# 直角多面体の線画の解釈

Interpretation of Right-angled Polyhedra from their Line Drawings

金谷健一（群馬大学工学部情報工学科）

Ken-ichi Kanatani (Department of Computer Science, Gunma University)

The shapes and orientations of right-angled polyhedra are analyzed from their line drawings. Edge orientations are computed from their images in terms of Hamiltonian quaternions. Face adjacency conditions are studied by considering the transformation group which acts on corners. Visibility conditions are given to restrict possible interpretations.

## 1. Huffmanのラベル付けに代わるもの：変換群による特徴づけ

物体の形状，位置，向きを射影された画像から復元することはコンピューター・ビジョンの中心的課題のひとつである。しかし射影によって奥行きの情報が失なわれているから，何らかの仮定または"制約"がなければ復元は不可能である。代表的な仮定は対象が多面体であるというものであり，Huffmanら多くの人々により，ラベル付けによる解釈がよく研究されている。また面の平面性を利用して，その向きや運動を対応点を用いずに決定できる[1~7]。

本報告では角が直角であるような多面体を考える。さらに，ひとつの頂点からは3本の辺が出ているものとする。このように強い制約を課しても日常遭遇する多くのもの（機械部品，建造物，道具，工業製品，その他）を包含しているので実用上の大きな制約とはならないし，従来の人工知能の文献の例を見ても，ほとんどが直角多面体である。角が直角であることの特徴のひとつは，すべての角（頂点とそこから出ている3本の辺）は並進，剛体回転，反転によって重ね合すことができることであり，その操作は並進を除けば（広義）回転群 $O(3)$ の部分群になっていることである。この変換群による特徴づけが一般の多面体にはない新しい観点であり，直角多面体の場合にラベル付けに代って強い威力を発揮する[8]。

## 2. 3辺の方向の決定法

図1のように $xy$ 座標軸を画面上にとり，物体は $z$ 軸に沿って直交射影されるとする。$z$ 方向に移動しても画像は変化しないから，いま，ある頂点が座標原点に一致しているとする。そこから出ている3辺を任意に1, 2, 3と番号をつける。そして辺 $i$ の方向を，この座標系に関する球座標により $\theta_i, \phi_i$ とする。$\phi_i$ は辺の射影と $x$ 軸とのなす角として画面上で観測できる。ゆえに辺の方向を知る問題は $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ から $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を計算することである。

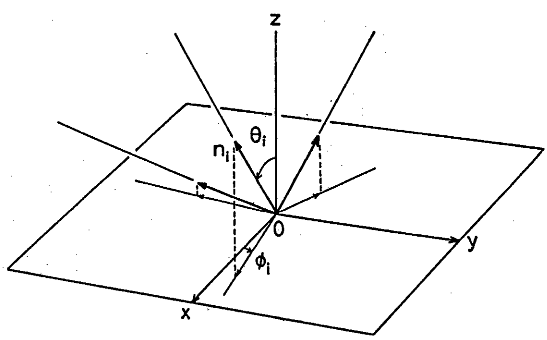



図 1

原点を始点とし，辺 $i$ の方向に沿う単位ベクトルを $n_i$ とする。その成分は

$$n_i = (\sin\theta_i\cos\phi_i,\ \sin\theta_i\sin\phi_i,\ \cos\theta_i) \tag{2.1}$$

であるから，辺 $i$ と辺 $j$ とが直交するという条件は

$$\sin\theta_i \sin\theta_j (\cos\phi_i \cos\phi_j + \sin\phi_i \sin\phi_j) + \cos\theta_i \cos\theta_j = 0 \qquad (2.2)$$

$$\therefore \quad \tan\theta_i \tan\theta_j = -1/\cos(\phi_i - \phi_j) \qquad (2.3)$$

となる。もし全部の辺が"上向き"（$0<\theta<\pi/2$）であれば

$$\left\{\begin{aligned}
\theta_1 &= \tan^{-1}\sqrt{-\cos(\phi_2-\phi_3)/\cos(\phi_1-\phi_2)\cos(\phi_1-\phi_3)} \\
\theta_2 &= \tan^{-1}\sqrt{-\cos(\phi_3-\phi_1)/\cos(\phi_2-\phi_3)\cos(\phi_2-\phi_1)} \\
\theta_3 &= \tan^{-1}\sqrt{-\cos(\phi_1-\phi_2)/\cos(\phi_3-\phi_1)\cos(\phi_3-\phi_2)}
\end{aligned}\right. \qquad (2.4)$$

