

# 中心射影オプティカルフローの解析

Analysis of Optical Flow under Central Projection

群馬大学工学部情報工学科 金谷 健一

Department of Computer Science, Gunma University Ken-ichi Kanatani

The 3D structure and motion of an object are determined from its optical flow under central projection. The image domain is divided into planar or almost planar regions by checking the flow. For each region, parameters of the flow are determined. Then, the structure and motion are computed from the irreducible parameters deduced from the group representation theory. The solution is not unique, involving a spurious solution. However, the spurious solution disappears if two regions of the object are observed.

## 1. オプティカルフローとフローパラメータ

前報 [1] では平行射影を考えたが、ここでは中心射影を考える。3D復元の方法としては、特定のモデルによくない対応点に基づく方法 [2, 3] とモデルを仮定して、そのモデルの作るフローに基づく方法 [4] がある。ここでは後者をとる。

図1のように空間に固定した座標系を考え、視点(カメラ)の位置を  $(0, 0, -f)$  とし、 $xy$  面上に射影された像を観測しているとする。空間の点  $(X, Y, Z)$  が画面上の点  $(x, y)$  に射影されたとすると、

$$x = \frac{fX}{f+Z}, \quad y = \frac{fY}{f+Z} \quad (1)$$

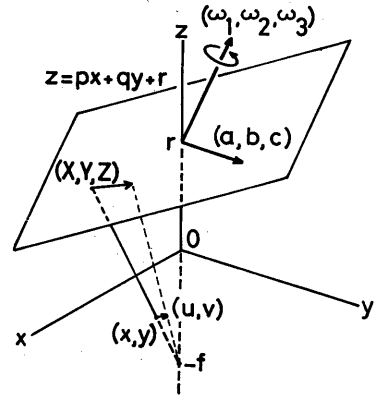


図1. 中心射影とオプティカルフロー

であり、 $f \rightarrow \infty$  の極限が平行射影となる。

空間中に  $z = px + qy + r$  なる平面が剛体運動しているとする。剛体運動は瞬間的にはある基準点での並進速度とその周りの回転速度とで指定される。基準点を平面と  $z$  軸との交点  $(0, 0, r)$  とし、そこでの並進速度を  $(a, b, c)$ 、回転速度を  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  とする  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  軸回りの右ねじ方向の角速度  $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$  rad/Sec の回転)。以上よりパラメータは面の「グラジエント」 $p, q$ 、「絶対距離」 $r$ 、「並進速度」 $a, b, c$ 、「回転速度」 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  の合計9個である。このとき (1) 式によ、 $xy$  面上に引き起こされる「オプティカルフロー」は次のようになることが簡単な計算からわかる。

$$u(x, y) = u_0 + Ax + By + (Ex + Fy)x, \quad v(x, y) = v_0 + Cx + Dy + (Ex + Fy)y, \quad (2)$$

$$u_0 = \frac{fa}{f+r}$$

$$v_0 = \frac{fb}{f+r}$$

$$A = p\omega_2 - \frac{pa+c}{f+r}$$

$$B = q\omega_2 - \omega_3 - \frac{qa}{f+r}$$

(3)

$$C = -p\omega_1 + \omega_3 - \frac{pb}{f+r}$$

$$D = -\delta\omega_1 - \frac{\delta b + c}{f+r}$$

$$E = \frac{1}{f} \left( \omega_2 + \frac{pc}{f+r} \right)$$

$$F = \frac{1}{f} \left( -\omega_1 + \frac{\delta c}{f+r} \right)$$

オプティカルフロー (2) を完全に特徴づける 8 個のパラメータ  $u_0, v_0, A, B, C, D, E, F$  を「フローパラメータ」とよぶことにする。(3)式で  $f \rightarrow \infty$  とすると前報 [1] の平行射影の場合に帰着する。「焦点距離」 $f$  がかなり大きい場合に  $f$  はそのまま  $f^2 \rightarrow \infty$  とすると (3) 式の  $E, F$  が次のようになる。

$$E = \frac{\omega_2}{f^2}$$

$$F = -\frac{\omega_1}{f^2}$$

(4)

