

## 透視角度変換による画像上に散在する3線分の配置復元

3-D CONFIGURATION RECOVERY OF 3 LINE SEGMENTS ON THE IMAGE BY PERSPECTIVE ANGLE TRANSFORM

尺長 健                      金子 博  
Takeshi SHAKUNAGA        Hiroshi KANEKO

(NTT 電気通信研究所)  
ELECTRICAL COMMUNICATION LABORATORIES, NTT

This paper discusses a relation (perspective angle transform) between the apparent and real angles under perspective projection using Perspective Moving Frame. The general form of perspective angle transform is extracted from its basic form, proposed in the previous paper. This corresponds to a generalization of the discussion on the skewed symmetry by T.Kanade. The gradient of the plane including the real angle is constrained on curves (PAT curves) of the fourth degree in the image plane supplied by the transform. This transform is applied to the recovery of 3-D configuration recovery of 3 line segments on the image. Geometric and algebraic solutions are derived using perspective moving frame and PAT curves at a virtual crossing point of 3 lines in space. Moreover the characteristics of PAT curves are summarized briefly.

### 1.はじめに

画像からもとの3次元空間を復元する場合、画像が生成される過程で中心投影法により生じる種々の歪を正しく取り扱うことが必要となる。中でも、角度に関する情報の取り扱いが重要であり、これを正確かつ容易に取り扱うための枠組の確立が望まれている。我々[1]は、この観点から、透視動座標系(以後、第一透視動座標系と呼ぶ)を用いて、角度の見え方に関する基本方程式(以後、透視角度変換の基本形と呼ぶ)を導き出し、三線接続点の見え方からその3次元配置を復元する問題を取り扱った。本論文では、これを発展させ、新たに、透視角度変換の一般形を示すとともに、接続点が存在しない三線分について3次元配置の復元方法を論じる。

計算機による画像理解において角度情報の利用は非常に重要である(Kanade[2], Barnard[3], 尺長・金子[4]など)。この中で、本論文は、Kanade[2]およびBarnard[3]の議論と関係が深い。

透視角度変換の一般形は、2つの意味でKanade[2]のSkewed Symmetryの議論の一般化である。まず、Kanade[2]が直交2軸の見え方から2軸を含む平面の法線ベクトルに加わる拘束を求めているのに対し、透視角度変換

では一般の斜交2軸に対して同様の拘束を求める。また、前者が平行投影を対象とした議論であるのに対し、後者は中心投影を対象とする。なお、透視角度変換の一般形は、新たに定義する第二透視動座標系で取り扱われる。

Barnard[3]は、画像上の任意の3線分に対し、それらが3次元空間でベクトルとして互いに直交することを仮定した上で、三線分のGradientを求める問題を提起し、この解法として、3次元パラメータ空間上での数値解法を提案している。しかし、この解法では、山登り探索により力づくで解を求めるため、計算量が大きく、また理論的解析が不十分であるなどの問題点がある。本論文では、Barnardの扱った問題を一般化したうえで、透視角度変換の適用例として、これを代数的に解く方法を示す。

本論文の構成は以下の通りである。まず、第2章で前論文の議論を簡単に紹介する。即ち、透視動座標系を定義し、角度の基本方程式(透視角度変換の基本形)を示す。次に、第3章では、基本形から透視角度変換の一般形を導出し、これが示す曲線(PAT曲線と呼ぶ)の持つ性質を簡単に述べる。さらに、Skewed Symmetryの議論との関係についても述べる。第4章では、仮想交点で第二透視動座標系を考えることにより、透視角度変換の一般形を適用し、Barnardの問題に対する代数的解法を導く。

## 2. 第一透視動座標系と透視角度変換の基本形

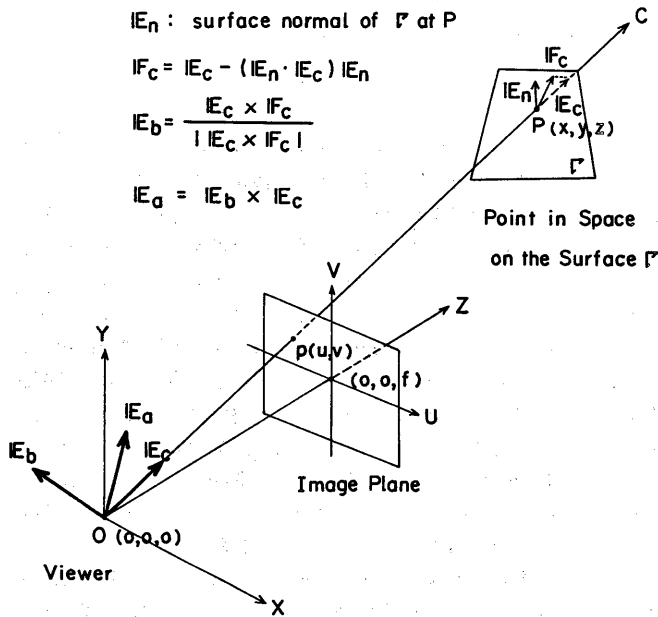
### 2.1 中心投影法と第一透視動座標系

本論文では、3次元空間を、図1の直交座標系(左手系)  $X-Y-Z$  で示す。ここで、視点は  $X-Y-Z$  座標系の原点  $O(0,0,0)$  にあるとし、視軸を  $Z$  軸と一致させる。また、対象世界は  $Z$  軸の正方向に広がっているとす。さらに、 $f$  でレンズの焦点距離を表わし、3次元世界は視点を通して、 $Z=f$  の画像平面上に投影されるものとする。

