コンピュータビジョン 26－3
（1983. 9. 26）

任意形状の面の運動の追跡

Motion Detection of an Arbitrary Shaped Plane Surface

金谷健一（群馬大学工学部情報工学科）

Ken-ichi Kanatani (Department of Computer Science, Gunma University)

Motion of a plane surface in the three dimensional space is detected from the motion of its contour image on the plane of vision. There is no need to know the correspondence of points. The motion is explicitly given by a direct computation of "diameters" of the image contour.

1. はじめに

面の3次元的運動を投影面上の2次元運動のみから計算することは動画像認識の基本的課題のひとつである。通常はどの点がどの点に移動するかという"対応点探索"を行ない，画面上に"速度場"あるいは"オプティカルフロー"を求めて，これを解析する。例えば運動を調べようとする面が多面体のひとつの面であれば頂点は頂点に移動する。しかし，面が任意形状，たとえば円や楕円のような曲線であれば，対応点を求めるのが簡単ではない。一般に対応点探索は手間がかかる。しかも，対応点を求め，速度場を求めても，これを並進や回転の成分に分離しなければならないし，これを少数の対応点から決めようとすると局所的誤差の影響を受けやすい。

以上のことから，対応点を求めることなしに面の運動を知る方法が望ましい。しかも，はじめから並進と回転とが分離しているようにデータを測定し，局所誤差の影響も受けにくいものが望ましい。さらに，計算は反復やマッチングのような最適化探索を含まず，"直接的な公式"で与えられるのが望ましい。なぜなら最適化探索などでは収束の問題が生じ，その計算時間もあらかじめ見積るのが難しい場合が多いからである。

以下で述べる方法は"ステレオロジー"，"積分幾何学"を用いた金谷[1][2]の方法の拡張である[3]。[1][2]では広がりをもった面上にテキスチャの存在するとき，そのテキスチャの線素の分布の変化に着目するものであったが，ここではテキスチャはないとする。以下で必要なのは，面が"平面"であり，"閉じた境界線"をもつということのみである。

2. 面の向きと回転の表示

本論文では画面への正射影による画像のみ考える。（中心射影は金谷[4]。）したがって画面からの距離は問題にならないから，面はxyz-座標の原点を通ると仮定し，xy-面が画面であるとして一般性を失わない。すなわちz軸に平行に射影するとする。面の傾きを表す方法はいろいろ考えられる。まず考えられるのは面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3)$ を用いることである，ただし $\mathbf{n}$ と $-\mathbf{n}$ とは同じ傾きを表すから，例えば $n_3>0$ と約束する。（面が画面と直交する $n_3=0$ の場合は考えない。）$\mathbf{n}$ を用いると面の方程式は $n_1x+n_2y+n_3z=0$ となる。

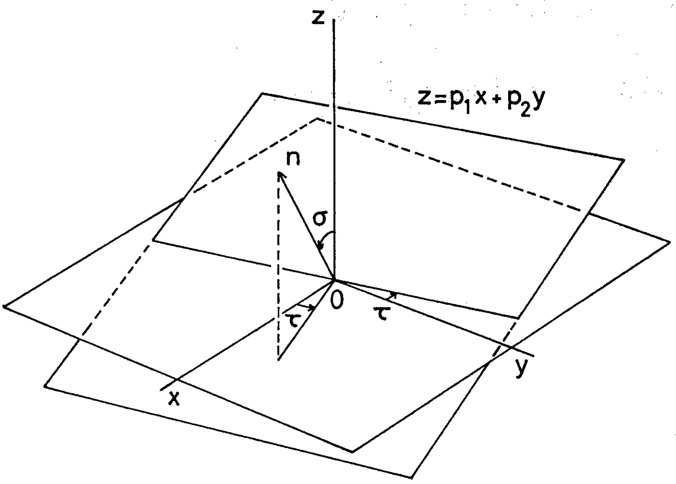


図1。面の向きを指定する3つの方法。
(1) 単位法線ベクトル $\mathbf{n}$
(2) スラント σ，ティルト τ
(3) グラジエント (p, q)