これを「疑似平行射影」の近似とよぶことにする。

3D 復元問題を次の手順で解く。(i) 観測したオプティカルフロー  $u(x, y), v(x, y)$  が (2) 式にあてはまるようにフローパラメータ  $u_0, v_0, A, B, C, D, E, F$  を決定する。(ii) 非線形連立方程式 (3) を  $p, \delta, r, a, b, c, \omega_1, \omega_2, \omega_3$  について解く。

## 2. フローパラメータの推定

いろいろ考えられるが、最も単純なのは次の最小二乗法であろう。

$$M = \sum_i \left[ (u_0 + Ax_i + By_i + (Ex_i + Fy_i)x_i - u(x_i, y_i))^2 \right.$$

$$\left. + (v_0 + Cx_i + Dy_i + (Ex_i + Fy_i)y_i - v(x_i, y_i))^2 \right] \rightarrow \min.$$

(5)

ただし  $\sum$  は速度が与えられている特徴点に関する総和を表す。これかす得られる「正規方程式」を解けばフローパラメータが求まるが、それを再び (5) 式に代入して得られる「残差」は次のようになる。(  $u_i = u(x_i, y_i), v_i = v(x_i, y_i)$  とおく。)

$$M = \sum_i (u_i)^2 - (u_0 \sum_i u_i + A \sum_i x_i u_i + B \sum_i y_i u_i + E \sum_i (x_i)^2 u_i + F \sum_i x_i y_i u_i)$$

$$+ \sum_i (v_i)^2 - (v_0 \sum_i v_i + C \sum_i x_i v_i + D \sum_i y_i v_i + E \sum_i x_i y_i v_i + F \sum_i (y_i)^2 v_i)$$

(6)

測定誤差がなければ  $M=0$  になるはずである。これかす次のことが考えられる。まず近接した数個の特徴点かす (5) により推定を行なう。もし (6) 式の残差が十分小さくなければその領域は平面の縁とはみなせな。もし残差が小さければ、周囲の点を追加して改めて推定をやり直し、残差を計算する。こうして残差が小さい限り領域の拡張を行なう。そうすれば対象が平面でない場合 (多面体や滑らかな曲面) でも平面部分、あるいは平面とみなせる小領域に分割できるであろう。(各小領域の境界をは、きりきめる必要はない。第 6 章参照。) 推定が可能となる最小の特徴点は 4 点である (第 7 章参照)。以上より、対象が平面の場合を考慮すれば、任意の形状について解釈を行なうことができる。

## 3. 複素表示と不変量

観測している画面は  $xy$  面であらう、その原点をカメラの光軸が通、ているが、原点の回りにどのように回転した  $x'y'$  軸をと、ても解釈は本質的に同一でなければならぬ (解釈の「不変性」)。いま  $x'y'$  軸を正の向きに  $\theta$  だけ回転した新しい  $x''y''$  軸をと、たとする (図 2)。新旧座標の関係は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ i.e. } r' = Rr \quad (7)$$

すなわち  $x, y$  は「ベクトル変換則」に従う。同様に  $p, q$  も  $w_1, w_2$  もベクトル変換則に従う。

$$\begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

(したが、 $z$ , 複素表示では次のようになる。

$$z = x + iy \rightarrow z' = e^{i\theta} z$$

$$p = p + iq \rightarrow p' = e^{i\theta} p$$

$$v = a + ib \rightarrow v' = e^{i\theta} v, \quad W = w_1 + iw_2 \rightarrow W' = e^{i\theta} W \quad (9)$$

一方、(2)式の  $u, v$  もベクトル変換則に従うから、オプティカルフローの受ける変換は次のようになることがわかる。

$$\begin{cases} u = u_0 + Ax + By + (Ex + Fy)x \\ v = v_0 + Cx + Dy + (Ex + Fy)y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u' = u_0' + A'x' + B'y' + (E'x' + F'y')x' \\ v' = v_0' + C'x' + D'y' + (E'x' + F'y')y' \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} u_0' \\ v_0' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} R^T, \begin{bmatrix} E' \\ F' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \quad (11)$$