である。もし辺 $i$ が"下向き"（$\pi/2<\theta<\pi$）であれば，上式で計算した $\theta_i$ を $\pi-\theta_i$（$xy$ 平面に関する鏡像）とすればよい。辺の上向き下向きの関係をみるには3辺の射影された図形を"フォーク"（図2(a)）と"アロー"（図2(b)）とに分類する必要がある。フォークでは全部の辺が上向きか全部の辺が下向きかのいずれかである。アローでは"中辺"が上向きで"外辺"が下向きか，中辺が下向きで外辺が上向きかのいずれかである。以上のことから，角の空間的向きは $xy$ 面に関する鏡映を除いて一意的に定まることがわかる。（注。本報告では"一般の位置"にあるもののみを考え，L や T のような"縮退"した頂点図形は考えない。）

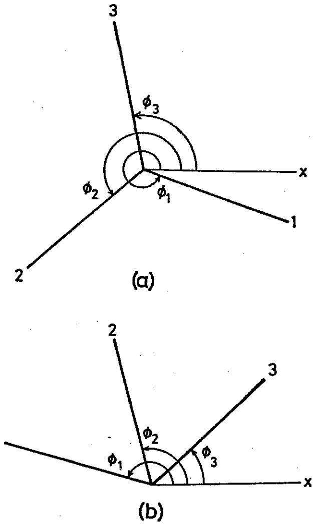


図 2

以上のようにして $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ から $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を計算したとして，次の行列を考える。

$$\mathbb{R} = \begin{bmatrix} \sin\theta_1\cos\phi_1 & \sin\theta_2\cos\phi_2 & \sin\theta_3\cos\phi_3 \\ \sin\theta_1\sin\phi_1 & \sin\theta_2\sin\phi_2 & \sin\theta_3\sin\phi_3 \\ \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cos\theta_3 \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

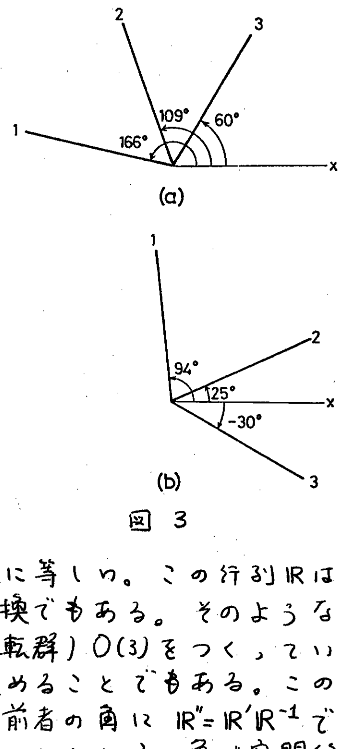
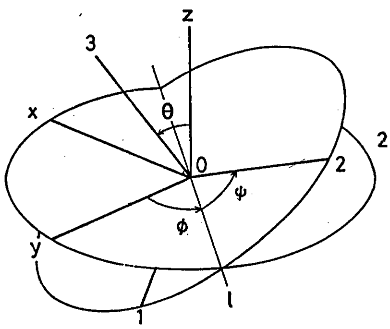


図 3

この第1, 2, 3列がそれぞれ $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$ の成分となっている。すなわち角の方向を知ることは行列 $\mathbb{R}$ を知ることに等しい。この行列 $\mathbb{R}$ は $x, y, z$ 軸をそれぞれ辺1，2，3に写像する線形変換でもある。そのような変換は剛体回転と反転とからなり，直交変換群（広義回転群）$O(3)$ をつくっている。従って角の方向を知ることは変換群 $O(3)$ の要素を定めることでもある。このことから，変換 $\mathbb{R}, \mathbb{R}'$ で表されるふたつの角があれば，前者の角に $\mathbb{R}'' = \mathbb{R}'\mathbb{R}^{-1}$ で表される回転をほどこしたものが後者の向きである。このことから，角が空間的に向きを変えたとき，それがどのような回転であるかが射影された像のみから決定できる。すなわち像の運動から対象の運動が求まる。

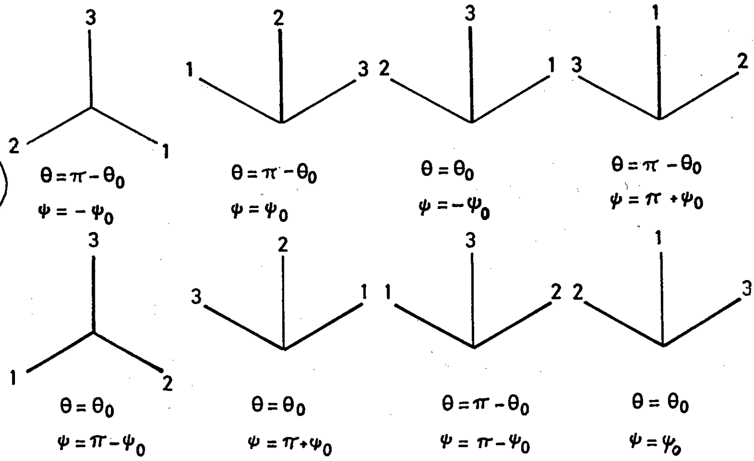
例。図4(a)で中辺が上向きとする。このとき(2.4)より $\theta_1=116°$, $\theta_2=41°$, $\theta_3=120°$ となる。また図4(b)でも中辺が上向きとすると(2.4)より $\theta_1=121°$, $\theta_2=59°$, $\theta_3=133°$ となる。それぞれの角の向きは次の行列 $\mathbb{R}, \mathbb{R}'$ によって表される。図4(a)の角に $\mathbb{R}''$ で表される回転をほどこしたものが図4(b)とすれば $\mathbb{R}''$ も次のようになる。