あるいは $\mathbf{n}$ を球面座標 σ, τ で表してもよい（図1）。$0 \le \sigma < \pi/2$, $0 \le \tau < 2\pi$ であり，それぞれ"スラント"，"ティルト"とよばれている。そして，原点を通りy軸から角度 τ にある xy-面上の直線のまわりに xy-面を（右ねじ方向に）角度 σ だけ回転して，その面が得られる。一方，"グラジエント" $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$ を用いてもよい。面の方程式は $z = px + qy$ となる。これらの表示のどれも互に等価であり，それらの関係は次のように整理できる。

(i) 法線 vs. スラント・ティルト

$$\begin{cases} n_1 = \sin\sigma\cos\tau \\ n_2 = \sin\sigma\sin\tau \\ n_3 = \cos\sigma \end{cases} \quad (2.1) \qquad \begin{cases} \sigma = \cos^{-1} n_3 \\ \tau = \tan^{-1}(n_2/n_1) \end{cases} \quad (2.2)$$

(ii) スラント・ティルト vs. グラジエント

$$\begin{cases} p = -\tan\sigma\cos\tau \\ q = -\tan\sigma\sin\tau \end{cases} \quad (2.3) \qquad \begin{cases} \sigma = \tan^{-1}\sqrt{p^2+q^2} \\ \tau = \tan^{-1}(q/p) \end{cases} \quad (2.4)$$

(iii) グラジエント vs. 法線

$$\begin{cases} p = -n_1/n_3 \\ q = -n_2/n_3 \end{cases} \quad (2.5) \qquad \begin{cases} n_1 = -p/\sqrt{p^2+q^2+1} \\ n_2 = q/\sqrt{p^2+q^2+1} \\ n_3 = 1/\sqrt{p^2+q^2+1} \end{cases} \quad (2.6)$$

ただし (2.2) (2.4) の $\tan^{-1}$, $\cos^{-1}$ は $\mathbf{n}$ や p, q の符号を考慮して適切な値を選ぶものとする。

次に回転を考える。3次元回転はある軸のまわりの（右ねじ方向の）ある角度の回転で表わせる。回転軸の方向余弦を (l, m, n) とし，回転角を Ω とすれば，点 (x, y, z) は回転の結果，次の式で表される点に移る。

$$\begin{cases} x' = x\cos\Omega + l(1-\cos\Omega)(lx+my+nz) + (mz-ny)\sin\Omega \\ y' = y\cos\Omega + m(1-\cos\Omega)(lx+my+nz) + (nx-lz)\sin\Omega \\ z' = z\cos\Omega + n(1-\cos\Omega)(lx+my+nz) + (ly-mx)\sin\Omega \end{cases} \quad (2.7)$$

しかし，運動を刻々と追跡することを考えると，このような"有限回転"ではなく"無限小回転"によって表すほうが便利である。(回転群の生成作用素を考える。)
$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ を角速度ベクトルとする。すなわち，方向 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ の軸の回りに瞬間角速度 $\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}$ で回転しているとする。考えている面上の点がこの角速度で回転しているとき，上に示した面の向きのパラメータは次のように変化することがわかる。

(i) 法線

$$\begin{cases} dn_1/dt = n_3\omega_2 - n_2\omega_3 \\ dn_2/dt = -n_3\omega_1 + n_1\omega_3 \\ dn_3/dt = n_2\omega_1 - n_1\omega_2 \end{cases} \tag{2.8}$$

(ii) スラント・ティルト

$$\begin{cases} d\sigma/dt = -\omega_1 \sin\tau + \omega_2 \cos\tau \\ d\tau/dt = -(\omega_1\cos\tau + \omega_2\sin\tau)/\tan\sigma + \omega_3 \end{cases} \tag{2.9}$$

(iii) グラジエント

$$\begin{cases} dp/dt = pq\omega_1 - (p^2+1)\omega_2 - q\omega_3 \\ dq/dt = (q^2+1)\omega_1 - pq\omega_2 + p\omega_3 \end{cases} \tag{2.10}$$