すなわち  $u_0, v_0$  と  $E, F$  はベクトル変換則,  $A, B, C, D$  は「テンソル変換則」に従う。前報 [1] に示した Weyl の原理により、テンソルの対称性に基づいて、2次元回転群の「既約表現」への簡約ができる。結果は次のようになる。

$$U_0 = u_0 + iv_0 \rightarrow U_0' = e^{i\theta} U_0, \quad K = E + iF \rightarrow K' = e^{i\theta} K,$$

$$T = A + D \rightarrow T' = T, \quad R = C - B \rightarrow R' = R \quad (12)$$

$$S = (A - D) + i(B + C) \rightarrow S' = e^{2i\theta} S$$

すなわち、 $U_0$  と  $K$  はウエイト  $-1$  の (相対) 不変量,  $T$  と  $R$  はウエイト  $0$  の (絶

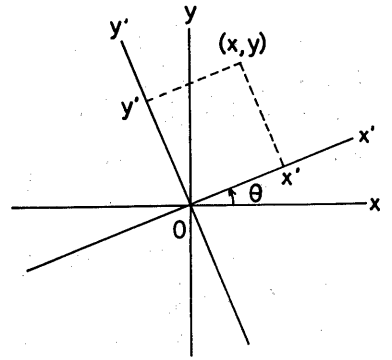


図2. 座標軸の回転。

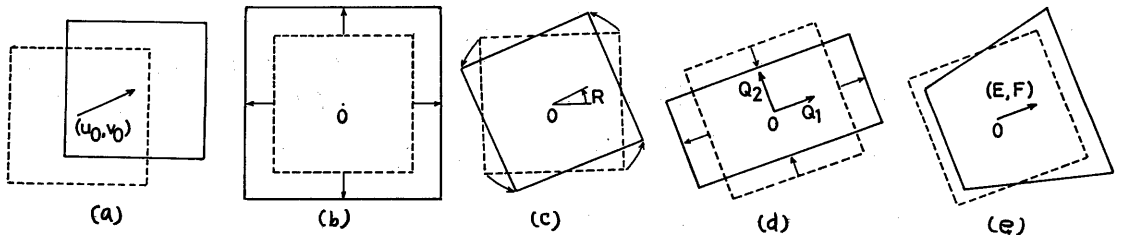


図3. フローパラメータから導かれた不変量の各々の物理的意味。

対)不変量,  $S$ はウェイト-2の(相対)不変量である。前報[1]でも示したが, それぞれの物理的意味は図3のようになり,  $U_0$ が「並進」,  $T$ が「発散」,  $R$ が「回転」,  $S$ が「せん断」,  $K$ が「扇状変形」を表す。

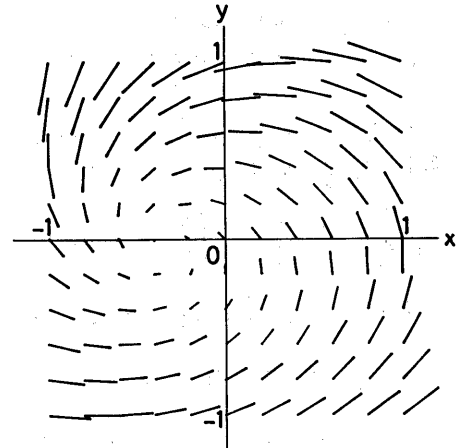


図4. オプティカルフローの例,  $f=2$

#### 4. 疑似平行射影の場合の解

前節の不変量を用いれば, 連立方程式(3)は次のように書き直すことができる。

$$V' = U_0$$

$$PW'^* = (2\omega_3 - R) - i(2c' + T) \quad (13)$$

$$PW' = iS$$

$$c'P - iW' = fK - \frac{1}{f}U_0$$

ただし\*は複素共役を示し,  $V', c', W'$ は次のようにおいた。

$$V' = \frac{V}{1+r/f}, \quad c' = \frac{c}{f(1+r/f)}, \quad W' = W - \frac{1}{f}U_0 \quad (14)$$

したが, (13)式を  $V', c', P, W', \omega_3$  について解くことができれば,  $V = a + ib$ ,  $c = \omega_1 + i\omega_2$  は次式で与えられる。

$$V = (1+r/f)V', \quad c = f(1+r/f)c', \quad W = W' + \frac{1}{f}U_0 \quad (15)$$

