\sigma)\sin^2\tau & (1-\cos\sigma)\sin\tau\cos\tau\\ (1-\cos\sigma)\sin\tau\cos\tau & 1-(1-\cos\sigma)\cos^2\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \tag{7}$$

である。さて，もとの面上のテキスチャの分布密度を$f(\theta)$とすれば，変換後の分布密度$f(\theta')$は次のようになる。

$$f(\theta')=\frac{L(\theta)}{\det T}f(\theta)\Big/\frac{d\theta'}{d\theta} \tag{8}$$

ただしTは式(7)の係数行列であり，

$$L(\theta)=\sqrt{n^TT^TTn} \tag{9}$$

$$\frac{d\theta'}{d\theta}=\det[T^T/L(\theta)+L(\theta)(n-T^TTn/L(\theta)^2)^TTn/n^TT^TTn] \tag{10}$$

ただし$n=(\cos\theta,\sin\theta)^T$であり^{T}は転置を表わす。$\theta$と$\theta'$との関係は

$$n'=Tn/L(\theta) \tag{11}$$

より定まる。（詳細は金谷[2][3]。）

このように変換は複雑な形となるが，冒頭に述べたように反復探索を用いず，解析的に処理しようとすれば，数学的な技巧が必要となる。それは「線形近似」である。（数学的にうるさくいえば「無限小生成作用素」，物理学では「摂動」ともよばれる。）この場合，面の傾き角，すなわちスラントσが小さいと考えて，Taylor展開

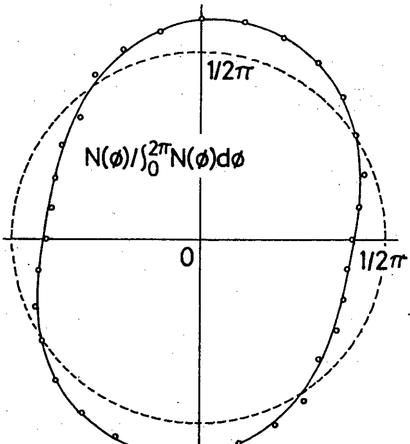


図3．交点数のデータ。

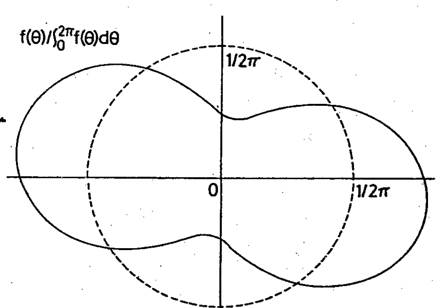


図4．分布密度（の低周波成分）。

$\cos\sigma = 1-\sigma^2/2+\sigma^4/24-\cdots$ の σ^2 の項までで打ち切る。そして以下 σ^4 以上の項を省略する。これは $\pi/4<\sigma<\pi/4$ でかなりよい近似であることが期待される。(実際そうである。) もうひとつの技巧は初期の分布密度の2次までの調和成分のみ考えることである。初期の分布密度を次のようにおく。

$$f(\theta)=\frac{c}{2\pi}\left[1+a_2\cos 2\theta+b_2\sin 2\theta\right] \tag{12}$$

すると，面の回転，射影による変換によ，てこれは次のようになる。(本論文の核心!)

$$f(\theta')=\frac{c'}{2\pi}\left[1+a_2'\cos 2\theta'+b_2'\sin 2\theta'+a_4'\cos 4\theta'+b_4'\sin 4\theta'\right]+O(\sigma^4) \tag{13}$$

$$c'=c\left[1+\frac{1}{4}\sigma^2\left(1+\frac{1}{2}(a_2\cos 2\tau+b_2\sin 2\tau\right)\right] \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} a_2'&=a_2+\frac{1}{4}\sigma^2\left[3\cos 2\tau-\frac{1}{2}a_2(a_2\cos 2\tau+b_2\sin 2\tau)\right]\\ b_2'&=b_2+\frac{1}{4}\sigma^2\left[3\cos 2\tau-\frac{1}{2}b_2(a_2\cos 2\tau+b_2\sin 2\tau)\right]\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} a_4'&=\frac{5}{2}\sigma^2\left[a_2\cos 2\tau-b_2\sin 2\tau\right]\\ b_4'&=\frac{5}{2}\sigma^2\left[a_2\sin 2\tau+b_2\cos 2\tau\right]\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