↑

図4

図5 →




$$\mathbb{R}=\begin{bmatrix}-0.8757 & -0.2148 & 0.4332\\ 0.2182 & 0.6240 & 0.7504\\ -0.4315 & 0.7513 & -0.4993\end{bmatrix}\qquad \mathbb{R}'=\begin{bmatrix}-0.0601 & 0.7750 & 0.6291\\ 0.8588 & 0.3614 & -0.3632\\ -0.5088 & 0.5184 & -0.6872\end{bmatrix}\tag{2.6}$$

$$\mathbb{R}''=\mathbb{R}\mathbb{R}^{-1}\ (=\mathbb{R}\mathbb{R}^{T})=\begin{bmatrix}0.1586 & 0.9425 & 0.2941\\ -0.9867 & 0.1404 & 0.0823\\ 0.3628 & -0.3032 & 0.9522\end{bmatrix}\tag{2.7}$$

## 3. Euler角とHamiltonの四元数による表示

前述のように角の向きは局所的には鏡映の自由度が残るが，後述の大域的な条件によってどちらかが定まる。いま，ある頂点で辺1，2，3がこの順序に右手系をつくるように番号をつけたとする。するとx，y，z軸を（純粋）回転（SO(3)の元）によって辺1，2，3に重ねることができる。このときのEuler角（図4）をθ，φ，ψとする。このとき角の向きを表わす(2.5)の直交行列$\mathbb{R}$は次のようになる。

$$\mathbb{R}=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\phi\cos\psi-\sin\phi\sin\psi & -\cos\theta\cos\phi\sin\psi-\sin\phi\cos\psi & \sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\cos\psi+\cos\phi\sin\psi & -\cos\theta\sin\phi\sin\psi+\cos\phi\cos\psi & \sin\theta\sin\phi\\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta\end{bmatrix}\tag{3.1}$$

これを用いて，観測される辺の向き$\phi_1,\phi_2,\phi_3$からEuler角$\theta,\phi,\psi$を計算できる。図4から$\phi=\phi_3$が直ちにわかる。次に(2.5)と(3.1)との比較より

$$\tan\phi_1=\frac{\cos\theta\sin\phi\cos\psi+\cos\phi\sin\psi}{\cos\theta\cos\phi\cos\psi-\sin\phi\sin\psi},\qquad \tan\phi_2=\frac{\cos\theta\sin\phi\sin\psi-\cos\phi\cos\psi}{\cos\theta\cos\phi\sin\psi+\sin\phi\cos\psi}\tag{3.2}$$

であるから，θ，ψは次のように求まる。

$$\theta=\theta_0\ \text{or}\ \pi-\theta_0,\qquad \psi=\psi_0,\ -\psi_0,\ \pi-\psi_0\ \text{or}\ \pi+\psi_0\tag{3.3}$$

$$\theta_0\equiv\cos^{-1}\sqrt{\cot(\phi_3-\phi_1)\cot(\phi_2-\phi_3)},\qquad \psi_0=\tan^{-1}\sqrt{\tan(\phi_3-\phi_1)/\tan(\phi_2-\phi_3)}\tag{3.4}$$

(3.3)のθとψの組み合せ方は8通りある。一方，辺の番号の付け方はフォークでは2通り（輪環の順）あり，アローでは6通り（順序）あり，合計8通りである。こ

れらはちょうど図5のように対応している。(太線が上向きの辺。) ゆえにこの表を参照すれば画像よりEuler角を決定することができる。

[例。再び図3を考える。(3.3), (3.4) と図5によれば図3(a)では $\theta=120°$, $\phi=60°$, $\psi=60°$ であり、図3(b)では $\theta=133°$, $\phi=-30°$, $\psi=46°$ である。この値より(3.1)の行列 $\mathbb{R}$ を計算すれば(2.6)の $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}'$ と一致する。]

Euler角を用いる利点は相対的回転の軸や角度が直ちに求まる点にある。まず、Euler角 $\theta, \phi, \psi$ の回転は次のHamiltonの"四元数"によって表わされることに注意。

$$q=\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\psi+\phi}{2}+\mathbb{k}\sin\frac{\psi+\phi}{2}\right)+\sin\frac{\theta}{2}\left(\mathbb{i}\sin\frac{\psi-\phi}{2}+\mathbb{j}\cos\frac{\psi-\phi}{2}\right) \tag{3.5}$$