まず疑似平行射影の近似(4)を用いると, (13)式の最後は  $W = ifK$  となるので, 次の解を得る。ただし,  $\text{Re}[\cdot], \text{Im}[\cdot]$  はそれぞれ実部, 虚部を表す。

定理1. 疑似平行射影近似を用いれば解は次のように与えられる。

$$V' = U_0, \quad W = ifK, \quad P = \frac{S}{fK - U_0/f} \quad (16)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(R + \text{Re}[PW'^*]), \quad c' = -\frac{1}{2}(T + \text{Im}[PW'^*])$$

したが,  $r$ , 絶対距離  $r$  は不定であるが,  $p, \delta, a/(1+r/f), b/(1+r/f), c/(1+r/f), \omega_1, \omega_2, \omega_3$  は一意的に定まる。

[例1] 図4のフローのフローパラメータは  $U_0 = -0.04, U_0 = 0.04, A = -0.0678, B = -0.1960, C = 0.1424, D = -0.0785, E = 0.0586, F = -0.0536$  である。  $f=2$  とし(16)式を用いると次の解を得る。(  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  は deg/sec. )

$$\frac{a}{1+r/2} = -0.04, \quad \frac{b}{1+r/2} = 0.04, \quad \frac{c}{1+r/2} = 0.20$$

$$P = 0.237, \quad \delta = -0.171, \quad \omega_1 = 6.14, \quad \omega_2 = 6.71, \quad \omega_3 = 9.88$$

## 5. 中心射影の場合の解

まず (13) 式で  $c' = 0$  かどうかを調べる。 $c' = 0$  なら  $W' = i(fK - U_0/f)$ ,  $P = S/(fK - U_0/f)$  だから, これが  $PW^* = (2\omega_3 - R) - iT$  を (一定の誤差内で) 満たすかどうか調べればよい。満たせば  $\omega_3 = (R + \operatorname{Re}[PW^*])/2$  である。そこで以下  $c' \neq 0$  とする。  
(13) 式の第 3 式は  $(c'P)(-iW') = c'S$  と書けるから,  $c'P$  と  $-iW'$  は 2 次方程式

$$X^2 - LX + c'S = 0 \quad L \equiv fK - \frac{1}{f}U_0 \quad (17)$$

の 2 根である。ゆえに  $P$  と  $W'$  とが  $c'$  の関数として次のように定まる。

$$P(c') = \frac{1}{2c'}(L \pm \sqrt{L^2 - 4c'S}), \quad W'(c') = \frac{1}{2}(L \mp \sqrt{L^2 - 4c'S}) \quad (18)$$

(13) 式の第 2 式は次式と同値である。

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(R + \operatorname{Re}[P(c')W'(c')^*]), \quad c' = -\frac{1}{2}(T + \operatorname{Im}[P(c')W'(c')^*]) \quad (19)$$

(18) 式を後者に代入することによ,  $c'$  が唯一に定まる。(証明は付録参照。)一意性が保証されているから, 実際には適当な初期値, たとえば疑似平行射影近似の解を用いて, 左辺を右辺に代入する等の反復解法を行えばよい。この  $c'$  を用いて (18) 式と (19) 式第 1 式より  $P, W', \omega_3$  が (18) 式の複号に応じて 2 組 (真の解と「にせの解」) が定まる。(解の 2 個性は知られている [4])。一応, (13) 式より

$$(2\omega_3 - R)^2 + (2c' + T)^2 = SS^* \quad (20)$$

であるから, 次のような上下界が存在する。

$$\frac{1}{2}(R - |S|) \leq \omega_3 \leq \frac{1}{2}(R + |S|), \quad -\frac{1}{2}(|S| + T) \leq c' \leq \frac{1}{2}(|S| + T) \quad (21)$$

真の解もにせの解も (20) 式を満たすから, 真の  $\omega_3$  とにせの  $\omega_3$  の和は  $R$  である。

定理 2. 中心射影の場合, 絶対距離  $r$  は不定であるが, 並進速度に関しては  $a/(1+r/f)$ ,  $b/(1+r/f)$ ,  $c/(1+r/f)$  は一意的に定まる。グロジエント  $p, \delta$  と回転速度  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  は 2 通りに定まる。真の  $\omega_3$  とにせの  $\omega_3$  の和は  $R$  である。また (21) 式の上下界が成立する。