画像平面上の座標系を  $U-V$  で示し、その原点を画像平面と  $Z$  軸との交点とする。また、 $U$  軸・ $V$  軸はそれぞれ、 $X$  軸・ $Y$  軸に平行とする。

このとき、中心投影法のもとでは、3次元空間内の点  $P(x,y,z)$  とその画像平面への写像  $p(u,v)$  との間には次式が成立する。

$$(u,v) = (f \cdot x/z, f \cdot y/z)$$



$X-Y-Z$  : Conventional Viewer Centered Coordinate System

$A-B-C$  : First Perspective Moving Coordinate System

Fig.1 Perspective Transform and First Perspective Moving Coordinate System

ここで、図1で示すように、3次元空間に物体が存在し、点  $P(x,y,z)$  が物体上の点であるとする。点  $P$  における物体の接平面を  $\Gamma$  で表わし、こちら向きの(単位)法線ベクトルを  $E_n$  で表わす。このとき、点  $P(x,y,z)$  に対し、直交座標系  $A-B-C$  を、以下に定義する単位ベクトル  $E_a, E_b, E_c$  を用いて定める。

まず、 $E_c$  を  $X-Y-Z$  座標系の原点  $O$  と点  $P$  を結ぶ直線(視線)上の単位ベクトルとする。次に、 $E_c$  を接平面  $\Gamma$  に正射影することによりベクトル  $F_c$  を作成し、 $E_c$  と  $F_c$  により張られる平面の単位法線ベクトルとして、 $E_b$  を定義する。なお、ベクトル積は左手系で定義されるものとする。

$$E_b = E_c \times F_c / |E_c \times F_c|$$

$$F_c = E_c - (E_n \cdot E_c) E_n$$

最後に、 $E_a$  を  $A-B-C$  軸が左手系を形成するように定めることにより、第一透視動座標系 (First Perspective Moving Coordinate System) が定義される。

以下では、 $X-Y-Z$  座標系と  $A-B-C$  座標系を区別するため、 $X-Y-Z$  座標系での成分表示を  $\langle \dots \rangle$  で、 $A-B-C$  座標系(第一透視動座標系)での成分表示を  $\langle \dots \rangle$  でそれぞれ表わす。

### 2.2 角度の基本方程式(透視角度変換の基本形) (Basic Form of Perspective Angle Transform)

第一透視動座標系を用いることにより、接平面  $\Gamma$  上で点  $P$  を頂点とする角度の見え方が非常に簡単な方程式で表わせる。いま、 $F_c$  と  $E_c$  のなす角度を  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ) とする。ここで、平面  $\Gamma$  上に点  $P$  を通り、 $F_c$  と反時計回りに角度  $\alpha_i$  をなす(向きのある)直線  $L_i$  を考える ( $i=1, 2$ )。いま、 $L_i$  方向の単位ベクトルを  $E_i$ 、 $L_i$  の点  $\langle 0, 0, f \rangle$  を通る  $A-B$  平面(仮想画像面と呼ぶ)への正射影を  $l_i$  とする。また、 $l_i$  が  $A$  軸から反時計回りで角度  $\beta_i$  に位置するとする(図2)。このとき、 $\alpha_i, \beta_i, \phi$  の間には次の関係式が成立する。

$$\tan \beta_i = \tan \alpha_i / \sin \phi \quad (1)$$

前論文[1]では、式(1)を角度の基本方程式と呼び、角度の見え方に関する幾つかの性質を示した。今後これを透視角度変換の基本形 (basic form of

perspective angle transform)と呼ぶことにする。ここで、 $E_n$ および $E_i$ は次式で表わされる。なお、法線ベクトル $E_n$ はこちら向き( $E_n \cdot E_c < 0$ )にとどとする。

$$E_n = \langle \cos \psi, 0, -\sin \psi \rangle \quad (2)$$

$$E_i = \langle \cos \alpha_i \cdot \sin \psi, \sin \alpha_i, \cos \alpha_i \cdot \cos \psi \rangle$$

このとき、2直線のなす実際の角度を $\Delta \alpha (= \alpha_1 - \alpha_2)$ とすると三角関数の和の公式より、次式が成立する。

$$\Delta \alpha = \tan^{-1} \frac{\sin \psi \cdot (\tan \beta_1 - \tan \beta_2)}{1 + \sin^2 \psi \cdot \tan \beta_1 \cdot \tan \beta_2} \quad (3)$$

