平行射影オプティカルフローの解析

Analysis of Optical Flow under Orthographic Projection

群馬大学工学部情報工学科　金谷 健一
Department of Computer Science, Gunma University　Ken-ichi Kanatani

1. オプティカルフローのパラメータ推定

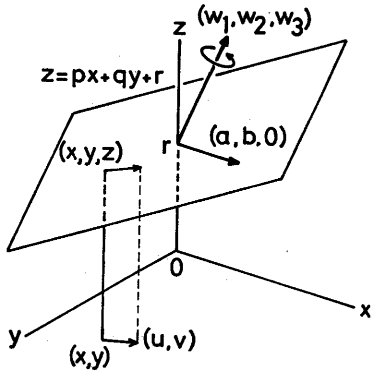


図1. 平行射影とオプティカルフロー

図1のように空間に固定した座標系を考え，対象をz軸と平行にxy面上へ射影した像を見ているものとする。いま $z=px+qy+r$ なる平面が剛体運動しているとする。瞬間的には運動はある基準点での並進速度とその点の回りの回転速度とで指定できる。基準点として面とz軸との交点$(0,0,r)$を選び，そこでの並進速度を$(a,b,0)$とし（z軸方向の運動は識別できないからz成分を始めから0とする），回転速度を$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$とする（$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$軸回りの角速度$\sqrt{(\omega_1)^2+(\omega_2)^2+(\omega_3)^2}$ (rad/sec)の右ねじ方向の回転）。

以上より，パラメータは面の「グラジェント」p, q,「絶対距離」r,「並進速度」a, b,「回転速度」$\omega_1, \omega_2, \omega_3$の合計8個である。このとき，$xy$面上の像の各点は次式で表される「オプティカルフロー」に従って変化することが幾何学的な関係からすぐわかる。

$$u(x,y) = a + p\omega_2 x + (q\omega_2 - \omega_3)y, \quad v(x,y) = b - (p\omega_1 - \omega_3)x - q\omega_1 y \tag{1}$$

最初に行なうことは，速度$u(x,y)$, $v(x,y)$が与えられているような特徴点で，

$$u(x,y) \approx a + Ax + By, \quad v(x,y) \approx b + Cx + Dy \tag{2}$$

なる一次式をあてはめることである。最も単純なのは最小二乗法

$$M = \sum_i \left[(a+Ax_i+By_i - u(x_i,y_i))^2 + (b+Cx_i+Dy_i - v(x_i,y_i))^2\right] \longrightarrow \min. \tag{3}$$

であろう。ただしΣは速度が与えられている特徴点に関する総和を表わす。これから得られる「正規方程式」を解いてa, b, A, B, C, Dが求まるが，これらを再び(3)に代入した「残差」は次のようになる。（$u_i = u(x_i,y_i)$とおく。）

$$M = \sum_i u_i^2 - \left(a\sum_i u_i + A\sum_i x_i u_i + B\sum_i y_i u_i\right)$$
$$+ \sum_i v_i^2 - \left(b\sum_i v_i + C\sum_i x_i v_i + D\sum_i y_i v_i\right) \tag{4}$$

測定誤差がなければ$M=0$となるはずである。これから次のことが考えられる。まず近接した数個の特徴点から(3)により推定を行なう。もし(4)の残差が十分小さくなければその領域は平面の像とはみなせない。もし残差が小さければ周囲の特徴点を追加して改めて推定をやり直し，残差を計算する。こうして残差が小さい限り領域の拡張を行なう。こうすれば対象が平面でない場合（多面体や滑らかな曲面）でも平面部分，あるいは平面とみなせる小領域に分割できるであろう。（各小領域の境界をはっきり定める必要はない。4節参照。）したがって，対象が平面の場合を考察すれば，任意の形状の対象について解釈を行なうことができる。

2. 座標変換によるパラメータ変換則と流体との類同

観察している画面はxy面であるが，画面上にどのようにxy軸をとっても解釈は本質的に同じでなければならない。(解釈の「不変性」)。いまxy軸を正の向きにθだけ回転して，(g, h)だけ平行移動した新しいx′y′軸をとる(図2)。新旧座標の関係は