[例 2] 再び図 4 を考えると次の解を得る。 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3$  は rad/sec.)

$$\frac{a}{1+r/2} = -0.04, \quad \frac{b}{1+r/2} = 0.04, \quad \frac{c}{1+r/2} = 0.20$$

$$P = \begin{cases} 0.300 \\ 1.073 \end{cases}, \quad \delta = \begin{cases} -0.200 \\ -1.073 \end{cases}, \quad \omega_1 = \begin{cases} 5.00 \\ 0.00 \end{cases}, \quad \omega_2 = \begin{cases} 5.00 \\ 0.57 \end{cases}, \quad \omega_3 = \begin{cases} 10.00 \\ 9.39 \end{cases}$$

## 6. 隣接するオプティカルフローの境界

ふたつの平面領域でオプティカルフローが観測されたとする。フローを表す (2) 式は不変量を用いれば次のように表せる。(  $U = u + i v$ ,  $Z = x + i y$  とおく。)

$$U = U_0 + \frac{1}{2}((T + iR)Z + S Z^* + K Z Z^* + K^* Z^2) \quad (22)$$

もしふたつの領域が隣接していれば, その境界線上で  $U$  は連続でなければならない。連続の条件は次のように表せる。

$$2[U_0] + [T+iR]z + [S]z^*$$

$$+ [K]zz^* + [K]^*z^2 = 0 \quad (23)$$

ただし [ ] はふたつの領域の対応する量の差を表す。境界線上の任意の点で上式が成立するから、上式は境界線の方程式を表しているはずである。まず  $[K] \neq 0$  とする。上式は次のようになる。

$$([K]z + [S])z^*$$

$$+ ([K]^*z^2 + [T+iR]z + 2[U_0]) = 0 \quad (24)$$

ゆえに  $z$  の 2 次式  $[K]^*z^2 + [T+iR]z + 2[U_0]$  は 1 次式  $[K]z + [S]$  で割り切れなければならない。その条件は剰余定理により、

$$[K]^*[S]^2 - [T+iR][S][K] + 2[U_0][K]^2 = 0 \quad (25)$$

である。これが成立しているとき (24) 式は次のように因数分割される。

$$([K]z + [S])(z^* + \frac{[K]^*}{[K]}z + \frac{2[U_0]}{[S]}) = 0 \quad (26)$$

$[K]z + [S] = 0$  は一点を表すから、求める境界線の方程式は 1 次式となる。

$$[K]^*z + [K]z^* + \frac{2[U_0][K]}{[S]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [E]x + [F]y + \frac{[U_0][K]}{[S]} = 0 \quad (27)$$

これが実直線を表す条件は  $[U_0][K]/[S]$  が実数、すなわち次のようになる。

$$\text{Im}([U_0][K][S]^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{ang}([U_0]) + \text{ang}([K]) = \text{ang}([S]) \pmod{\pi} \quad (28)$$

一方、 $[K] = 0$  のときは (23) 式は結局、前報 [1] の場合と同じく

$$[T+S+iR]x + [-R+iT-iS]y + 2[U_0] = 0 \quad (29)$$

となり、これが実直線を表す条件は次のようになる (前報 [1] 参照)

$$[A]:[C] = [B]:[D] = [U_0]:[U_0] \quad (30)$$

定理 3. 2 領域が接続している条件は次のようになる。

$$[K] \neq 0: \quad [K]^*[S] + [T+iR][S][K] + 2[U_0][K]^2 = 0 \quad (25)$$

$$\text{Im}([U_0][K][S]^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{ang}([U_0]) + \text{ang}([K]) = \text{ang}([S]) \pmod{\pi} \quad (28)$$