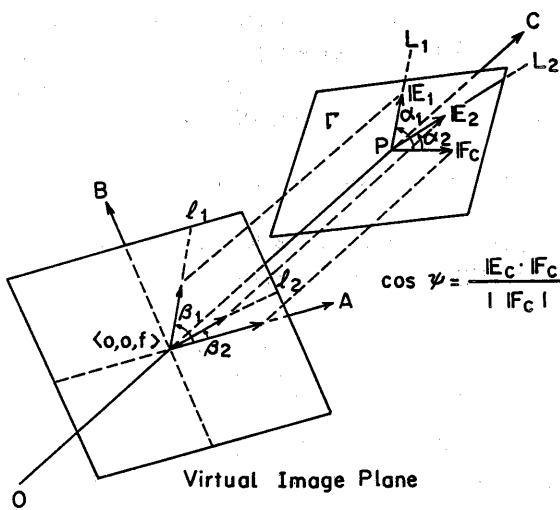


Fig.2 Definitions of  $\alpha_i, \beta_i, \psi$  and Virtual Image Plane

### 3. 透視角度変換の一般形とPAT曲線

#### 3.1 透視角度変換の基本形と一般形

透視角度変換の基本形は非常に単純な式であり、現象を原理的に説明しているという長所をもつ反面、第一透視動座標系が既知であるという前提条件を満足しなければ使用できないという実用上の問題点を持つ。我々[1]では、平面 $\Gamma$ の法線ベクトルの像が既知のとき、第一透視動座標系が2義的に定まり、基本形を使用できることを示した。しかし、より広い範囲への透視角度変換の適用を考えると、この条件は厳しすぎる。そこで、本章では、この条件を取り除いた形(一般形と呼ぶ)を導出し、

透視角度変換の適用範囲拡大を計る。即ち、ここでは既知の角度 $\Delta \alpha$ が $\Delta \beta$ として観測されるときに法線ベクトルに加わる拘束を求める。

ところで、 $\Delta \alpha = \pi/2$ の場合については、平行投影のもとで、従来、これに相当する議論が行われている。Kanade[2]のSkewed Symmetryの議論がこれに当たる。即ち、Kanade[2]は折り紙ワールドの定量的解析のため、平行投影条件のもとで、平面上の軸対称性の見え方からその平面のGradientに加わる拘束を求めている。これは、直接的には対称性を取り扱っているものの、本質的には、平面上の直交する2軸の見え方を取り扱っているものとして解釈できる。この議論では、Gradient空間が用いられ、双曲線の上に平面のGradientが拘束されるという結果が得られている。

ここでは、必ずしも直交2軸に話を限定せず、透視角度変換の基本形から出発して、斜交2軸の見え方から2軸を含む平面の法線のGradientに加わる拘束を導き出す。ここで、この変換によって得られる曲線をPAT曲線(Curve for Perspective Angle Transform)と呼ぶことにする。このため、基本形に三角関数の和の公式を適用して得られる見かけの角度と実際の角度の関係式(式(3))から出発して、一般形を導き出す。

#### 3.2 透視角度変換一般形の導出

(General Form of Perspective Angle Transform)

図2において、A軸( $E_a$ )が未知である場合について考察する。いま、点Pに対する第一透視動座標系のA軸、B軸が未定義の場合にも、 $C = f$ の位置に仮想画像面を考えることができる。いま、 $L_i$ の仮想画像面上での像を $l_i$ とし、A軸を未知、 $L_i$ および $l_i$ を固定とする。即ち、式(3)において、 $\Delta \alpha$ および $\Delta \beta = (\beta_1 - \beta_2)$ を一定、 $\beta_2$ を変数として扱う。これを $\sin \psi$ に関して整理すると、次式を得る。

$$\sin^2 \psi = \frac{(\tan \beta_1 - \tan \beta_2) \sin \psi}{\tan \beta_1 \tan \beta_2 \tan \Delta \alpha} - \frac{1}{\tan \beta_1 \tan \beta_2} \quad (4)$$

ここで、 $\Gamma$ の法線ベクトル $E_n$ のうち、こちら向き、即ち $E_n \cdot E_c < 0$ を満たすものは式(2)で表わされる。今、仮想画像面上で $E_n$ の無限遠点 $p_\infty n$ を $\langle a, b \rangle$ と置くと、

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &= \langle f E_n \cdot E_a / E_n \cdot E_c, f E_n \cdot E_b / E_n \cdot E_c \rangle \\ &= \langle -f \cot \psi, 0 \rangle \end{aligned}$$