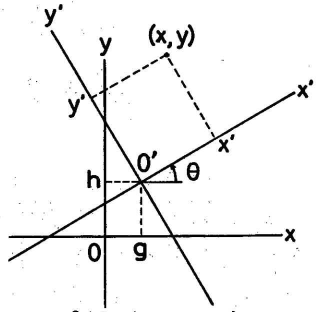


図2. 座標軸の平行移動と回転

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\right), \text{ i.e., } \mathbf{r}' = R(\mathbf{r} - \mathbf{g}) \quad (5)$$

である。このとき $a, b, p, q, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ の受ける変換は

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + R\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

であり，$\omega_3' = \omega_3$ (「(絶対)不変量」)である。p, q と ω_1, ω_2 は「ベクトル変換則」に従うから，次のように複素数表示できる。

$$P = p + iq \longrightarrow P' = e^{-i\theta}P, \qquad W = \omega_1 + i\omega_2 \longrightarrow W' = e^{-i\theta}W \quad (7)$$

すなわち，P, Wはともに「ウェイト」−1の「(相対)不変量」である。

一方，オプティカルフローは次のような変換を受ける。

$$\begin{cases} u = a + Ax + By \\ v = b + Cx + Dy \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u' = a' + A'x + B'y \\ v' = b' + C'x + D'y \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + R\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}R^T \quad (9)$$

すなわち，A, B, C, Dは「テンソル変換則」に従う。したがって，Weylの原理により，テンソルの対称性に基いて「既約表現」への簡約ができる。まず，次のように「対称部分」と「反対称部分」とに分解できる。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \frac{B+C}{2} \\ \frac{B+C}{2} & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{C-B}{2} \\ \frac{C-B}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

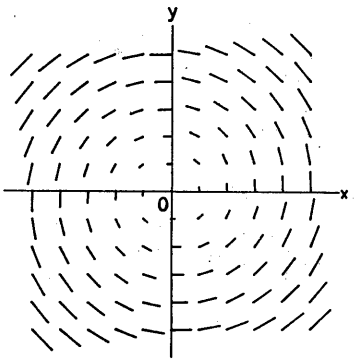
反対称部分は回転するフローを表し，$R = C - B \left(= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ が回転量である(図3)。対称部分はさらに「スカラー部分」と「偏差部分」とに分解できる。

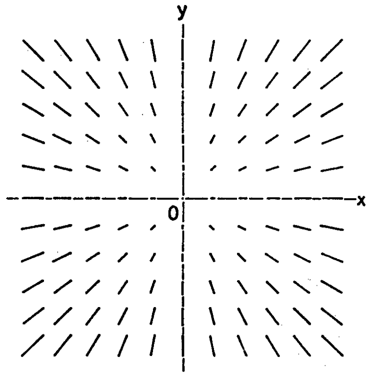
$$\begin{bmatrix} A & \frac{B+C}{2} \\ \frac{B+C}{2} & D \end{bmatrix} = \frac{A+D}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A-D}{2} & \frac{B+C}{2} \\ \frac{B+C}{2} & -\frac{A-D}{2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

スカラー部分は発散するフローを表し，$T = A + D \left(= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ が発散量である(図4)。偏差部分はせん断流を表す(図5)。$S_1 = A - D$, $S_2 = B + C$ とおくと，$|S| = \sqrt{(S_1)^2 + (S_2)^2}$ がせん断量である。以上より2次元回転群の一次元既約表現が次のように作られる。

$$T' = T, \qquad R' = R, \qquad (S_1' + iS_2') = e^{-2i\theta}(S_1 + iS_2) \quad (12)$$

すなわち，発散量Tと回転量Rはともに(絶対)不変量であり，$S = S_1 + iS_2$ はウ





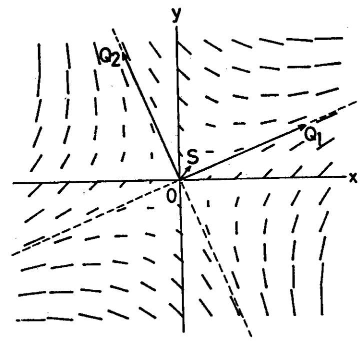


図3. 回転流 $\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-R\\R&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$　図4. 発散流 $\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T&0\\0&T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$　図5. せん断流 $\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_1&S_2\\S_2&-S_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