$$[K] = 0: \quad [A]:[C] = [B]:[D] = [U_0]:[U_0] \quad (30)$$

このとき、境界線の方程式は次のようになる。

$$[K] \neq 0: \quad [E]x + [F]y + \frac{[U_0][K]}{[S]} = 0 \quad (27)$$

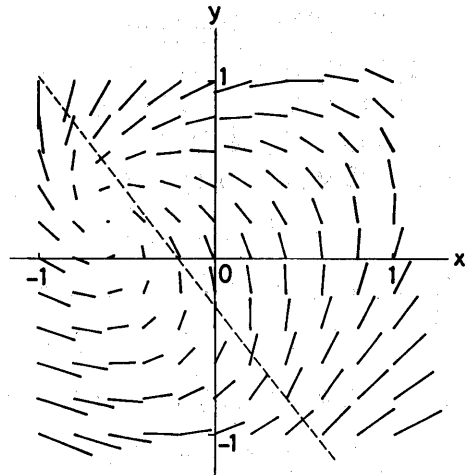


図 5. 隣接するオプティカルフロー

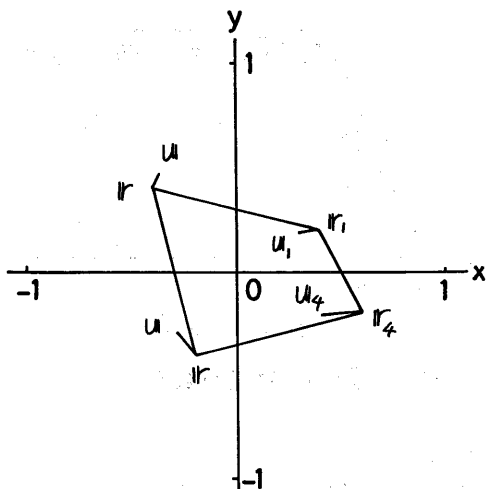


図6. 4点で速度が測定された場合。

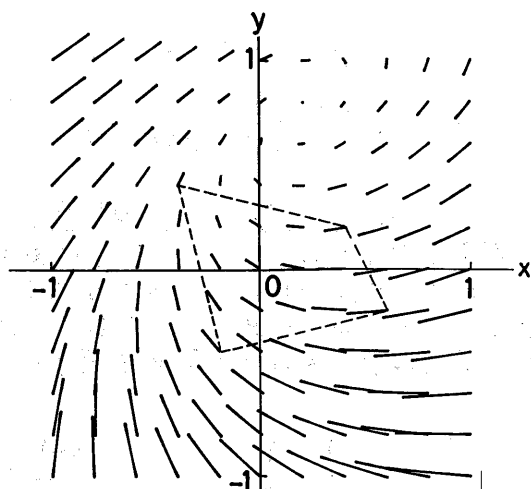


図7. 図6の運動の定義するフロー

$$[K]=0: [T+\beta+iR]x + [-R+iT-i\beta]y + 2[U_0] = 0 \quad (29)$$

2領域が隣接しているとき、それぞれの領域で前節の解析をほどこすと、各々2組ずつ解が求まるが、両方が同一の剛体運動をしていれば、 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は共通でなければならぬから、真の解のみを選び出すことができる。

さて、空間中の面  $z = px + qy + r$  と  $z = p'x + q'y + r'$  との交線の像は

$$(p'-p + \frac{p'r - pr'}{f})x + (q'-q + \frac{q'r - qr'}{f})y + (r'-r) = 0 \quad (31)$$

である。これから次の結果を得る。

補題.  $z = px + qy + r$  と  $z = p'x + q'y + r'$  との交線の像が  $kx + my + n = 0$  なら、

$$r' = \frac{r(fk + p'n) + fn(p-r)}{fk + nq} = \frac{r(fm + q'n) + fn(q-r)}{fm + nq} \quad (32)$$

ゆえに隣接する2面でグラジエント  $p, q, p', q'$  が求まれば、一方の絶対距離  $r$  を用いて他方の絶対距離  $r'$  を表すことができる。これを隣接する面に次々と及ぼしてゆけば、不定量は単一の  $r$  のみとなる。