したが，て，Witkin のように初期に等方性 $f(\theta)=1/2\pi$ を仮定すれば，変換後は

$$f(\theta')=\frac{c}{2\pi}\left(1+\frac{1}{4}\sigma^2\right)\left[1+\frac{3}{4}\sigma^2(\cos 2\tau\cos 2\theta'+\sin 2\tau\sin 2\theta')\right]+O(\sigma^4) \tag{17}$$

となる。これと式(2),(3)，定義(4),(5),(6)を比較すれば，われわれの特徴量，C, A_2, B_2 と (σ,τ) との間の関係が次式で与えられる。

$$C=4c\left(1+\frac{1}{4}\sigma^2\right),\quad A_2=-\frac{1}{4}\sigma^2\cos 2\tau,\quad B_2=-\frac{1}{4}\sigma^2\sin 2\tau \tag{18}$$

ゆえに逆算すれば，計測データ A_2, B_2 より面の傾き (σ,τ) が次式で求まる。

$$\boxed{\sigma=\pm 2(A_2^2+B_2^2)^{1/4},\qquad \tau=\begin{cases}\frac{1}{2}\tan^{-1}(B_2/A_2) & A_2<0\\ \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}(B_2/A_2) & A_2>0\end{cases}} \tag{19}$$

(ただし $\tan^{-1}$ は主値，すなわち $-\pi/2<\tan^{-1}x<\pi/2$ である。) もし $A_2=0$ なら，$B_2>0$ のとき $\tau=-\pi/4$, $B_2<0$ のとき $\tau=\pi/4$。もし $A_2=B_2=0$ ならティルトは定義されない。(面の傾きが0だから。)

(手順のまとめ) (i) 方向 $\phi=\pi k/N$ に平行線を走査して交点数 N_k, $k=0,1,2,\cdots,N-1$ を求める。(ii) 式(5),(6)により特徴量 A_2, B_2 を計算する。(iii) 面の傾きは式(19)で指定される。(おわり)

例として図2を考えてみると，すでに A_2, B_2 は得られているので式(19)に代入すれば $\sigma=\pm 49.3°$, $\tau=-10.8°$ となる。(このティルトでは図4の分布密度の長軸方向にほかならない。) もちろんこれは σ^2 に関する線形理論であるが，σ, τ の値をもし精度よく求める必要があるなら，最初に得られた σ, τ に基いて像を復元すればよい。すると面の傾きは微小となるから同じ手順によ，て補正を加える，等，いろいろ目的，精度に応じて他の手法と組み合わせることができる。

4. 面の運動の検出

式(12)〜(16)のような扱いをすれば，何も初期分布が等方性であることを仮定する必要はない。(Witkinのような扱いでは無理である。) 実際，工業製品等に現われる人工のテキスチャは規則的で独特の異方性をもつことが多い。このような場

合，もとのテキスチャを知っていれば，それを斜めから見ても，傾き角をただちに知ることができる。これは面が運動する場合などに生じることであり，運動前（視点に正対）と運動後（微小な移動）とから，その相対的動きを知ることに応用できる。この場合は次のような手順になる。(式(15)を解く。)
(i)運動前と運動後の特徴量を同じようにして求め，それをA_2, B_2, A_2', B_2'とする。(ii)面の傾きを表わすスラントσとティルトは次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} A &= \left(\tfrac{2}{3}-B_2^2\right)(A_2'-A_2)+A_2B_2(B_2'-B_2) \\ B &= A_2B_2(A_2'-A_2)+\left(\tfrac{2}{3}-A_2^2\right)(B_2'-B_2) \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

$$\sigma = \pm\ 2(A^2+B^2)^{1/4}\Big/\left|\tfrac{2}{3}-A_2^2-B_2^2\right|^{1/2} \quad (21)$$

$$\tau = \begin{cases} \frac{1}{2}\tan^{-1}(B/A) & A<0 \\ \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\tan^{-1}(B/A) & A>0 \end{cases} \quad (22)$$

