

三面図からの物体自動合成のための 擬似ブール代数解法

佐々木康仁*, 石川雅朗*,
伊藤 潔**, 鈴木誠道*

*: 上智大学
理工学部機械工学科

** : 上智大学
理工学部一般科学 (情報科学) 研究室

1. はじめに

人間が三面図を理解する場合、あいまいさが残る部分にはなんらかの知識を動員しながら、各面図の端点間、線分間および面間での対応を同時にあるいは試行錯誤に行って物体を認識している。同様な方法で物体を認識するシステムを実現しようとすると、そのシステムには人間が持つ物体に関する蓄積された知識やその知識を使って物体を認識の際のヒューリスティックな手続きを組まなければならない。そのようなシステムは複雑で高度な試行錯誤を行うものとなり、実現は容易ではない。

三面図からの物体自動合成のシステムを作り上げようとする場合通常考えられる手法では、まず三面図を入力して各面図の端点や線分について各面図間で対応をとり、三次元空間上の頂点と稜線から成るワイヤフレームモデルを作成し、次に、それらの稜線で囲まれた領域を面として認識したサーフィスマデルを作成し、最後に、このサーフィスマデルの各面のいずれの側に実体が存在するかを明らかにして三次元形状を表わすソリッドモデルとなる物体を合成する。この過程の中で図1のような入力面図によっては、虚物体要素を含んだワイヤフレームモデル、サーフィスマデル、ソリッドモデルを作成してしまう場合がある。このためいずれかの段階での合成された虚物体要素の除去あるいは虚物体要素の合成の防止が、三面図から物体を合成の際の主眼となる。

我々の処理の流れを図2に示す。サーフィスマデルまでの合成は上で述べた通りでこの出力には虚物体要素を含むことも許される。虚を含んだサーフィスマデルを真にするために、いくつかの処理を施した後、連立擬似ブール代数等式不等式による解法(擬似ブール代数解法)を適用する。擬似ブール代数解法では虚も含む物体要素間に成り立つ位相関係を連立方程式で表し、その解を真のサーフィスマデルの成り立ち規則に合致させる。

本研究で扱う三面図及び物体は、以下の条件を満たすものとする。
(A) 三面図の各面図(正・平・側面図)は

互いに矛盾しない。

- (B) その三面図を満たす物体が確実に存在する。
- (C) 対象となる物体は、すべて直線の稜線と平面によって構成されている結合物体である。また、図面に対する補助的な記号はない。
- (D) 物体の表面に傷はない。
- (E) 物体要素は互いに接していることはない。

2 サーフィスマデルまでの単純合成手順 [ISH85ad]

この過程は、(1)三面図データの入力、(2)頂点の作成、(3)稜線の作成、(4)面の作成、(5)同一平面グループの作成から成る。

2.1 入力される三面図データ 各面図における端点の座標、各面図の線分の始点と終点および隠れ線か否かの情報から成る。

2.2 頂点の作成 三次元空間上の全ての頂点を生成するためには、ある面図の端点と他の面図の端点との対応をとると共に、他の面図の線分との対応も考慮しなければならない。三次元空間上の頂点が面図の端点としては現れていないが線分上に隠れている可能性のある頂点(“線分によって被覆された頂点”、その線分を“頂点を被覆する線分”と呼ぶ)が存在する。ある面図上の全ての端点Pについて、例えば正面図について $V_{FRONT}(P)$ をとる。ここで $V_{FRONT}(P) = V_{FRONT}(P) \rightarrow TOP \vee V_{FRONT}(P) \rightarrow SIDE$ であり、 $V_{FRONT}(P) \rightarrow TOP$ (あるいは $V_{FRONT}(P) \rightarrow SIDE$) は、正面図上の端点Pと対応する平面図(あるいは側面図)上の端点あるいは線分から求められる三次元空間上の頂点の集合である。同様に、平面図、側面図を中心にした V_{TOP} , V_{SIDE} を作成する。最後に $V_{CANDIDATE} = V_{FRONT} \cup V_{TOP} \cup V_{SIDE}$ を行うと、この $V_{CANDIDATE}$ が三面図によって作成された頂点となる。

2.3 稜線の作成 三次元空間上のある頂点αと稜線を結ぶ可能性のある頂点とは、(1)頂点αがある面図上で端点になっていて、その端点に重なって投影されていた他の頂点、(2)頂点αがある面図上で端点あるいは“頂点を被覆する線分”になっていて、それからのびる線分あるいはその線分に同一直線でつながる線分上の他の端点あるいは“頂点を被覆する線分”に投影されていた頂点である。正面図、平面図、側面図をもとにこのように生成された稜線を E_{FRONT} , E_{TOP} , E_{SIDE} とする。物体の稜線は正面図、平面図、側面図のすべてについて、端点又は線分に投影されているから $E_{FRONT} \cap E_{TOP} \cap E_{SIDE}$ をとると三次元空間上の所望の稜線が得られる。この中には同一直線上に複数の長さの異なる稜線が重なって存在する場合があるので各稜線の2つの頂点が同一直線上で隣接するように稜線を作り換えて最小分割稜線集合 $E_{CANDIDATE}$ を求める。