である。また、定義より、 $\psi$ は $0 \leq \psi \leq \pi/2$ で定義さ

れる[1]から、 $\sin\psi$ は次式で表わせる。

$$\sin\psi = f/\sqrt{(a^2 + f^2)} \quad (5)$$

式(5)を式(4)に代入して分母を払って整理することにより、次式を得る。

$$\begin{aligned} \tan\Delta\alpha (\cos\beta_2 (\cos\beta_2 - \tan\Delta\beta \sin\beta_2) a^2 + f^2) \\ = f\sqrt{(a^2 + f^2)} \tan\Delta\beta \end{aligned}$$

ここで、 $\beta_2$ は第一透視動座標系で定義されている。即ち、A軸から $l_2$ までの反時計回りの角度を示す。本節の目的は、A軸のパラメータ化であり、この目的のため、 $l_1$ と $l_2$ のなす角の二等分線を始線(S軸と呼ぶ)とし、S軸からA軸に反時計回りに角度を計測するものとし、これを $\theta$ で表わす(図3)。即ち、 $\theta$ と $\beta_2$ は次式で関係付けられる。

$$\beta_2 = 2\pi - \theta - \Delta\beta/2$$

この座標変換を行うことにより、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \tan\Delta\alpha ((1 + \cos 2\theta / \cos\Delta\beta) a^2 / 2 + f^2) \\ = f\sqrt{(a^2 + f^2)} \tan\Delta\beta \quad (6) \end{aligned}$$

式(6)は、 $\Delta\alpha$ とその補角を同時に考えたとき、 $a$ に関する四次式(複二次式)が得られることを示す。

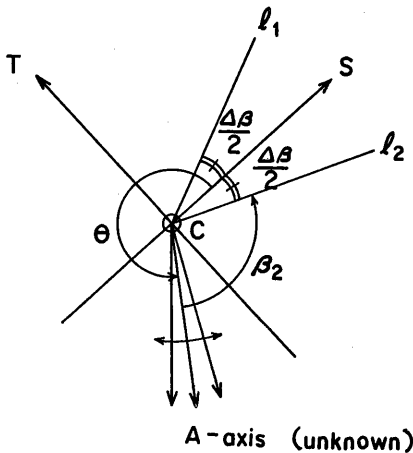


Fig.3 Second Perspective Moving Coordinate System

$$\begin{aligned} \tan^2\Delta\alpha ((1 + \cos 2\theta / \cos\Delta\beta) a^2 / 2 + f^2)^2 \\ = f^2 (a^2 + f^2) \tan^2\Delta\beta \quad (7) \end{aligned}$$

また、 $\Delta\alpha = \pi/2$ のとき、式(6)は次のように簡略化できる。

$$(1 + \cos 2\theta / \cos\Delta\beta) a^2 / 2 + f^2 = 0 \quad (8)$$

これらは $a$ と $\theta$ の関係を示す式である。式(6)は $a$ に関する四次式(7)の一つの分岐であり、 $\theta$ の値により $a$ は0~4個の実根を持つ。一方、式(8)は $a$ に関する二次式であり、 $\theta$ の値により、 $a$ は0~2個の実根を持つ。

ここで、S軸およびC軸を含む左手直交座標系S-T-Cを考える(図3)。これは、仮想画像面上の直線 $l_1$ および $l_2$ のみから決定される座標系である。これを $(l_1$ と $l_2$ に関する)第二透視動座標系(Second Perspective Moving Coordinate System)と呼び、今後、この上で議論を進める。このとき、次の関係が成り立つ。

$$(a \cos\theta, a \sin\theta) = (s, t)$$

この関係を式(6)に代入して整理することにより、 $s$ と $t$ の関係式が次式のように求まる。

$$\begin{aligned} \tan\Delta\alpha (((s^2 + t^2) + (s^2 - t^2) / \cos\Delta\beta) / 2 + f^2) \\ = f\sqrt{(s^2 + t^2 + f^2)} \tan\Delta\beta \quad (6)' \end{aligned}$$

これは一般角 $\Delta\alpha$ に対して、 $\Delta\beta$ を一定としたときに得られる $p_{\infty n}$ のS-T平面(仮想画像面)上での軌跡を示す。

同様に、 $\Delta\alpha = \pi/2$ のとき、式(8)はS-T座標系で、次式のように表わされる。

$$((s^2 + t^2) + (s^2 - t^2) / \cos\Delta\beta) / 2 + f^2 = 0 \quad (8)'$$

即ち、 $\Delta\alpha = \pi/2$ のとき、点 $p_{\infty n}$ は式(8)'で表わされる双曲線上にしか存在しないことが判る。

なお、式(8)'は式(6)・(6)'を経ないで、Kanade[2]に座標変換を施すことにより求めることもできる。また、これとは逆に、式(6)あるいは(6)'を平行投影あるいはGradient空間上での議論に変換することも容易である。

### 3.3 PAT曲線の特性

本節では、PAT曲線(図4)、即ち前節で導出した式(6)の特性を分析する。まず、種々の条件の付加により、以下のように式が簡略化され幾つかの性質が見出せる。

(i)  $\Delta\alpha = \pi/2$  のとき、

式(6)は式(8)のように簡略化される。式(8)は  $a$  に関する二次式であり、 $\theta$  の値により、 $a$  は 0~2 個の実根を持つ。また、S-T 座標表示により式(8)'を得る。