($\tan^{-1}$は主値。$A=0$のときは前と同じに扱う。) 例として図5(a),(b)を考える。(b)は(a)を$\tau=45°$の軸の回りに$\sigma=30°$だけ回転したものである。前と同じように一辺の1/22の間隔の平行線で走査して交点数を数える。これを18方向について行なって式(20)〜(22)に代入したところ$\sigma=\pm32°$, $\tau=45.7°$を得た。近似の割には極めてよい精度といえる。

以上は面内回転(画面に垂直な軸の回りの回転)を考えていない。一般的な3次元回転はσ, τによる傾きを得た後，あるωだけ回転することによって得られる。この場合は式(14)(15)を利用すれば3つの特徴量C, A_2, B_2から3つのパラメータσ, τ, ωを決めることができる。式(15)による変換が行なわれた後に図形をωだけ回転すれば

$$\left.\begin{aligned} a_2' &\to a_2' - 2\omega b_2 + O(\omega^2) \\ b_2' &\to b_2' + 2\omega a_2 + O(\omega^2) \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

となる。ところが式(14)(15)は$O(\sigma^4)$を省略して得られているから，$\omega=O(\sigma^2)$程度に小さくなければならない。このときσ, τ, ωは次のように定まる。

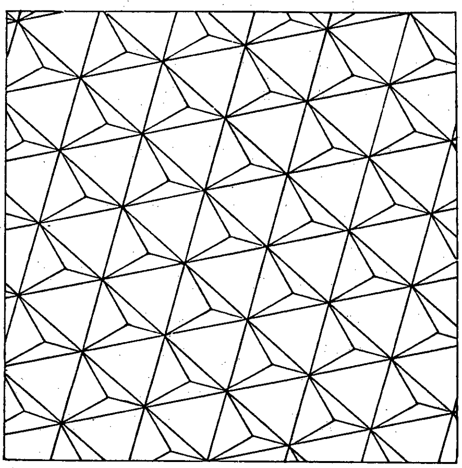
$$\sigma = \pm\left(\frac{C'}{C}-\frac{\|A\|^2-(A,A')}{\|A\|^2-2/3}-1\right)^{1/2} \quad (24)$$

$$\tau = \tau_0+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{2}{3\|A\|\left(\frac{(C'/C-1)(\|A\|^2-2/3)}{\|A\|^2-(A,A')}-1\right)} \quad (25)$$

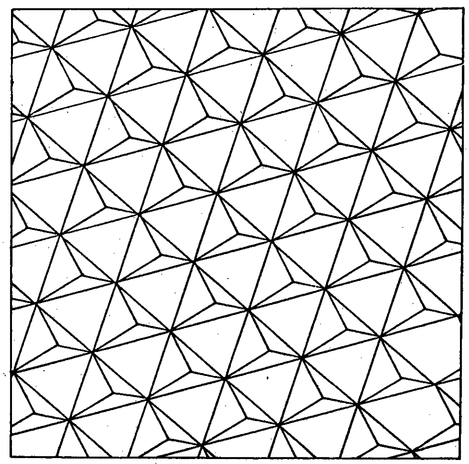
$$\omega = \frac{[A,A']-\frac{1}{4}\sigma^2\|A\|\sin 2(\tau-\tau_0)}{2\|A\|^2} \quad (26)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} \|A\| &= \sqrt{A_2^2+B_2^2}, \quad (A,A') = A_2A_2'+B_2B_2' \\ [A,A'] &= A_2B_2'-B_2A_2' \end{aligned}\right\} \quad (27)$$



(a)



(b)

図5. ある人工的テキスチャの運動前(a)とその運動後(b) ($\sigma=30°$, $\tau=45°$)

という表記を用いた。またτ_0は

$$\cos 2\tau_0 = -\frac{A_2}{\|A\|}, \quad \sin 2\tau_0 = -\frac{B_2}{\|A\|} \tag{28}$$

によって定まる角度である。ただし$\cos^{-1}$の多価性によって2組の解が得られるので$|\omega|$の小さいほうの組を選ぶ。

以上はωがσ^2程度に小さいときであるが，ωがσ^2に比較して小さくないときは次のようにする。まず式(26)で$\sigma \approx 0$とすると$\omega \approx [A, A']/2\|A\|^2$を得る。そこでこの角度を$\omega_0$とおき，第一近似とし，運動後の図形を$-\omega_0$だけ回転する。このことは

$$\left.\begin{aligned} C' &\to C' \\ a_2' &\to a_2' \cos\omega_0 + b_2' \sin\omega_0 \\ b_2' &\to -a_2' \sin\omega_0 + b_2' \cos\omega_0 \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