復習：任意の回転 $\mathbb{R}\in SO(3)$ は $q=q_0+q_1\mathbb{i}+q_2\mathbb{j}+q_3\mathbb{k}$ なる四元数で表され、$q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=1$ である。すなわち位相的には3次元球面 $S^3$ の一点である。もちろん、これは単連結である($\pi_1(S^3)\cong 0$)。一方、回転群 $SO(3)$ は Lie群として単連結ではなく、$\pi_1(SO(3))\cong \mathbb{Z}_2$ (2次の巡回群)である。したがって対応 $S^3\to SO(3)$ は2対1であり、$q$ と $-q$ とは同じ回転である。そして $S^3$ の四元数が回転群 $SO(3)$ の普遍被覆群となっている。回転の合成 $\mathbb{R}''=\mathbb{R}'\mathbb{R}$ は四元数でも $q''=q'q$ である。ただしその乗算は次の規則に従う。

$$\mathbb{i}\mathbb{i}=-1,\quad \mathbb{j}\mathbb{j}=-1,\quad \mathbb{k}\mathbb{k}=-1,\quad \mathbb{i}\mathbb{j}=-\mathbb{j}\mathbb{i}=\mathbb{k},\quad \mathbb{j}\mathbb{k}=-\mathbb{k}\mathbb{j}=\mathbb{i},\quad \mathbb{k}\mathbb{i}=-\mathbb{i}\mathbb{k}=\mathbb{j} \tag{3.6}$$

もし回転 $\mathbb{R}$ が四元数 $q=q_0+q_1\mathbb{i}+q_2\mathbb{j}+q_3\mathbb{k}$ で表せれば、その逆回転 $\mathbb{R}^{-1}$ は共役四元数 $q^*=q_0-q_1\mathbb{i}-q_2\mathbb{j}-q_3\mathbb{k}$ で表せる。ゆえに相対回転 $\mathbb{R}''=\mathbb{R}'\mathbb{R}^{-1}$ は $q''=q'q^*$ となる。一方、点$(x,y,z)$が回転 $\mathbb{R}$ によって点$(x',y',z')$へ移ったとすれば $\mathbb{r}'=\mathbb{R}\mathbb{r}$ に対応するのは $\mathbb{r}'=q\mathbb{r}q^*$ である。ただし $\mathbb{r}=x\mathbb{i}+y\mathbb{j}+z\mathbb{k}$, $\mathbb{r}'=x'\mathbb{i}+y'\mathbb{j}+z'\mathbb{k}$ とする。これを計算することによって $q=q_0+q_1\mathbb{i}+q_2\mathbb{j}+q_3\mathbb{k}$ に対応する $\mathbb{R}$ が定まり

$$\mathbb{R}=\begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(-q_0q_3+q_1q_2) & 2(q_0q_2+q_1q_3) \\ 2(q_0q_3+q_1q_2) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(-q_0q_1+q_2q_3) \\ 2(-q_0q_2+q_1q_3) & 2(q_0q_1+q_2q_3) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

となる。また、単位ベクトル $\mathbb{n}=(n_1,n_2,n_3)$ の回りの右ねじ方向に角度 $\Omega$ の回転は

$$q=\cos\frac{\Omega}{2}+\mathbb{n}\sin\frac{\Omega}{2} \tag{3.8}$$

である。ただし $\mathbb{n}=n_1\mathbb{i}+n_2\mathbb{j}+n_3\mathbb{k}$ とする。ゆえに $q=q_0+q_1\mathbb{i}+q_2\mathbb{j}+q_3\mathbb{k}$ の回転軸 $\mathbb{n}$ と転角 $\Omega$ とは次のように求まる。

$$\Omega=2\cos^{-1}q_0,\qquad \mathbb{n}=(q_1,q_2,q_3)/\sin\frac{\Omega}{2} \tag{3.9}$$

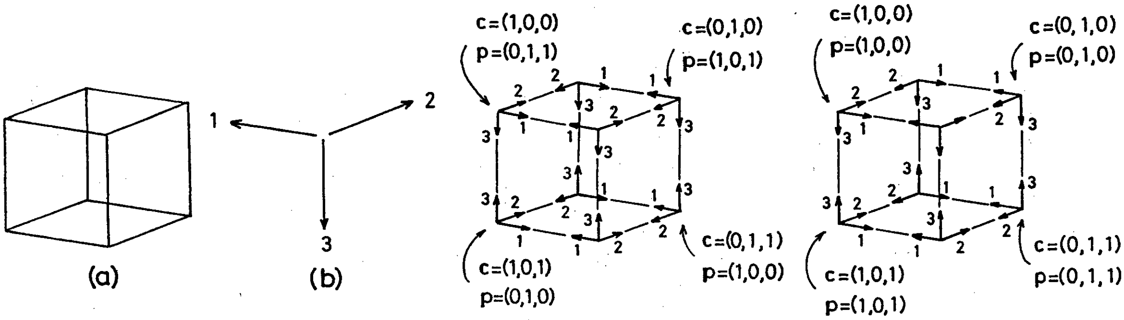
[例。前と同じ例を考える。(3.5)より図3(a), 3(b)の四元数はそれぞれ