特に、 $\Delta\alpha = \Delta\beta$  のとき、次式が得られる。これは、原点で直交する 2 直線を表わす。

$$(s+t)(s-t) = 0$$

(ii)  $\Delta\beta = \pi/2$  のとき、

$$(a^2 \tan \Delta\alpha \cos 2\theta)/2 = f\sqrt{(a^2+f^2)} \quad (9)$$

ここで、 $\tan \Delta\alpha \rightarrow \infty$  にて、 $(a^2/\sqrt{(a^2+f^2)})\cos 2\theta \rightarrow 0$  によって、 $a \rightarrow \infty$  にて、 $\theta = n\pi \pm \pi/4$  が導かれる。

(iii)  $a \rightarrow \infty$  にて、

$$\tan \Delta\alpha (\cos \Delta\beta + \cos 2\theta) / \cos \Delta\beta = 0$$

ここで、三角関数の和の公式より、次式が成立する。

$$\cos \Delta\beta + \cos 2\theta = 2\cos((\Delta\beta+2\theta)/2)\cos((\Delta\beta-2\theta)/2)$$

これは、あらゆる  $\Delta\alpha, \Delta\beta (\neq \pi/2)$  に対して  $\theta = n\pi + \pi/2 \pm \Delta\beta/2$  が漸近線となることを示す。なお、 $\Delta\beta = \pi/2$  の場合についても、式(9)より、同じ漸近線が得られる。この結果は  $\Delta\alpha, \Delta\beta$  には全く依存しない。

(iv)  $a = 0$  にて、

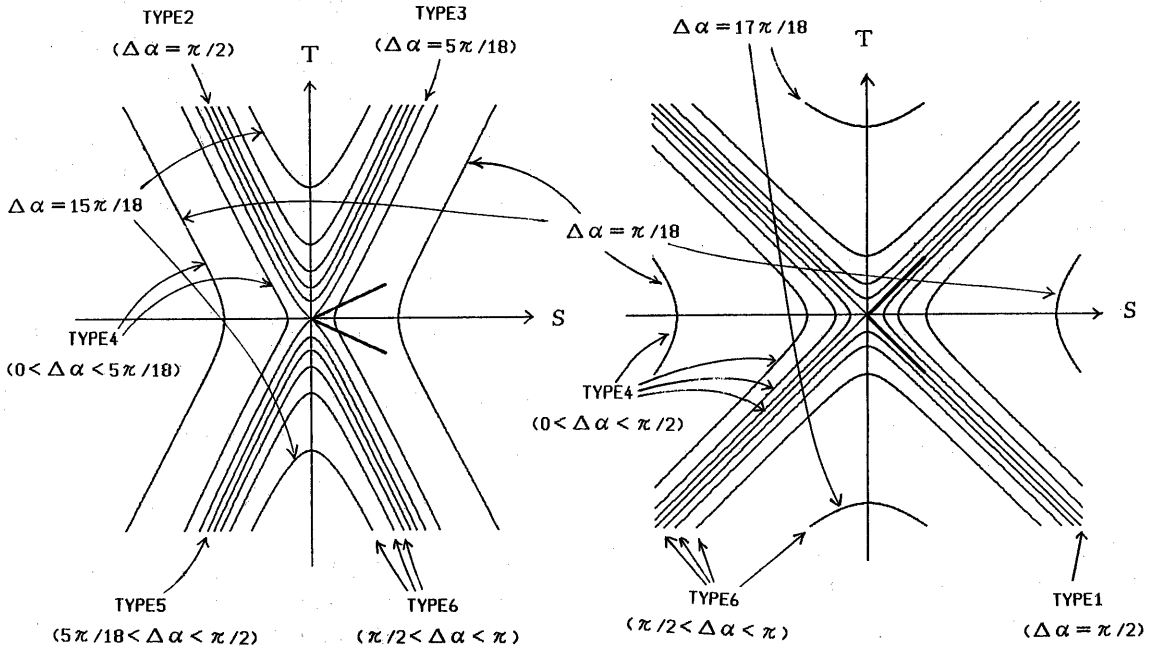
$$(\tan \Delta\alpha - \tan \Delta\beta) f^2 = 0$$

この式は  $\Delta\alpha = \Delta\beta$  の時にのみ解が存在することを示す。

(v)  $\Delta\alpha = \Delta\beta$  にて、

$$(1 + \cos 2\theta / \cos \Delta\beta) a^2 / 2 + f^2 = f\sqrt{(a^2+f^2)}$$

ここで、 $a \rightarrow 0$  とすると  $\cos 2\theta \rightarrow 0$  によって、 $a \rightarrow 0$  のときの漸近線として、 $\theta = n\pi \pm \pi/4$  が得られる。これは、原点において、曲線が  $\Delta\beta$  に関係なく、S 軸に  $\pm \pi/4$  で交わることを示す。