ェイト−2の（相対）不変量であり，せん断量$|S|$は（絶対）不変量である。Sは複素平面上で-2θだけ回転するから，Sの半分の偏角をもつ量は$-\theta$だけ回転する（ウェイト−1）。すなわち「ベクトル」であって，その方向が意味をもつ。

$$Q_1 = e^{\frac{i}{2}\arg S}, \qquad Q_2 = e^{\frac{i}{2}(\arg S+\pi)} \tag{13}$$

とおけば，Q_1, Q_2はそれぞれ「最大引張り方向」，「最大圧縮方向」を表し，せん断流の「主軸」になっている（図5）。以上のように，回転群の既約表現をつくることは行列としてみれば対称性に関する分解であり，フローとしてみれば（並進を除いた後）回転流，発散流，せん断流への分解にほかならない。

3. フローパラメータによる平面の位置と運動の決定

最小二乗法等によってa, b, A, B, C, Dを推定したとすれば，a, bは既に決定したから，残りは次の問題となる。

[問題] A, B, C, Dを与えて$p, q, \omega_1, \omega_2, \omega_3$を求めよ。ただし

$$A=p\omega_2, \quad B=q\omega_2-\omega_3, \quad C=-p\omega_1+\omega_3, \quad D=-q\omega_1 \tag{14}$$

不変量$T=A+D$, $R=C-B$, $S=(A-D)+i(B+C)$と複素表示$P=p+iq$, $W=\omega_1+i\omega_2$を用いると上の方程式は次と同値である。（$*$は複素共役を表す。）

$$PW^* = 2\omega_3-(R+iT), \qquad PW=iS \tag{15}$$

これは両辺のウェイトが等しくなければならないことから導かれる。両式の左辺同士は絶対値が等しい。ゆえに右辺同士も絶対値が等しく，これからω_3が

$$|2\omega_3-(R+iT)|^2=|iS|^2 \longrightarrow \omega_3=\frac{1}{2}\left(R\pm\sqrt{|S|^2-T^2}\right) \tag{16}$$

と求まる。解はふたつあり，ひとつは真の解ω_3であり，他は「にせの解」$\omega_3-p\omega_1-q\omega_2$である。ここで次のことに注意しよう。

[補題] 発散量の絶対値はせん断量より大きくない：$|T|\le|S|$　(17)

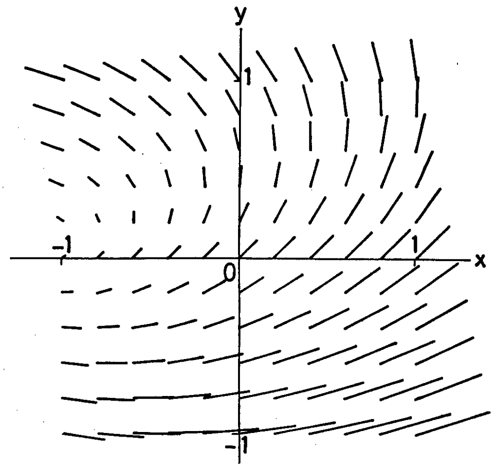


図6．平行射影によるオプティカルフロー。

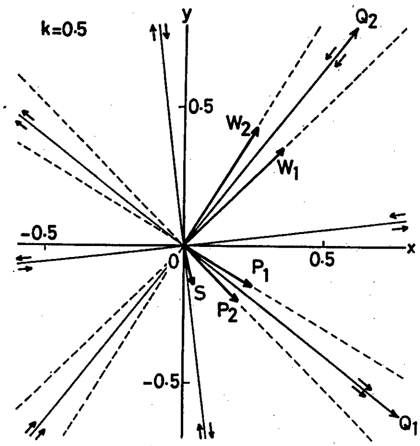


図7．図6のフローの解析結果。

もしこれが満されていなければ，像は平面運動の平行射影による像とはみなせない。さて(15)から気づくことは，もし P, W が解なら kP, W/k も解である。ただし k は任意の0でない実数である。(16)のそれぞれの ω_3 に対して，解は次のように表せる。k は不定の「形状因子」である。

[定理] $W = ke^{i\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arg S-\frac{1}{2}\arg(2\omega_3-(R+iT))\right]}$, $P=\frac{S}{k}e^{i\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arg S+\frac{1}{2}\arg(2\omega_3-(R+iT))\right]}$ (18)