このように回転している面上の点を画面上に射影すると，次のような"速度場"あるいは"オプティカルフロー"となる。

$$\begin{cases} dx/dt = p\omega_2 x + (q\omega_2 - \omega_3)y \\ dy/dt = -(p\omega_1 - \omega_3)x - q\omega_2 y \end{cases} \tag{2.11}$$

3. 周の分布密度と"直径"

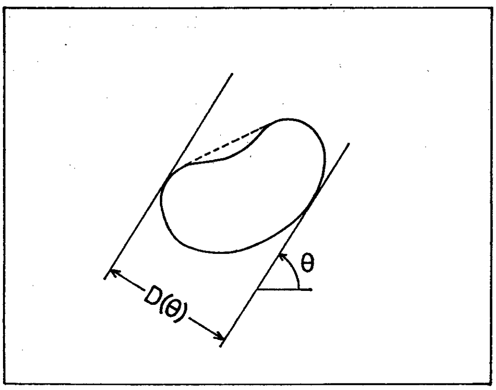
運動している面が閉じた境界線をもてば，その像は画面上の閉曲線となる。この閉曲線の"分布密度" $f(\theta)$ を次のように定義する。まず閉曲線を長さ dl の無限小の長さの線素に分割する。線素の向きは x 軸からの角度 θ で指定されるが，θ と $\theta+\pi$ とが同じ方向を表すため，どちらかをランダムに確率 $1/2$ で選ぶことにする。そして，方向が θ と $\theta+d\theta$ との間にある線素の総長が $f(\theta)d\theta$ であるように $f(\theta)$ を定義する。$f(\theta)=f(\theta+\pi)$ であり，$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$ が周長となる。

以上の定義は概念的なものであり，$f(\theta)$ を実測したりする必要はない。実測するのは図2に示す"直径" $D(\theta)$，すなわち方向 θ の直線ではさむときの幅である。これは $0 \le \theta < 2\pi$ で定義され，$D(\theta)=D(\theta+\pi)$ である。ここで閉曲線が凸であるとしよう。"直径" $D(\theta)$ は次の定理によって分布密度 $f(\theta)$ で表される。

〔定理〕

$$\boxed{D(\theta) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\sin(\theta-\theta')| f(\theta')d\theta'} \tag{3.1}$$

(証明) 画面の面積を S とする。方向 θ の直線をランダムに引く。長さ dl，方向が θ' から $\theta'+d\theta'$ の線素がこの直線に交るのは，その中心がこの直線に沿った幅 $|\sin(\theta-\theta')|dl$ の帯状領域に入るときである。(図3) そのような線素は単位面積当り $f(\theta')d\theta'/S\,dl$ だけあるから，直線の単位長さ当りの交点数の期待値は $|\sin(\theta-\theta')|f(\theta')d\theta'/S$ である。あらゆる方向の線素を考えると $\int_0^{2\pi}|\sin(\theta-\theta')|f(\theta')d\theta'/S$ が直線の単位長さ当りの周との交点数の期待値である。一方，画面を方向 θ で微小間隔 dh の平行線群でおおうとすると，面積 S の部分にある長さは S/dh であ



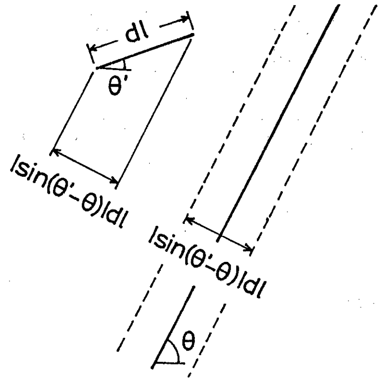


図2。方向θの直線ではさむ距離$D(\theta)$がθ方向の"直径"である。

図3。長さdl，方向θ'の線素は中心が幅$|\sin(\theta'-\theta)|dl$の領域に入るとき交わる。

る。周と交わるものの数は$D(\theta)/dh$であり，交点数は各々2である（接するものは"測度0"である。）ゆえに単位長さ当りの交点数は$2D(\theta)/S$である．以上より定理を得る。（注。"ランダムに引く"という正確な意味は直線を$x\sin\theta - y\cos\theta = h$とするとき"不変Haar測度"$dh$を用いることであるから平行線でおおうのと等価になる。）