2.4 面の作成

稜線データ $E_{CANDIDATE}$ をもとに、それら稜線で作られる最小分割面集合 $F_{CANDIDATE}$ を作る。

2.5 同一平面グループの作成

$F_{CANDIDATE}$ の各々の面の方程式のうちで同じ平面方程式を持つもの同士を集めてグループ化する。

3 明白な虚物体要素の除去と面のグループ化

3.1 孤立物体要素の除去 以下の物体要素が除去される。(1) 接続する稜線がない頂点(孤立頂点)(2) 面を構成しない稜線(ぶらさがり稜線)(3) 他の面を構成しない稜線をもつ面(ぶらさがり面)。(1)~(3)の除去は再帰的に繰り返される。ある除去の結果、孤立した頂点、稜線、面が生成されればそ

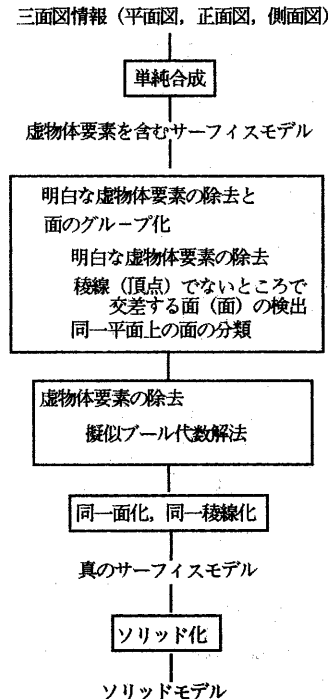


図2 三面図からの自動合成処理の流れ

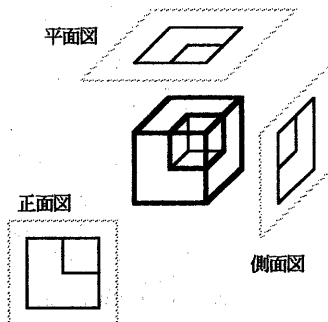


図1 虚物体要素を含む物体合成

れらも除去される。

3.2 同一面化 同一平面の複数の面のみの境界となる稜線を共有する面は同一化される。

3.3 同一稜線化 同一直線の2つの稜線のみで構成される頂点を除去して稜線は同一化される。これに応じて面も再構成される。

3.4 同一平面上の凸/凹ループの検出 同一平面上にある面の関係を調べる。同一平面上にある面の関係は、(1) 稜線や頂点を共有する面グループ、(2) 何も共有しないグループに分けられる。分けられた各グループで面の含包関係を調べて、一番外の面の中に境界をもつ面は虚となり、虚となった面を構成する頂点、稜線は一番外の面を構成する頂点、稜線として登録される。これはある面にあり立つ穴の輪郭(凹ループ)、ある面からの突起物の接合部(凹ループ)であり、一番外側の面にそれらがある場合のみこの段階で検出できる。

3.5 稜線(頂点)でないところで交差する面(稜線)の検出 多面体として成り立つためには、条件「面は互いに稜線でないところでは交差しない」を満たさなければならない。稜線でないところで交差する面があれば、それらの面の中で同時に2つ以上の面が成り立つことはない。この条件を満たさない交差する面の組を検出する。このような面の組の集合をCFCrossとする。交差稜線も同様にCEcrossとする。

4 成り立ち規則の定式化と線形擬似ブール代数解法

明白な虚物体要素除去後のサーフィスマデルは、以下の虚である物体要素を含むサーフィスマデルの成り立ちに関する規則に従う。

(a)ある頂点が虚でなければ、その頂点を構成する全ての稜線の内、その稜線数以下3つ以上までの組合せで稜線が虚でない、ある頂点が虚であるならば、その頂点を構成する稜線は全て虚である。

(b)ある頂点が虚でなければ、その頂点を構成する全ての面の内、その面数以下3つ以上までの組合せで面が虚でない、ある頂点が虚であるならば、その頂点を構成する面は全て虚である。

(c)ある稜線が虚でなければ、その稜線を構成する2つの頂点も虚でない。稜線が虚であるならば、その稜線を構成する2つの頂点は、各々虚であるか虚でないか判らない。

(d)ある稜線が虚でなければ、その稜線を構成する面の内2つの面が虚でない。ある稜線が虚であるならば、その稜線を構成する全ての面も虚である。

(e)ある面が虚でなければ、その面を構成する頂点も虚でない。ある面が虚であるならば、その稜線を構成する全ての頂点は、各々虚であるか虚でないか判らない。

(f)ある面が虚でなければ、その稜線を構成する稜線も虚でない。ある面が虚であるならば、その稜線を構成する全ての稜線は、各々虚であるか虚でないか判らない。

虚である物体要素を含むサーフィスマデルの成り立ちに関する規則を、0-1変数(1であればその変数に対応する頂点、稜線、面が存在)である頂点変数CV、稜線変数CE、面変数CFによる物体要素の関係式で表わすと次のようになる。