[系] P と W とは最大せん断方向に関して対称である。

[系] 真の P とにせの P とはせん断主軸に関して対称である。また，真の W とにせの W もせん断主軸に関して対称である。

[例] 図6のフローから次のようにパラメータが推定されたとする。

$a=0.1$, $b=0.1$, $A=0.0873$, $B=-0.2269$, $C=0.0873$, $D=0.0524$

不変量は次のようになり，$|T|<|S|$ が満たされている。

$T=0.1397$, $R=0.3142$, $S=0.0349-0.1396i$

(16)より $\omega_3=10.8$ (deg/sec) を得る。それぞれに対して(18)より次の解を得る。

$W_1=(0.7061+0.7081i)k$ (rad/sec), $P_1=(0.1233-0.1484i)/k$

$W_2=(0.5157+0.8568i)k$ (rad/sec), $P_2=(0.1019-0.1016i)/k$

図7に $k=0.5$ の場合を図示する。上記の命題の成立していることがわかる。

4．隣接するフローの境界線の決定

全体が単一の平面部分とはみなせない場合を考える。ある部分でのフローが，

$$u=a+Ax+By,\quad v=b+Cx+Dy \tag{19}$$

であり，他の部分では

$$u=a'+A'x+B'y,\quad v=b'+C'x+D'y \tag{20}$$

であったとする。両者の平面部分が3次元的には隣接しているとすると，境界線（見える必要はない）上ではフローは連続になるはずであり，次式が成立する。

$$[A]x+[B]y+[a]=0,\quad [C]x+[D]y+[b]=0 \tag{21}$$

ただし［ ］は差（例えば$[A]=A'-A$）を表わす。両式とも同一の境界線の方程式を表わしていなければならないが，その必要十分条件は次式である。

［補題］ $[a]:[b]=[A]:[C]=[B]:[D]$ (22)

これが成立している時に限り，フローは隣接しており，境界線の方程式は(21)で与えられる。したがって境界線が画像上で検出されていなくても機械的に算出できる。

各々のフローに前節の解析をほどこすと，もし二つの面が一体となって剛体運動しているとすれば$\omega_1, \omega_2, \omega_3$は共通のはずである。したがって，にせの解を捨てて，真の解のみを選ぶことができる。またWが等しいことから形状因子kの値は同一でなければならない。

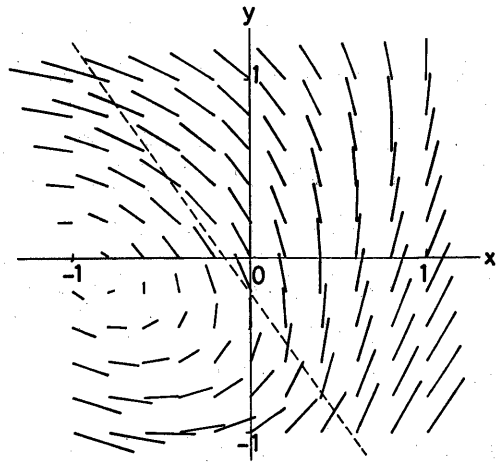


図8．隣接するオプティカルフローの例。

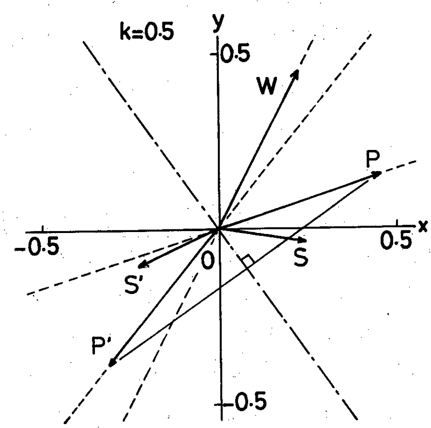


図9．図8のフローの解析結果。

一方，平面$z=px+qy+r$と$z=p'x+q'y+r'$との交線は画像上で$[p]x+[q]y+[r]=0$であるから，次の関係を得る。

［補題］ $[P]$は常に交線に垂直である。交線の方程式が画像上で$y=mx+n$であれば，面の方程式は次の関係にある。

$$z=px+qy+r,\qquad z=p'x+q'y+(r-[q]n) \tag{23}$$

以上の操作を次々と他の隣接する面に及ぼしてゆけば次の結果を得る。

［定理］ 対象の構造と運動は絶対距離と形状因子を除いて一意に定まる。

［例］ 図8は単一のフローとみなせず，右上部，左下部でそれぞれ

$$a=-0.1,\quad b=0.2,\quad A=0.2094,\quad B=-0.1047,\quad C=0.0698,\quad D=-0.0349$$

$$a' = -0.1489, \quad b' = 0.2244$$
$$A' = -0.1396,\ B' = -0.3490,\ C' = 0.2443,\ D' = 0.0873$$