式(3.1)は単位円周上の関数$f(\theta)$から同じく単位円周上の関数$D(\theta)$への線形変換であって，しかも回転と可換な作用であるから，その逆変換はFourier級数により表せる。（詳細は金谷[5][6]。）$D(\theta)$をFourier級数で

$$D(\theta)=\frac{C}{2\pi}\left[1+\sum_{n=2}^{\infty}{}'(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\right] \tag{3.2}$$

とする。Σ'は偶数番目の項のみの和を表す。（$D(\theta)=D(\theta+\pi)$より奇数番目の項は生じない。）すると$f(\theta)$は次のようになる。

$$f(\theta)=\frac{C/2}{2\pi}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}{}'(n^2-1)(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\right] \tag{3.3}$$

(3.2)式のC，A_n，B_nは次のようにしてデータから計算すればよい。角度$0\sim\pi$をN等分して$\theta=\pi k/N$，$k=0,1,\cdots,N$，に対応する方向の直径をD_kとすると，

$$C=2\pi\sum_{k=0}^{N-1}D_k/N \tag{3.4}$$

$$A_n=2\sum_{k=0}^{N-1}D_k\cos(n\pi k/N)\Big/\sum_{k=0}^{N-1}D_k \qquad B_n=2\sum_{k=0}^{N-1}D_k\sin(n\pi k/N)\Big/\sum_{k=0}^{N-1}D_k \tag{3.5}$$

以上では閉曲線は凸としたが，凸である必要はない。凸でない場合，"直径"を外側から測ると，これはその閉曲線の"凸包"の"直径"を測っていることになる（図2）。凸包は射影に対して"不変"である。すなわち，像の凸包は凸包の像に等しい。したがって，考えている面の周ではなく，その凸包を始めから考えることにすれば以下同じことになる。要するに面の運動を知るには<u>その面内に描かれている閉曲線の像が得られさえすればよい</u>のである。これは以下に示す手順を見れば明らかになる。

4. 面の運動の決定

時刻tにおける画面上の閉曲線（面の境界の像）の分布密度をFourier級数

$$f(\theta) = \frac{c}{2\pi}\left[1 + a_2\cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta\right] \qquad (4.1)$$

の形で近似する。これは4次以上の周波数成分は測定誤差による雑音を受け易いからである。画面上には式(2.11)で表される速度場があり，それによって閉曲線が"流される"ので式(4.1)の係数は時間変化する。その関係は次のようになる[6]。

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dc}{dt} &= -\frac{c}{4}\left[b_2 p - (a_2-2)q\right]\omega_1 + \frac{c}{4}\left[(a_2+2)p + b_2 q\right]\omega_2 && (4.2)\\
\frac{da_2}{dt} &= \frac{1}{4}\left[b_2(4+a_2)p + (6-a_2^2)q\right]\omega_1 + \frac{1}{4}\left[(6-a_2^2)p + b_2(4-a_2)q\right]\omega_2 - 2b_2\omega_3 && (4.3)\\
\frac{db_2}{dt} &= \frac{1}{4}\left[(b_2^2-4a_2-6)p - a_2 b_2 q\right]\omega_1 - \frac{1}{4}\left[a_2 b_2 p + (b_2^2+4a_2-6)q\right]\omega_2 + 2a_2\omega_3 && (4.4)\\
\frac{da_4}{dt} &= \frac{4}{5}\left[(b_2 p + a_2 q)\omega_1 + (a_2 p - b_2 q)\omega_1\right] && (4.5)\\
\frac{db_4}{dt} &= \frac{4}{5}\left[(-a_2 p + b_2 q)\omega_1 + (b_2 p + a_2 q)\omega_2\right] && (4.6)\\
\frac{da_6}{dt} &= \frac{da_8}{dt} = \cdots = 0, \quad \frac{db_6}{dt} = \frac{db_8}{dt} = \cdots = 0 && (4.7)
\end{aligned}\right.$$