$$q=0.2497+0.0010\mathbb{i}+0.8658\mathbb{j}+0.4336\mathbb{k},\quad q'=0.3918+0.5625\mathbb{i}+0.7261\mathbb{j}+0.0534\mathbb{k} \tag{3.10}$$

となる。したがって、その相対回転は次の四元数で表せる。

$$q''=q'q^*=0.7502-0.1285\mathbb{i}+0.0859\mathbb{j}-0.6429\mathbb{k} \tag{3.11}$$

(3.9)より回転軸は $\mathbb{n}=(-0.1943, 0.1230, -0.9723)$ であり、回転角は $\Omega=83°$ であることがわかる。$q, q', q''$ について(3.7)を計算すれば(2.6), (2.7)と一致する。]




(a) (b) (c) (d)

図 6

## 4. 頂点の型と方向およびその変換

直角多面体では辺の方向は3種類しかない。それらに適当に向きを定義して，1, 2, 3と番号をつけ，それぞれ1, 2, 3軸とよぶ（図6(b)）。以下これが"座標系"の役割を果たす。これによって各頂点に接続する辺は辺1，辺2，辺3と区別できる。それぞれに頂点から出る方向に向きを定義する（図6(c)(d)）。

本節では"面"や中に詰っている"物質"は考えず，多面体を針金細工とみなす。するとすべての頂点と辺とが画面上に射影される。（面や物質は次節以下で考慮する。

各頂点の"型"を2進ベクトル $\mathbf{c}=(c_1, c_2, c_3)$ で定義する。ただし辺 $i$ が $i$ 軸と同じ方向のとき $c_i=0$，反対方向のとき $c_i=1$ とする。

任意にふたつの頂点をとり出したとき，それらの間の"変換"を2進ベクトル $\mathbf{t}=(t_1, t_2, t_3)$ で定義する。ただし，それらの頂点において辺 $i$ が同じ方向のとき $t_i=0$，反対方向のとき $t_i=1$ とする。この変換は成分ごとの2を法とする和（排他的OR）$\oplus$ によって変換群Tをなしていることが次の関係よりわかる。

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{t}\oplus\mathbf{t}'=\mathbf{t}'\oplus\mathbf{t} \\ (\mathbf{t}\oplus\mathbf{t}')\oplus\mathbf{t}''=\mathbf{t}\oplus(\mathbf{t}'\oplus\mathbf{t}'') \\ \mathbf{t}\oplus\mathbf{t}=\mathbf{0} \end{array}\right\} \quad (4.1)$$

すなわちTは加群であり，恒等変換は $\mathbf{0}$，各元は自分自身の逆元であり

$$T \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \qquad (4.2)$$

である。この変換群は頂点の型に対して次のように作用する。

定理1。変換 $\mathbf{t}$ が型 $\mathbf{c}$ の頂点を型 $\mathbf{c}'$ の頂点に変換するとき

$$\mathbf{c}'=\mathbf{c}\oplus\mathbf{t} \quad \text{or} \quad \mathbf{t}=\mathbf{c}\oplus\mathbf{c}' \qquad (4.3)$$

次に各頂点の"方向"を2進ベクトル $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)$ で定義する。ただし辺 $i$ が上向きのとき $p_i=0$，下向きのとき $p_i=1$ とする。2，3節の結果によると $\mathbf{p}$ が定まれば各辺の空間的方向は球座標（Euler角，四元数）で一意的に定まる。ゆえに物体の方向を決めることは各頂点の方向 $\mathbf{p}$ を定めることであるといえる。

定理2。変換 $\mathbf{t}$ が方向 $\mathbf{p}$ の頂点を方向 $\mathbf{p}'$ の頂点に変換するとき

$$\mathbf{p}'=\mathbf{p}\oplus\mathbf{t} \quad \text{or} \quad \mathbf{t}=\mathbf{p}\oplus\mathbf{p}' \qquad (4.4)$$

系。ある頂点の型が $\mathbf{c}$，方向が $\mathbf{p}$ であるとすれば，型 $\mathbf{c}'$ の頂点の方向は

$$\mathbf{p}'=\mathbf{p}\oplus\mathbf{c}\oplus\mathbf{c}' \qquad (4.5)$$

画像が得られたとき，適当に座標系を選べば各頂点の型とその間の変換群が定まる。上の系によれば，どれかひとつの頂点の方向 $\mathbf{p}$ がわかれば残りの頂点の方向はすべて定まることになる。ひとつの頂点の方向は既に調べたように2通りの