であったとする。(22)は満されている。(21)より，交線の方程式は次式で与えられる。

$$y = -1.4286x - 0.2$$

(16)より右上で $\omega_3 = 10, 0$ (deg/sec), 左下で $\omega_3 = 24, 10$ (deg/sec) となるから，真の解は

$$W = (0.4472 + 0.8944i)k \ (\text{rad/sec}), \quad \omega_3 = 10 \ (\text{deg/sec})$$

$$P = (0.2341 + 0.0780i)/k, \quad P' = (-0.1561 - 0.1951i)/k$$

である(図9)。[P]は交線に垂直である。(23)より，面の方程式はそれぞれ次のようになる。

$$z = (0.2341x + 0.0780y)/k + r$$
$$z = (-0.1561x - 0.1951y)/k + (r - 0.0546/k)$$

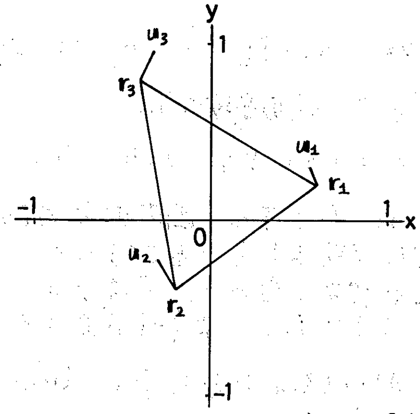


図10．3点で速度が測定された場合。

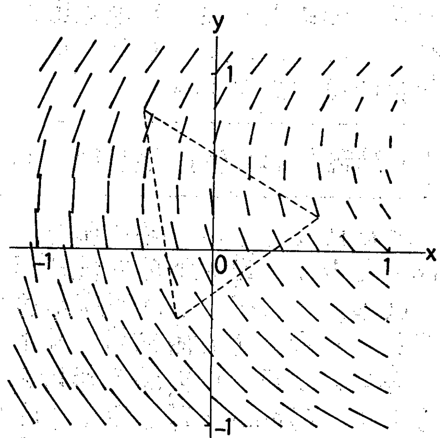


図11．図10の運動の定義するフロー。

6．3点の速度からのフローの決定

画面上の3点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ で速度が $(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)$ と与えられていれば，その3点の張る面のフロー $u = a + Ax + By$, $v = b + Cx + Dy$ が定まる。a, b, A, B, C, D は

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad (24)$$

から定まる。行列式が0となるのは3点が共線のときであるから，同一直線上にない3点で速度が与えられればフローは一意的に定まり，以下，解析ができる。

[例] 画面上の3点 $r_1 = (0.6, 0.2)$, $r_2 = (-0.2, -0.4)$, $r_3 = (-0.4, 0.8)$ でそれぞれ速度

$$u_1 = (-0.0416, 0.1052), \quad u_2 = (-0.0975, 0.1767), \quad u_3 = (0.0770, 0.1593)$$

が観測されたとする(図10)。(24)より，フローのパラメータは次のようになる。

$$a = -0.0486,\ b = 0.1523,\ A = -0.0349,\ B = 0.1396,\ C = -0.0698,\ D = -0.0262$$

図11は仮想的なフローを示したものである。これより次の二通りの解を得る。

$$\omega_3 = -5 \ (\text{deg/sec}),\ W = (0.4477 + 0.8942i)k \ (\text{rad/sec}),\ P = (-0.0390 + 0.0585i)/k$$
$$\omega_3 = -7 \ (\text{deg/sec}),\ W = (0.8319 + 0.5549i)k \ (\text{rad/sec}),\ P = (-0.0629 + 0.0315i)/k$$

面の方程式に (x_i, y_i) を代入することにより，3点の z 座標が次のように定まる。

$$z_1 = \begin{cases} -0.0117/k + r \\ -0.0314/k + r \end{cases}, \quad z_2 = \begin{cases} -0.0156/k + r \\ r \end{cases}, \quad z_3 = \begin{cases} 0.0624/k + r \\ 0.0504/k + r \end{cases}$$