（時刻tで $a_4 = b_4 = 0$ であっても $da_4/dt \neq 0$, $db_4/dt = 0$ であることに注意。）
式(3.3)と式(4.1)の比較により

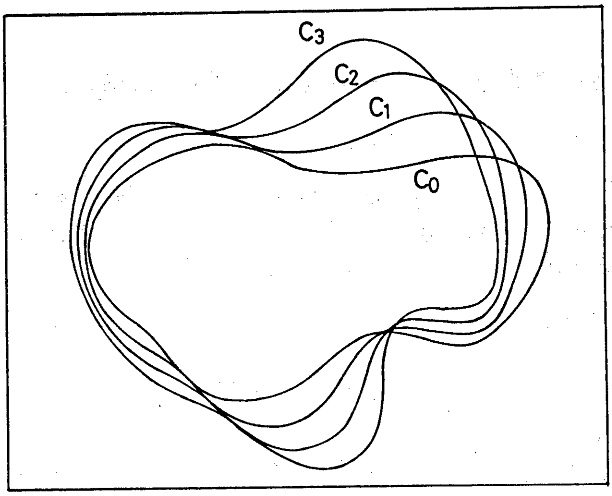
$$c = \frac{C}{2}, \quad a_2 = -3A_2, \quad b_2 = -3B_2, \quad a_4 = -15A_4, \quad b_4 = -15B_4, \ \cdots \qquad (4.8)$$

がわかる。C, A_k, B_k は画像上の測定により式(3.4)(3.5)から容易に求まる。上の微分方程式をこれらの測定量（あるいは"特徴"）に書き直すと次式を得る。

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{C}\frac{dC}{dt} &= \left[-\frac{3}{4}B_2 p + \frac{1}{2}(1+3A_2)q\right]\omega_1 + \left[\frac{1}{2}(1-3A_2)p - \frac{3}{4}B_2 q\right]\omega_2 && (4.9)\\
\frac{dA_2}{dt} &= \left[B_2\left(1-\frac{3}{4}A_2\right)p - \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}A_2^2\right)q\right]\omega_1 + \left[-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}A_2^2\right)p + B_2\left(1+\frac{3}{4}A_2\right)q\right]\omega_2 - 2B_2\omega_3 && (4.10)\\
\frac{dB_2}{dt} &= \left[\left(\frac{1}{2}-A_2-\frac{3}{4}B_2^2\right)p + \frac{3}{4}A_2 B_2 q\right]\omega_1 + \left[\frac{3}{4}A_2 B_2 p - \left(\frac{1}{2}-A_2-\frac{3}{4}B_2^2\right)q\right]\omega_2 + 2A_2\omega_3 && (4.11)
\end{aligned}\right.$$

上式において C, A_2, B_2 は時刻tの画面上から計算できる。時刻 $t+\Delta t$ でも C, A_2, B_2 を測定して，$dA_2/dt \approx [A_2(t+\Delta t) - A_2(t)]/\Delta t$ 等を用いれば dC/dt, dA_2/dt, dB_2/dt も得られる。したがって時刻tでの面のグラジエント (p, q) がわかっていれば上式から未知の角速度ベクトル $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ が求まる。これは次式によって直接的な形に変形できる。（本論文の骨子！）

$$\boxed{\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix} &= \frac{4}{B_2(q^2-p^2)+2A_2 pq}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{(A,\dot{A})}{\frac{2}{3}-\|A\|^2} - \frac{\dot{C}}{C}\right)\begin{bmatrix}A_2 p + B_2 q\\ B_2 p - A_2 q\end{bmatrix} + \frac{(A,\dot{A})}{\frac{2}{3}-\|A\|^2}\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix}\right] && (4.12)\\
\omega_3 &= \frac{1}{2\|A\|^2}\left[[A,\dot{A}] + \left(\left(\|A\|^2-\frac{1}{2}A_2\right)p - \frac{1}{2}B_2 q\right)\omega_1 + \left(-\frac{1}{2}B_2 p + \left(\|A\|^2+\frac{1}{2}A_2\right)q\right)\omega_2\right] && (4.13)
\end{aligned}}$$