(a)  $\Delta\beta = 5\pi/18$  and  $\Delta\alpha = (2k-1)\pi/18$  ( $k=1\sim 8$ )

(b)  $\Delta\beta = \pi/2$  and  $\Delta\alpha = (2k-1)\pi/18$  ( $k=1\sim 9$ )

Figs. 4 Examples of PAT Curves

### 3. 4 PAT曲線の分類

PAT曲線は次のように大きく6種類に分類できる。それぞれの代表例を図4に示す。また、 $\theta$ の変化に伴う根の数を示すと次のようになる。以下、 $\Delta\beta \leq \pi/2$ の場合についてのみ結果を示す。 $\Delta\beta > \pi/2$ の場合については、補角を用いて議論することにより、すべての場合を下記の場合分けてカバーできる。

TYPE1 2直線 :  $\Delta\alpha = \pi/2, \Delta\beta = \pi/2$  のとき  
 $\theta = \pm\pi/4$  でのみ根を持つ。これは、 $l_1$ あるいは $l_2$ のうえに無限遠点が存在することを意味する。

TYPE2 双曲線 :  $\Delta\alpha = \pi/2, \Delta\beta \neq \pi/2$  のとき  
 $\pi/2 - \Delta\beta/2 < \theta < \pi/2 + \Delta\beta/2$  にて2根を持つ。他の範囲内では根を持たない。

TYPE3 原点で直交する2曲線  
 :  $\Delta\alpha = \Delta\beta = \pi/2$  のとき  
 $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$  にて2根(但し、原点を除く)を持つ。他の範囲内では原点以外に根を持たない。

TYPE4  $0 < \Delta\alpha < \Delta\beta \leq \pi/2$  のとき  
 $-\pi/2 + \Delta\beta/2 < \theta < \pi/2 - \Delta\beta/2$  にて2根を持つ。他の範囲内では根を持たない。

TYPE5  $\Delta\beta < \Delta\alpha < \pi/2$  のとき  
 $\pi/2 - \theta_1 < \theta < \pi/2 - \Delta\beta/2$  および、  
 $\pi/2 + \Delta\beta/2 < \theta < \pi/2 + \theta_1$  にて4根  
 $\pi/2 - \Delta\beta/2 < \theta < \pi/2 + \Delta\beta/2$  にて2根  
 他の範囲では根を持たない。  
 ここで、 $\theta_1$ は次式で与えられる。

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{\cos \Delta\beta \sqrt{(\tan^2 \Delta\alpha - \tan^2 \Delta\beta)}}{\tan \Delta\alpha}$$

TYPE6  $\Delta\beta \leq \pi/2 < \Delta\alpha$  のとき  
 根はTYPE2と同じ特性を示す。但し、曲線は双曲線ではない。

以上の分類より、前論文[1]で述べた、実交点が存在する三軸の解釈の四義性は、TYPE5の一部分に特定できることが判る。

### 3. 5 Skewed Symmetry の議論との関係

Kanade[2]のSkewed Symmetry の議論と透視角度変換

の一般形との関係を整理すると次のようになる。

#### (i) 角度の一般化

前者では $\Delta\alpha = \pi/2$ の場合についてのみ議論しているのに対し、後者では $\Delta\alpha$ を任意に設定できる。

#### (ii) 投影法の相違

前者では当初の目的が拡がりを持つ図形の軸対称性の利用に置かれたことにより、平行投影を前提としている。これに対し、後者では対象を局所的に観測可能な角度に限定し、第二透視座標系を用いて角度を観測する方法で、中心投影に議論の範囲を拡大している。

#### (iii) 特徴空間の相違

前者ではMackworth[5]の議論の利用を図るため、また平行投影下での議論であるため、Gradient空間で議論を行っている。これに対し、本論文では、画像平面上で無限遠点の位置に対する拘束を求め、中心投影で得られる画像上に存在する他の拘束との併用を可能にしている。

### 4 散在する三線分の三次元配置復元

Barnard[3]は、画像内に散在する三線分に対応する三次元空間内の線分がベクトルとして互いに直交するという仮定のもとで、三線分のGradientを求める問題を提起し、これに対する数値解を与えている。本章では、この問題を拡張し、ベクトル対のなす角度のうち1つについては直交でなくても良いものとしたうえで、代数的解法を導出する。なお、本章の議論は前論文[1]の議論を、交点が実在しない場合に拡張したものに相当する。

#### 4. 1 問題の定式化

図5のように、画像内に三線分 $l_i (i=1,2,3)$ が散在する場合を考察する。ここで、 $L_i$ で $l_i$ に対応する三次元空間内の線分を示す。また、 $L_i$ 上の単位ベクトルを $E_i$ で示し、これらが次の関係を満たすものとする。

$$E_1 \cdot E_2 = E_1 \cdot E_3 = 0 \quad E_2 \cdot E_3 = \cos \Delta\alpha$$

ここで、 $\Delta\alpha$ は既知とする。即ち、 $E_1$ は $E_2$ および $E_3$ と直交し、 $E_2$ と $E_3$ は既知の角度 $\Delta\alpha$ をなす。このとき、各 $E_i$ を求める問題を取り扱う。