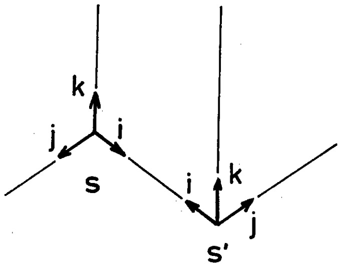
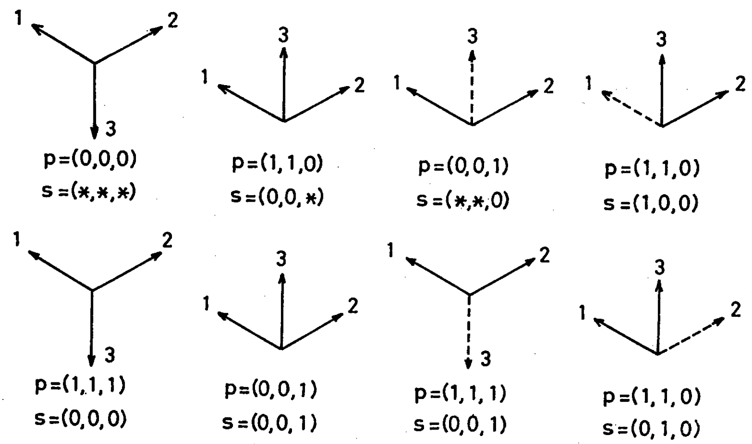



図7

図8 →




すなわち鏡像の自由度がある。したがって直角多面体全体としての方向も鏡像の自由度に対して2通りとなる。図6はよく知られた立方体の例であり，図6(a)から図6(c), 6(d)を区別することは不可能である。

## 5. 頂点の状態と面の接続

各頂点において2辺の張る面はそこにおいて $\pi/2$ か $3\pi/2$ のいずれかの角度をなしている。そこで頂点の"状態"を2進ベクトル $\mathbb{S}=(s_1, s_2, s_3)$ で定義する。ただし $ij$ 面が $\pi/2$ の角をなしていれば $s_{[ij]}=0$, $3\pi/2$ であれば $s_{[ij]}=1$ とする。ここで $[12]=[21]=3$, $[23]=[32]=1$, $[31]=[13]=2$ と約束する。これは次の定理に従わなければならないことがわかる。

定理3。$\mathbb{S}$ のふたつの成分が1となることはない。すなわち

$$s_1s_2 \oplus s_2s_3 \oplus s_3s_1 = 0 \qquad (5.1)$$

定理4。状態が $\mathbb{S}, \mathbb{S}'$ のふたつの頂点が辺 $i$ によって連結されているとする。この頂点の間の変換を $\mathbb{t}$ とすると

$$s'_{[ij]} = s_{[ij]} \oplus t_j \quad j \neq i \qquad (5.2)$$

系。辺 $i$ によって隣接する2頂点の型と状態とがそれぞれ $\mathbb{C}, \mathbb{C}'$ と $\mathbb{S}, \mathbb{S}'$ とすると

$$s'_{[ij]} = s_{[ij]} \oplus c_j \oplus c'_j \qquad (5.3)$$

これらを組み合せると，たとえば状態が $\mathbb{S}, \mathbb{S}'$ の2頂点が辺 $i$ で連結されていて，両者の間で辺 $j$ は逆方向だが残りの辺 $k$ は同じ方向とする（図7）。すると $s_{[ki]} = s'_{[ki]} = 0$ である。なぜなら，もしそうでなければ定理4より $s_{[ki]} = s'_{[ki]} = 1$ であるから，定理3から $s_{[ij]} = s'_{[ij]} = 0$ となり，定理4に反する。

しかし，このようにして各頂点の状態 $\mathbb{S}$ を決めても解は一意的ではない。たとえば図6の場合，孤立した立方体か，平面上の突起か，物質中の空孔か，等が定まらない。それは人間が判断しても同様である。

## 6. 可視条件と隠線検出

最後の段階として"物質"を考える。すなわち各面の片側は不透明な物質で満たされているとする。すると頂点は"完全な頂点"（3辺が見える），"不完全な頂点"（2辺のみが見える），"隠れた頂点"（3辺とも見えない）の3種類に分類できる。

前節までの考察は見える頂点（完全な頂点および不完全な頂点）に限定すればそのまま適用できる。ただし不完全な頂点では $\mathbb{t}, \mathbb{C}, \mathbb{P}, \mathbb{S}$ 等は見える辺や面に対応する成分のみが定まる。しかし，見えている頂点について，それが見えているという事実を利用して，可能な解釈の範囲を狭めることができる。