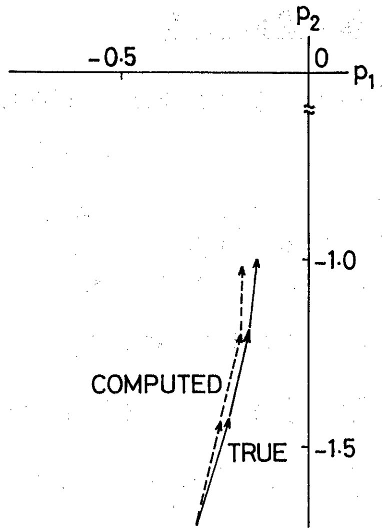


図4. C_0はスラント60°, ティルト80°の面である。C_1, C_2, C_3はC_0を方向余弦$(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$の軸のまわりにそれぞれ10°, 20°, 30°回転させたものである。

図5. グラジエント空間における面の向きの軌跡。実線が真の値, 破線は計算値。

ただし次のような記法を用いた。まず $\dot{C} = dC/dt$ であり,

$$\|A\| = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}, \qquad (A, \dot{A}) = A_2\frac{dA_2}{dt} + B_2\frac{dB_2}{dt}, \qquad [A, \dot{A}] = A_2\frac{dB_2}{dt} - B_2\frac{dA_2}{dt} \tag{4.14}$$

とおいた。時刻tでのグラジエント(p, q)が既知のとき, 画像上の計算によって式(4.12), (4.13)から角速度$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$がわかる。すると式(2.10)より, たとえば

$$\begin{cases} p' \approx p + [pq\omega_1 - (p^2+1)\omega_2 - q\omega_3]\Delta t \\ q' \approx q + [(q^2+1)\omega_1 - pq\omega_2 + p\omega_3]\Delta t \end{cases} \tag{4.15}$$

により, 時刻$t+\Delta t$でのグラジエント(p', q')を知ることができる。これを繰り返せば, 面の時刻0での初期方向さえわかっていれば, 以後は画像のみからその方向の変化が追跡できることになる。

5. 例題

図4のように運動している面を考える。C_0のグラジエントは$p=-0.306$, $q=-1.706$である。面の向きの変化はp-q平面("グラジエント空間")内の軌跡として表せる。図5に真の軌跡と計算値を示す。ただし直径は10°ごとの間隔で測った。$(N=18)$ 図4のように比較的大きな相対的変化に対しても, かなりよい近似を与えていることがわかる。ただし計算にいくつか工夫を加えた。式(2.11)でω_3にはpやqが掛っていないことからわかるように, ω_3の効果はω_1, ω_2の効果より大きい。そこで式(4.13)で$\omega_1, \omega_2 \approx 0$と考え$\omega_{30} = [A, \dot{A}]/2\|A\|^2$を$\omega_3$の第一近似とし, 図形を$\omega_{30}\Delta t$だけ回す。(実際に画像を操作する必要はなく, $A_2 \to A_2\cos(\omega_{30}\Delta t) + B_2\sin(\omega_{30}\Delta t)$, $B_2 \to -A_2\sin(\omega_{30}\Delta t) + B_2\cos(\omega_{30}\Delta t)$とすればよい。)そうしてから式(4.12)(4.13)(4.15)によりグラジエント(p', q')を計算し, $p' \to p'\cos(\omega_{30}\Delta t) - q'\sin(\omega_{30}\Delta t)$,

$q' \to p'\sin(\omega_{30}\Delta t) + q'\cos(\omega_{30}\Delta t)$ とした。次に式(4.15)を直接には用いず，式(2.6)によって一担法線ベクトルに直してから，式(2.8)の差分形に適用し，式(2.5)によってグラジエントに戻した。このほうがやや精度がよいようである。