定理4. ふたつ以上の面のオプティカルフローを観測すれば、絶対距離を除いて、物体の形状と運動はただ一通りに定まる。

【例3】 図5を考える。  $f=2$  とする。フローパラメータを右上部と左下部で求めると(25)(28)式が成立しているのがわかる。(27)式より、境界線の方程式は

$$y = -1.301x + 0.274$$

となる。(図5の破線を示す。) それぞれの領域で  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  が2組ずつ求まるが、共通するほうを選ぶことにより、回転速度と面の方程式は次のようになる。

$$\omega_1 = 10.0, \quad \omega_2 = 10.0, \quad \omega_3 = 10.0 \quad (\text{deg/sec})$$

$$z = \begin{cases} 0.5x + 0.2y + r & (\text{右上}) \\ -0.3x - 0.4y + (0.92r - 0.16) & (\text{左下}) \end{cases}$$

### 7. 4点の速度からのフロ-の決定

画面上の4点 $(x_i, y_i)$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ で速度がそれぞれ $(u_i, v_i)$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ と与えられている場合は(2)式をあてはめると, フロ-パラメータが次の連立-方程式を解りて得られる。

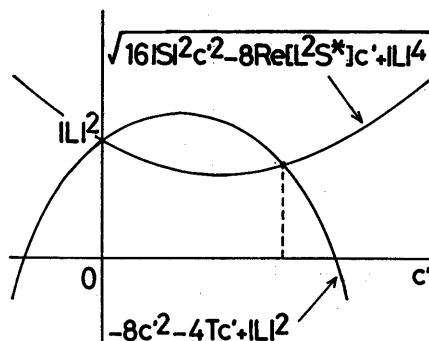


図8. 解の一意的証明.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & (x_1)^2 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & (x_2)^2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & (x_3)^2 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & (x_4)^2 & x_4 y_4 \\ & 1 & & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & (y_1)^2 \\ & 1 & & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & (y_2)^2 \\ & 1 & & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & (y_3)^2 \\ & 1 & & x_4 & y_4 & x_4 y_4 & (y_4)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (33)$$

この係数行列の行列式は次の通りであるから, どの3点も同一直線上になければフロ-が一意的に定まる。以下, 解析は同様である。

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \quad (34)$$

【例4】図6のように4点で速度が与えられたとき, (33)式より定まるフロ-は図7のようになる。これから解が2組求まる。面の方程式  $z = px + qy + r$  に点の  $x, y$  座標を代入することにより, 各点の  $z$  座標は次のようになる。

$$z_1 = r + \begin{cases} 0.625 \\ -0.139 \end{cases}, \quad z_2 = r + \begin{cases} -0.236 \\ 0.320 \end{cases}, \quad z_3 = r + \begin{cases} -0.508 \\ -0.021 \end{cases}, \quad z_4 = r + \begin{cases} 0.614 \\ -0.360 \end{cases}$$

### 付録. $c'$ の一意的証明

(17)式の2根を  $X_1, X_2$  とするとき,  $P = X_1/c', W' = iX_2$  とすれば  $\text{Im}[PW'^*] = -\text{Re}[X_1 X_2^*]/c'$  であり,  $P = X_2/c', W' = iX_1$  とすれば  $\text{Im}[PW'^*] = -\text{Re}[X_1^* X_2]/c'$  であるから, どちらを選んでも  $\text{Im}[PW'^*]$  は同一である。代入して計算すると(19)第2式は結局, 次の形となる。

$$-8c'^2 - 4Tc' + |L|^2 = \sqrt{16|S|^2 c'^2 - 8\text{Re}[L^2 S^*]c' + |L|^4} \quad (35)$$

両辺のグラフは共に下に凸( $S=0$ なら右辺は直線)であり, 図8のように必ず点 $(0, |L|^2)$ を通る。ゆえに  $c' \neq 0$  なる解はただひとつしか存在しない。(証明終り)

1. 金谷健一, 平行射影のオプティカルフロ-の解析, 情報処理学会コンピュータビジョン研究会資料 35-4 (1985.3.12).
2. H. C. Longuet-Higgins, *Nature*, 239-10 (1981), 133 - 135.
3. R. Y. Tsai and T. S. Huang, *IEEE Trans. PAMI*, 6-1 (1984), 13 - 27.
4. H. C. Longuet-Higgins, *Proc. R. Soc. Lond.* B-223 (1984), 165 - 175.