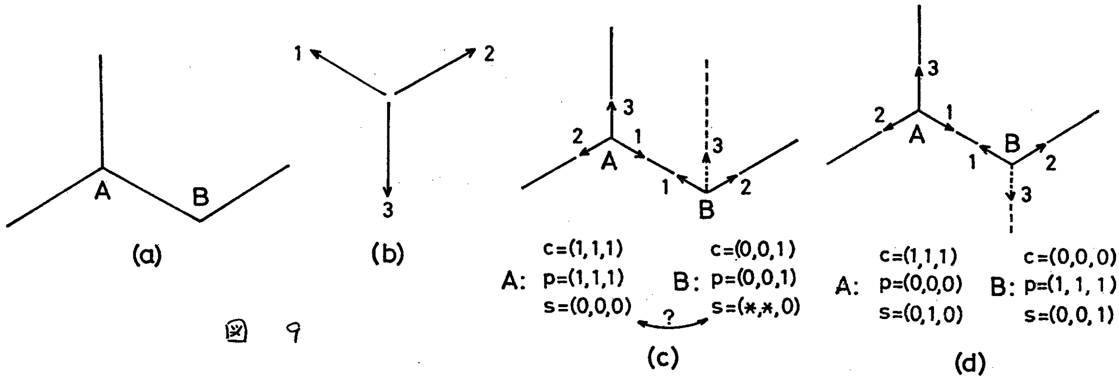



図 9

前節までの議論は"座標系に不変"であった。すなわち可能な3方向に勝手に向きと番号をつけても成立する。以下では特殊な座標系を用いるのが便利である。座標系が図6(b)，図9(b)のようにフォークを作っているものを"フォーク座標系"とよび，以下これを用いる。

<u>定理5</u>。型$\mathbb{C}$の頂点において辺$i$と辺$j$とは$c_i \oplus c_j = 0$のとき鈍角をなし，$c_i \oplus c_j = 1$のとき鋭角である。

<u>系</u>。型が(0,0,0)か(1,1,1)の頂点はフォークであり，他はアローである。

この定理によってある頂点がフォークかアローか，2辺のなす角が鈍角か鋭角かが型$\mathbb{C}$から自動的に決定できる。

さて，頂点の見え方からくる制約は図8のようになる。まず完全な頂点を考えると，それはフォークかアローである。フォークであれば3辺とも上向き($\mathbb{P}=(0,0,0)$)か3辺とも下向き($\mathbb{P}=(1,1,1)$)である。前者の場合は状態$\mathbb{S}$には制約がないが，後者では$\mathbb{S}=(0,0,0)$でなければならない。一方，アローであれば中辺(辺$i$とする)が上向きで外辺(辺$j,k$とする)が下向きか，あるいは中辺が下向きで外辺が上向きかである。前者の場合$s[ij]=s[ik]=0$でなければならない。後者では$s[ij]=s[ik]=0$，$s[jk]=1$でなければならない。

次に不完全な頂点を考える。これは完全な頂点より多くの情報を与えてくれる。それは次の事実によるものである。

<u>定理6</u>。不完全な頂点の見えない辺は必ず下向きである。

見える辺を辺$i,j$，見えない辺を辺$k$とする。見える辺は鈍角をなす($c_i \oplus c_j = 0$)か鋭角をなす($c_i \oplus c_j = 1$)。前者の場合，見えない辺が中にあるか外にあるかでアローかフォークかができる。アローができれば$p_i=p_j=0$，$p_k=1$，$s[ij]=0$であり，フォークなら$\mathbb{P}=(1,1,1)$，$s[ik]=s[jk]=0$，$s[ij]=1$である。後者の場合はアローができるが，その中辺を辺$j$とすれば$p_i=p_k=1$，$p_j=0$，$s[ik]=s[jk]=0$，$s[ij]=1$でなければならない。

## 7. 多面体解釈の手続きと例題

まずフォーク座標系をひとつ選ぶ。すると見える頂点の型がすべて(不完全な頂点では見える辺に対してのみ)定まる。次に不完全な頂点をひとつ選び，見えない辺の向きを仮定してみる。すると定理6からその頂点の，したがって定理2からすべての見える頂点の方向が(不完全な頂点でも見えない辺は下向きだから)定まる。次に図8の可視条件と定理3,4が成立しているかを確め，矛盾があれば仮定を変更する。このようにして不完全な頂点の見えない辺が検出され，完全なおよび不完全な頂点の全部に型$\mathbb{C}$，方向$\mathbb{P}$，