6. $p=q=0$ の場合

$p=q=0$ のときは式(4.12),(4.13)が適用できない。すなわち，運動を角速度ベクトル（回転群の無限小生成作用素）で線形近似することができない。そこで2次以上の近似が必要となる。時刻tで $p=q=0$ であるとし，時刻t'に p', q' となったとする。このとき xy-面上の変換は次式で表される。

$$\begin{cases} x' = (1-p'^2/2)x - (p'q'+\Omega)y + O(p'^4, q'^4, \Omega^2) \\ y' = -(p'q'-\Omega)x + (1-p'^2/2)y + O(p'^4, q'^4, \Omega^2) \end{cases} \tag{6.1}$$

ただし，Ωはz軸回りの任意の回転角である（"面内回転"）。最後の項はオーダーを示す剰余項である。これを用いるために$|\Omega|$は p'^2, q'^2 のオーダーであると仮定する。このとき，時刻tでの図の分布密度が式(4.1)で表されていれば，時刻t'では次のようになる。

$$f(\theta) = \frac{c'}{2\pi}[1 + a_2'\cos 2\theta + b_2'\sin 2\theta + a_4'\cos 4\theta + b_4'\sin 4\theta] + O(p'^4, q'^4, \Omega^2) \tag{6.2}$$

$$c' = c\left[1 + \frac{1}{4}p'^2 + \frac{1}{8}((q'^2-p'^2)a_2 - 2p'q'b_2)\right] \tag{6.3}$$

$$a_2' = a_2 + \frac{3}{4}(q'^2-p'^2) - \frac{1}{8}a_2[(q'^2-p'^2)a_2 - 2b_2p'q'] - 2b_2\Omega \tag{6.4}$$

$$b_2' = b_2 - \frac{3}{4}(2p'q') - \frac{1}{8}b_2[(q'^2-p'^2)a_2 - 2b_2p'q'] + 2a_2\Omega \tag{6.5}$$

$$a_4' = \frac{5}{8}[(q'^2-p'^2)a_2 + 2p'q'b_2] \tag{6.6}$$

$$b_4' = \frac{5}{8}[(q'^2-p'^2)b_2 - 2p'q'a_2] \tag{6.7}$$

前と同様の関係により，$C, C', A_2, B_2, A_2', B_2'$ を測定することによって p', q' が求まる。p', q' は次の方程式の解となる。

$$\begin{cases} A_2(q'^2-p'^2) - 2B_2pq = -\dfrac{8}{3}(1-C'/C) \\ p'^2 + q'^2 = 4\left[1 - c'/c + \dfrac{(\mathbf{A}, \mathbf{A}') - \|\mathbf{A}\|^2}{2/3 - \|\mathbf{A}\|^2}\right] \end{cases} \tag{6.8}$$

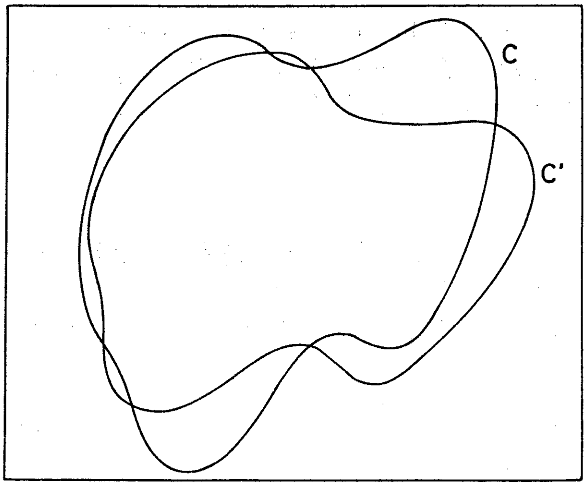
そして，Ωは次のように求まる。

$$\Omega = ([\mathbf{A}, \mathbf{A}'] - \frac{1}{4}[B_2(q'^2-p'^2) + 2A_2pq]/2\|\mathbf{A}\|^2 \tag{6.9}$$

ただし，次のような記法を用いた。

$$(\mathbf{A}, \mathbf{A}') = A_2A_2' + B_2B_2', \qquad [\mathbf{A}, \mathbf{A}'] = A_2B_2 - B_2A_2 \tag{6.10}$$