#### 4. 2 仮想交点における仮想画像面の利用

前節で示した問題を解くため、以下に示す仮想画像面

を用いる。まず、実画像上で  $l_2$  と  $l_3$  をそれぞれ延長したときに得られる交点を点  $p$  とする。このとき、点  $p$  に対応するものとして、3次元空間内に仮想交点  $P$  を想定できる。

ここで、 $L_1, L_2, L_3$  に平行な三線分  $L_1', L_2', L_3'$  が点  $P$  で交差するものとする(図5)と、3線分  $L_1', L_2', L_3'$  の配置を求めることは、もとの3線分  $L_1, L_2, L_3$  の配置を求めるのと等価である。

今、直線  $OP$  を  $C$  軸とする仮想画像面上での直線  $l_i, l_i'$  の見え方を  $l_i, l_i'$  と表わすと、各  $l_i'$  は次のようになる。点  $p$  の定義から、 $l_2'$  と  $l_3'$  は、 $l_2$  および  $l_3$  の延長線が、その像を表わし、交点は仮想画像面の中心点  $(0, 0, f)$  となる。一方、 $l_1'$  に関しては、以上の議論だけでは像は一意的には求められないが、その無限遠点

$p_\infty$  については、次節に示す2つの拘束が存在する。

#### 4. 3 点 $p_\infty$ に対する2種類の拘束と幾何的解法

まず、 $L_1'$  と  $L_1$  とが平行であることから、 $L_1$  と  $L_1'$  とは仮想画像面上に共通の無限遠点を持つ。これは、直線  $l_1$  上に  $l_1'$  の無限遠点  $p_\infty$  が拘束されることを意味する。

一方、 $L_1'$  は、 $L_2'$  と  $L_3'$  により張られる面の法線と一致するから、 $l_2$  と  $l_3$  で定義される PAT 曲線の上に、無限遠点  $p_\infty$  は拘束される。

即ち、幾何的には、直線  $l_1$  と PAT 曲線の交点として解が得られる(図6)。

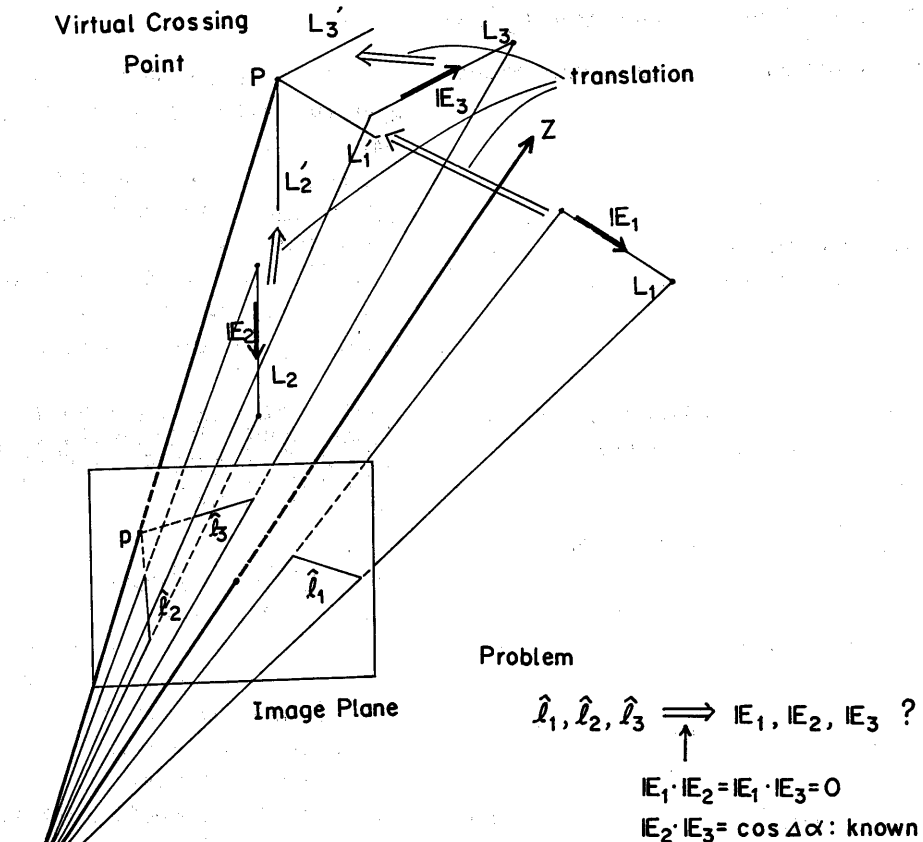


Fig.5 3-D Configurations are Recovered by Considering the Virtual Crossing Point P