とすることに相当する。このようにして得られたC', a_2', b_2'を用いればC, a_2, b_2に対するωは極めて小さいものとなる。そこで式(24)〜(26)によってσ, τ, ωを求める。求める解に直すには$\omega \to \omega + \omega_0$とすればよい。（しかし，この方法では$\sigma^2 \ll |\omega|$でないと別の解へ跳ぶ恐れがある。）

図6は図5-(b)をさらに$\omega = -10°$面内で回転したものである。これに式(24)〜(26)を適用すると$\sigma = \pm 32.9°$, $\tau = 37.7°$, $\omega = -10.4°$を得た。厳密にいうと真のτは$35° \leq \tau \leq 45°$以外には理論的には定まらないので，このほぼ中点を与えている値はより近似値であるといえる。

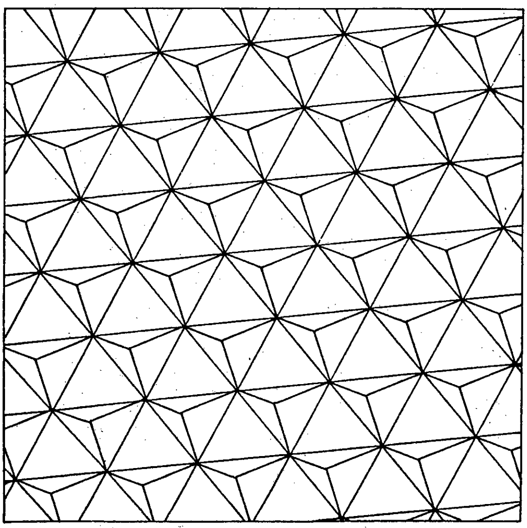


図6．図5-(b)を面内回転。($\omega = -10°$)

5．一般の位置の運動

前節では運動前は視点に正対（画面に平行）であると仮定した。面が一般の位置で運動していても同じ解析ができることを示そう。面のグラジエントを(p, q)とする。すなわち面の勾配がx軸に沿ってp，y軸に沿ってqとする。（視点に近づく方向を正とする。）いま，面が空間を運動していて，時刻tでのグラジエントが(p, q)，角回転速度ベクトルを$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$とする。このときの特徴量を$C, A_2, B_2$とし，時刻$t + dt$におけるそれらを$C', A_2', B_2'$とする。$\dot{C} = (C' - C)/dt$, $\dot{A}_2 = (A_2' - A_2)/dt$等とし$(A, \dot{A}) = A_2\dot{A}_2 + B_2\dot{B}_2$等とすれば角速度ベクトルは次のようになる(cf.金谷[4])

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= B_2(q^2 - p^2) + 2A_2 pq \\ \Gamma &= \dot{C}/C, \quad \Lambda = (A, \dot{A})/(\tfrac{2}{3} - |A|^2) \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{4}{3\Delta}\left[\frac{3}{2}(\Gamma - \Lambda)(A_2 p + B_2 q) - \Lambda p\right] \\ \omega_2 &= \frac{4}{3\Delta}\left[\frac{3}{2}(\Gamma - \Lambda)(B_2 p - A_2 q) - \Lambda q\right] \\ \omega_3 &= \frac{1}{2|A|^2}\Big[[A, \dot{A}] + \left\{(|A|^2 - \tfrac{1}{2}A_2)p - \tfrac{1}{2}B_2 q\right\}\omega_1 \\ &\quad - \left\{\tfrac{1}{2}B_2 p - (|A|^2 + \tfrac{1}{2}A_2)q\right\}\omega_2 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

これから$t + dt$におけるグラジエント(p', q')が次のように得られる。

$$\left.\begin{aligned} p' &= p + (pq\omega_1 - (p^2+1)\omega_2 - q\omega_3)dt \\ q' &= q + ((q^2+1)\omega_1 - pq\omega_2 + p\omega_3)dt \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