方程式(6.8)を解くには p', q' を極座標によって $p' = r\cos\phi$, $q' = r\sin\phi$ とおけばよい。まず ϕ_0 を次の式で定まる定角とする。



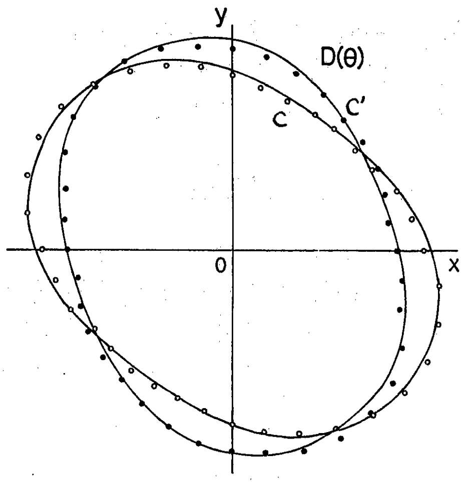


図6. Cはスラント0, C'はスラント30°, ティルト10°であり, 面内で-20°回転している。

図7. CとC'の10°間隔の"直径"の実測値と, それを近似する2次までのFourier級数。

$$\cos 2\phi_0 = A_2/\|A\| , \qquad \sin 2\phi_0 = B_2/\|A\| \qquad (6.11)$$

すると解は次のように与えられる。

$$r = 2\sqrt{1-\frac{C'}{C}+\frac{(A,A')-\|A\|^2}{2/3-\|A\|^2}}, \qquad \phi = \phi_0 + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{2}{3\|A\|\left[1+\frac{(1-C'/C)(2/3-\|A\|^2)}{(A,A')-\|A\|^2}\right]} \qquad (6.12)$$

$\cos^{-1}$の分岐の中から$|\Omega|$の最も小さいものを選ぶ。

以上では$|\Omega| \approx p'^2, q'^2$としたが, p'^2, q'^2が$|\Omega|$に比べて小さいとき($|\Omega|$がp'^2, q'^2に比べて大きいとき)は前と同様に, まず式(6.9)で$p'^2, q'^2 \approx 0$と考えて, $\Omega_0 = [A, A']/2\|A\|^2$を$\Omega$の第一近似とし, 図形を$-\Omega_0$だけ回転させる。(前と同様$A_2', B_2'$の変形のみ計算すればよい。) そこで上の手順を用いてp', q'を計算し, Ω_0だけ回転した値に変換すればよい。図6は図4と同じ面であるがCは$p=q=0$, C'は$p'=-0.289$, $q=-0.5$であり, 面内で$-20°$回転している。10°間隔で"直径"を測定し, 2次のFourier級数で近似したものが図7である。(白丸がC, 黒丸がC') 上の手順によってp', q'を計算したところ, $p'=0.293$, $q'=0.420$であった。(真の値は$p'=-0.289$, $q'=-0.5$である。) 極めて大きな相対変位にもかかわらず, よい近似が得られていることがわかる。(正射影のため(p', q')と$(-p', -q')$とは区別できない。)

本論文の方法の特徴は"直径"さえ測れば, あとは直接的代数計算により運動が陽に求まり, 対応点探索を必要としないことである。(より発展した理論[4]参照。)

謝辞。本研究の一部は実吉奨学会の援助による。

文献

1. K. Kanatani, Detection of Surface Orientation and Motion from Texture by a Stereological Technique, Technical Report CS-83-3, Department of Computer Science, Gunma University, 1983.
2. 金谷健一, 平面の傾きと運動の検出, 情報処理学会コンピュータービジョン研究会 24-1 (1983).
3. K. Kanatani, Tracing Surface Motion from Projection without Knowing Correspondence, Technical Report CS-83-5, Department of Computer Science, Gunma University, 1983.
4. K. Kanatani, Tracing Surface Motion from Perspective by Line and Surface Integrals, Technical Report CS-83-6, Department of Computer Science, Gunma University, 1983.
5. K. Kanatani, Distribution of directional data and fabric tensors, Int. J. Engng Sci. (in press).
6. K. Kanatani, Stereological determination of structural anisotropy, Int. J. Engng Sci. (in press).