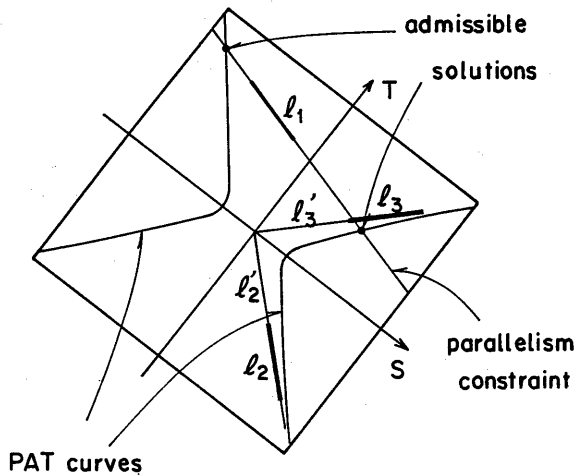


Fig.6 Geometric Solutions Generated by Two Constraints on the Virtual Image Plane

#### 4. 4 代数的解法

いま、第二透視動座標系で、 $l_1$ が次式で示されるとする。ここで、 $q, r$ は観測できる量である。

$$t = qs + r \quad (10)$$

このとき、解は式(6)あるいは式(8)と式(10)の連立解として得られる。2つの場合の具体的な解法を下に示す。

##### (1) $\Delta\alpha \neq \pi/2$ のとき

一般の $\Delta\alpha$ に対しては、求める解は $s$ に関する次の方程式に帰着できる。

$$\tan\Delta\alpha (Is^2 + Js + K) = f \cdot \tan\Delta\beta \sqrt{(s^2 + (qs+r)^2 + f^2)} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{但し、} \quad I &= (1+q^2)/2 + (1-q^2)/2\cos\Delta\beta \\ J &= qr(\cos\Delta\beta - 1)/\cos\Delta\beta \\ K &= r^2(\cos\Delta\beta - 1)/2\cos\Delta\beta + f^2 \end{aligned}$$

ここで、式(11)の両辺を二乗して有理化すると、問題は四次方程式の解法に帰着できる。これはFerrariの方法により代数的に解ける[6]。ここで、四次方程式の解は、 $\Delta\alpha$ の補角( $\pi - \Delta\alpha$ )に対する解を含む。よって、求まる解の候補の中から、式(11)を満たすものを選択することにより、式(11)の根が求まる。こうして求められた根のうち、実際に意味をもつのは実根のみであり、そ

の数は場合によって0~4個の範囲内で変化する。

なお、3直線が実交点を持つ場合には、第一透視動座標系を用いて、二次方程式の根として解を求めることができる[11]。

##### (2) $\Delta\alpha = \pi/2$ のとき

求める解は、次の二次方程式に帰着できる。

$$Is^2 + Js + K = 0 \quad (12)$$

即ち、二次方程式の根の公式から得られる二根のうち、実根のみが実際には有効である。即ち、有効な根の数は0~2個の範囲内で変化する。

なお、3直線が実交点を持つ場合、一次方程式に問題帰着できる[11]。

#### 6. まとめ

本論文では、前論文で提案した第一透視動座標系・透視角度変換の基本形の議論を発展させ、透視角度変換の一般形を導いた。これは、Kanade[2]のSkewed Symmetryの議論を、2つの意味( $\Delta\alpha$ の一般化、中心投影法への適用)で一般化した議論に相当する。本論文では、PAT曲線の特性を分析するとともに、Barnard[3]が提起した、画像上に散在する3線分の直交解釈問題を一般化したうえで、この代数的解法を仮想交点で定義される仮想画像面上で第二透視動座標系を用いて導いた。

[謝辞]日頃御指導戴く畔柳情報通信基礎研究部長、吉田統括役、増田第三研究室長に深謝致します。また、日頃討論頂く第三研究室の諸氏に感謝致します。また、第3章の内容について有益なコメントを頂いた、筑波大学大田友一先生に心から感謝致します。

#### [文献]

- [1] 尺長健、金子博, "透視動座標系による3次元空間の認識", 信学研資, PRL85-31, (1985).
- [2] Kanade, T., "Recovery of the Three Dimensional Shape of an Object from a Single View", Artificial Intelligence, Vol. 17, pp. 409-460, (1981).
- [3] Barnard, S. T., "Choosing a Basis for Perceptual Space", CVGIP, Vol. 29, (1985).
- [4] 尺長健、金子博, "単眼視による概略シーンからの個別モダルの生成ー屋内シーンのモデル化", 信学研資, PRL84-52, (1984).
- [5] Mackworth, A. K., "Interpreting Picture of Polyhedral Scenes", Artificial Intelligence, Vol. 4, No. 2, pp. 121-137, (1973).
- [6] 例えば、岩波数学辞典, 第2版, p. 889.