以上を次々と繰り返せばある時刻tでの面の向き(p, q)さえわかれば，以後の次々の時刻での面の向きが逐次計算できることになる。（誤差を少くするよう計算手順をいろいろ工夫することもできる。しかし，これはこの方法の利用の目的や対象を考慮する必要があるので本報告の範囲を越えるため省略し，原理の指摘にとどめる。）

6. まとめ

手法の特徴について

(i) すべてが直接的な公式によって表わされており，反復探索を含まない。これは計算時間の大きな節約である。

(ii) 運動を検出するのに，どの点がどの点に移ったかという対応関係を知る必要がない。通常，この対応関係の決定に反復探索を含んだかなりの計算時間が必要であるから，この点でもすぐれている。

(iii) 運動を検出するのに画像を保持する必要がない。各時刻で特徴量 C, A_2, B_2 を計算すれば画像は消去してよい。2枚の画像を比較したり，何らかの相関をとったりしないからである。これは記憶領域の節約につながる。

(iv) 平行移動に不変である。C, A_2, B_2 は画像が上下左右に平行移動しても一定，すなわち「不変特徴量」である。画像上の絶対的位置座標は重要でないから，画像入力装置を厳密に固定する必要がない。対応関係から計算するときには常に平行移動と回転とを分離する必要が生じる。(すなわち対応関係はあまりにも多くの情報をもち過ぎている。)

(v) 局所誤差に安定である。対応関係から算出するときは対応点をそばに近くとると局所的な誤差に大きく影響される。したがって，いろいろの対応から計算して平均をとる等の必要がある。ところが特徴量 C, A_2, B_2 ははじめから画像全体よりのデータの平均となっているから，局所誤差に左右されにくい。

残された課題

(i) 交点数を数えるアルゴリズムについて。 まず走査する方向を近似する画素のチェインを作り，それに沿って交点数を数えてゆく。線画の各線がある程度の太さをもって表現されていれば問題がないが，そうでない場合，数え落しを防ぐための工夫が必要であろう。場合によっては線画にする必要はなく，閾値処理によって濃淡画像を2値画像に直し，濃度が変化する回数を数えてもよい。その他いろいろの可能性が考えられる。あるいは別の処理によって分布密度 $f(\theta)$ が直接求まっているならそれを利用してもよい。

(ii) 精度について。 精度を左右する要因として ①走査の間隔，②走査方向の数，③分布密度の高調波成分の影響，④ σ, ω の大きさ，が考えられる。①②はいくらでも調節できるから問題ない。③は2次の成分のみ用いるために起こることであり，例えば，ある角度の区間に対応する線素がまったくないというような変則的な場合は大きな高調波が現れ，無視できない。④は既に述べたように線形近似の影響である。したがって実用上は他の情報とあわせて種々の補正手段と組み合わせて用いることになるであろう。

(iii) テキスチャのない場合(→金谷[4])。正射影でなく投影図の場合(→金谷[5])。

文献

[1] A. P. Witkin, Recovering surface shape and orientation from texture, Artificial Intelligence, 17 (1981), 17 - 45.

[2] K. Kanatani, Stereological determination of structural anisotropy, Int. J. Engng Sci. (in press).

[3] K. Kanatani, Detection of Surface Orientation and Motion from Texture by a Stereological Technique, Technical Reprot CS-83-3, Department of Computer Science, Gunma University, 1983.

[4] K. Kanatani, Tracing Surface Motion from Projection without Knowing Correspondence, Technical Report CS-83-5, Department of Computer Science, Gunma University, 1983.

[5] K. Kanatani, Tracing Surface Motion from Perspective by Line Integrals, Technical Report CS-83-6, Department of Computer Science, Gunma University, 1983.

付録.　分布密度とその変換のテンソルによる一般的表現

分布密度や交点数のデータを特定の座標軸からの角度ではなく単位ベクトルn, m等を用いて表わす。分布密度$f(n)$のFourier級数は次のように表わせる。

$$f(n)=\frac{c}{2\pi}\left[1+D_{ij}n_in_j+D_{ijkl}n_in_jn_kn_l+\cdots\right] \tag{1}$$