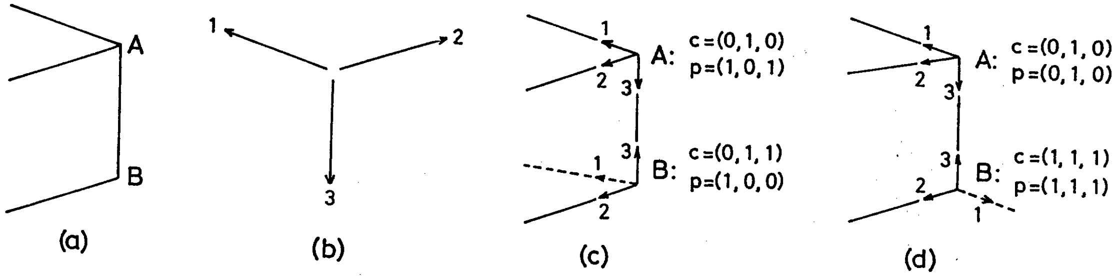



図 10

状態$\mathbb{S}$のすべての成分が矛盾なく定まったとき"解釈"が定まったという。

例。図9(a)を考える。まず図9(b)のように座標系をとる。頂点Bでの見えない辺に対して図9(c)(d)の2通りの可能性が生じる。図9(c)とすると定理6,2と図8の可視条件からAで$\mathbb{S}=(0,0,0)$, Bで$\mathbb{S}=(*,*,0)$となるが、これは定理3,4に矛盾する。ゆえに図9(d)が残り、この場合はA,Bとも$\mathbb{C}$,$\mathbb{P}$,$\mathbb{S}$が一意的に定まり、解釈がただひとつに決定する。

例。図10(a)を考える。座標系は図10(b)とする。頂点Bの見えない辺について図10(c)(d)の可能性があるが、図10(d)とすれば、やはり定理6,2と図8の可視条件から導いたものと定理3,4とが矛盾する。ゆえに図10(c)が残るが、可能な解釈は3通り(孤立した多面体の端,床上の突起,壁上の突起)となる。

比較のために図9(a)にHuffmanのラベル付けを適用したのが図11である。ラベル付けでは7通りの解釈が残ってしまう。しかし、直角性を利用した本報告の方法では解釈を図11(e)のただ一通りに定めることができる。

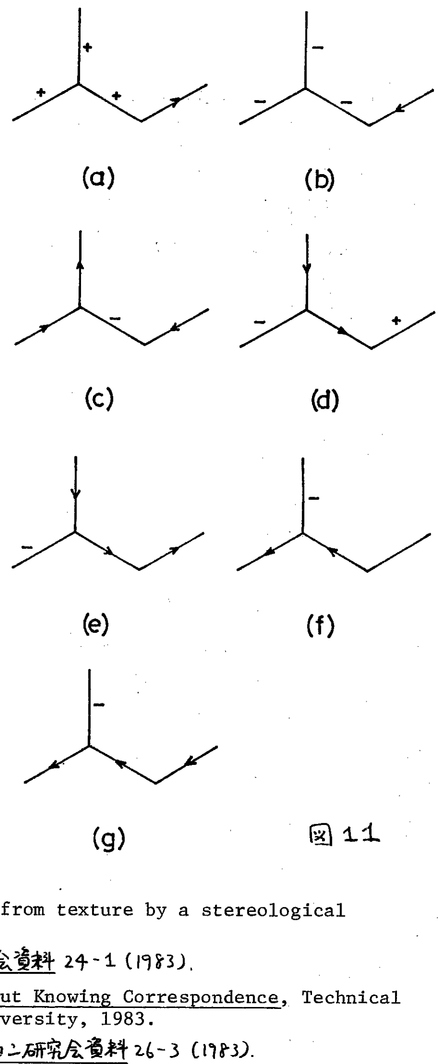



図 11

## [文 献]


1. K. Kanatani, Detection of surface orientation and motion from texture by a stereological technique, Artificial Intelligence (to appear).
2. 金谷健一, 平面の傾きと運動の検出, 情報処理学会コンピュータビジョン研究会資料 24-1 (1983).
3. K. Kanatani, Tracing Surface Motion from Projection without Knowing Correspondence, Technical Report CS-83-5, Department of Computer Science, Gunma University, 1983.
4. 金谷健一, 任意形状の面の運動の追跡, 情報処理学会コンピュータビジョン研究会資料 26-3 (1983).
5. K. Kanatani, Tracing Surface Motion from Perspective by Line and Surface Integrals, Technical Report CS-83-6, Department of Computer Science, Gunma University, 1983.
6. 金谷健一, 線積分, 面積分による3次元運動の解析, 情報処理学会コンピュータビジョン研究会資料 27-5 (1983)
7. 金谷健一, 対応点を用いない両眼視, 3次元運動解析の一般化, 情報処理学会第28回全国大会講演論文集 (1984).
8. K. Kanatani, Interprepation of Right-angled Polyhedra from their Projected Images, Technical Report CS-83-7, Department of Computer Science, Gunma University, 1983.