すなわちn次のFourier係数はn階のテンソルである。これを「ファブリックテンソル」とよぶことにする。c, $D_{i_1\cdots i_n}$は$f(n)$から次のように計算される。

$$c=\int f(n)\,dn,\qquad D_{i_1\cdots i_n}=2^nN_{\{i_1\cdots i_n\}} \tag{2}$$

ただし$\int dn$は単位円周上の不変測度に関する積分，すなわち極座標で$\int_0^{2\pi}d\theta$のことである。$N_{i_1\cdots i_n}$は次式で定義される「モーメントテンソル」である。

$$N_{i_1\cdots i_n}=\int n_{i_1}n_{i_2}\cdots n_{i_n}f(n)\,dn/c \tag{3}$$

指標に現れる$\{\ \}$は「偏差成分」を表わす。すなわち，あるn階対称テンソル$A_{i_1\cdots i_n}$が与えられたとき，その偏差成分とは

$$\begin{aligned}A_{\{i_1\cdots i_n\}}&=C_0^nA_{i_1\cdots i_n}+C_2^n\delta_{(i_1i_2}A_{i_3\cdots i_n)jj}+C_4^n\delta_{(i_1i_2}\delta_{i_3i_4}A_{i_5\cdots i_n)kkjj}\\&+\cdots+C_n^n\delta_{(i_1i_2}\delta_{i_3i_4}\cdots\delta_{i_{n-1}i_{n-2}}A_{j_1j_1j_2j_2\cdots j_{n/2}j_{n/2}}\qquad\text{ただし}\quad C_m^n=\frac{(-1)^{m/2}}{2^m}\frac{n}{n-m/2}\binom{n-m/2}{m/2}\end{aligned} \tag{4}$$

ここでδ_{ij}はKronecker デルタ，$(\ )$は指標の対称化を表わす。偏差成分は「偏差テンソル」(任意の指標に関する縮約が0)である。Buffon変換は次の形となる。

$$N(m)=\int|m\cdot n|\,f(n)\,dn \tag{5}$$

$$\int|m\cdot n|\,n_{\{i_1}\cdots n_{i_n\}}\,dn=\frac{4}{a_n}m_{\{i_1}\cdots m_{i_n\}},\qquad a_n=(-1)^{n/2+1}(n^2-1) \tag{6}$$

空間の変形が一次線形変換$x_i'=A_{ij}x_j$で表わされるとする。F_{ij}(変形テンソル), e_{ij}(ひずみテンソル), $\tilde{e}_{ij}$(偏差ひずみテンソル), r_{ij}(回転テンソル)が次のように定義される。($[\ ]$は指標の反対称化を表わす。)

$$A_{ij}=\delta_{ij}+F_{ij},\quad F_{ij}=e_{ij}+r_{ij},\quad e_{ij}=F_{(ij)},\ r_{ij}=F_{[ij]},\ e_{ij}=\tilde{e}_{ij}+\tfrac{1}{2}e_{kk}\delta_{ij},\ \tilde{e}_{ij}=e_{\{ij\}}$$

このとき，単位ベクトルnはその長さが$1+e_{kk}/2+\tilde{e}_{ij}n_in_j+O(F^2)$となり，その方向を単位ベクトル$n'$とすれば次のようになる。

$$n_i'=n_i+\tilde{e}_{ij}n_j+r_{ij}n_j-\tilde{e}_{kl}n_kn_ln_i+O(F^2),\qquad dn'/dn=1-2\tilde{e}_{ij}n_in_j+O(F^2) \tag{7}$$

変形前の分布密度が$f(n)=\frac{c}{4\pi}[1+D_{ij}n_in_j]$であれば変形後の分布密度$f(n')$は次のようになる。

$$f(n')=\frac{c'}{4\pi}\left[1+D_{ij}'n_i'n_j'+D_{ijkl}'n_i'n_j'n_k'n_l'\right]+O(F^2)$$

$$c'=c\left(1-\tfrac{1}{2}e_{kk}+\tfrac{1}{4}\tilde{e}_{ij}D_{ij}\right)$$

$$D_{ij}'=D_{ij}+3\tilde{e}_{ij}-\tfrac{1}{4}\tilde{e}_{kl}D_{kl}D_{ij}-2D_{ik}r_{kj}$$

$$D_{ijkl}'=-5\tilde{e}_{(ij}D_{kl)}+\frac{10}{3}\delta_{(ij}\tilde{e}_{k|m}D_{m|l)}-\frac{5}{12}\delta_{(ij}\delta_{kl)}\tilde{e}_{mn}D_{mn}$$