$$\text{全ての } c \in CV \text{ に対して} \\ 3CV \leq \sum_{oe \in CE_{of}} CE_{of}, \quad \alpha_{cv} = |CE_{of}| \geq 3 \quad (a)$$

$$3CV \leq \sum_{of \in CF_{ov}} CF_{ov}, \quad \beta_{cv} = |CF_{ov}| \geq 3 \quad (b)$$

$$\text{全ての } ce \in CE \text{ に対して} \\ 2CE \leq \sum_{ov \in CV_{ce}} CV_{ce}, \quad |CV_{ce}| \geq 2 \quad (c)$$

$$2CE = \sum_{of \in CF_{oe}} CF_{oe}, \quad |CF_{oe}| \geq 2 \quad (d)$$

$$\text{全ての } cf \in CF \text{ に対して} \\ \gamma_{cf} \leq \sum_{ov \in CV_{of}} CV_{of}, \quad \gamma_{cf} = |CV_{of}| \geq 3 \quad (e)$$

$$\delta_{of} \leq \sum_{oe \in CE_{of}} CE_{of}, \quad \delta_{of} = |CE_{of}| \geq 3 \quad (f)$$

ここでCV, CE, CF:虚も含む物体要素集合, CV_{oe}:稜線ceに接続する虚も含む頂点の集合。

擬似ブール代数解法では、式(a)(b)を虚である物体要素を含むサーフィスマデルの全ての頂点に、同じく(c)(d)を全ての稜線に、(e)(f)を全ての面に適用する。これを連立して解くと解は以下の真のサーフィスマデルの成り立ちに関する規則を満足する。

(A)物体の頂点は3つ以上の稜線によって構成される。

(B)物体の頂点は3つ以上の面によって構成される。

(C)物体の稜線は2つの頂点によって構成される。

(D)物体の稜線は2つの面によって構成される。

(E)物体の面は3つ以上の頂点によって構成される。

(F)物体の面は3つ以上の稜線によって構成される。

この成り立ち規則は、擬似ブール代数で次のように書ける。

$$\text{全ての } v \in V \text{ に対して,} \\ \alpha_v = \sum_{e \in E_v} e, \quad \alpha_v = |E_v| \geq 3 \quad (A)$$

$$\beta_v = \sum_{f \in F_v} f, \quad \beta_v = |F_v| \geq 3 \quad (B)$$

$$\text{全ての } e \in E \text{ に対して,} \\ 2 = \sum_{v \in V_e} v, \quad |V_e| = 2 \quad (C)$$

$$2 = \sum_{f \in F_e} f, \quad |F_e| = 2 \quad (D)$$

$$\text{全ての } f \in F \text{ に対して,} \\ \gamma_f = \sum_{v \in V_f} v, \quad \gamma_f = |V_f| \geq 3 \quad (E)$$

$$\delta_f = \sum_{e \in E_f} e, \quad \delta_f = |E_f| \geq 3 \quad (F)$$

ここで、V, E, F:真の物体要素(順に頂点、稜線、面)集合、V_e:稜線eに接続する頂点集合。

このままではサーフィスマデルとしては真であるが三面図情報と合致しないものも合成されるので三面図情報と物体要素間に成り立つ次の関係も考慮する。

(g)三面図上の端点は1つ以上の三次元上の頂点に対応する。

(h)三面図上の線分は1つ以上の三次元上の稜線に対応する。

この関係の規則は次のように擬似ブール代数式で定式化できる。

$$\text{全ての } p \in P \text{ に対して} \\ \sum_{ov \in CV_p} CV_{ov} \geq 1 \quad (g)$$

$$\text{全ての } s \in S \text{ に対して} \\ \sum_{oe \in CE_s} CE_{oe} \geq 1 \quad (h)$$

ここでP:面図上の端点の集合, S:面図上の線分の集合, CV_p:p ∈ P)によって生成された頂点の集合, CE_s:s ∈ S)によって生成された稜線の集合。

この(g)(h)式を三面図上の端点、線分に適用し、上記で(a)~(f)式を適用して得た擬似ブール代数式全体と連立させる。この連立方程式の解は、三面図に合致し、真のサーフィスマデルの成り立ち規則に合致する物体要素群となる。

さらに多面体として次が成り立つ。

(i)稜線は互いに頂点でないところでは交差しない。

(j)面は互いに稜線でないところでは交差しない。

この関係の規則は次のように擬似ブール代数式で定式化できる。

$$\text{全ての } CE_x \in CE_{cross} \text{ に対して} \\ \sum_{oe \in CE_x} CE_{oe} \leq 1 \quad (i)$$

$$\text{全ての } CF_x \in CF_{cross} \text{ に対して} \\ \sum_{of \in CF_x} CF_{of} \leq 1 \quad (j)$$

ここでCE_x:頂点でない同じと互いに交差する稜線の集合, CE_{cross}:CE_xの集合, CF_x:稜線でない同じと互いに交差する面の集合, CF_{cross}:CF_xの集合。

以上のように定式化して明白な虚物体要素排除後の物体に適用すると[HAM68]の解法が適用できる。

5 解法の証明

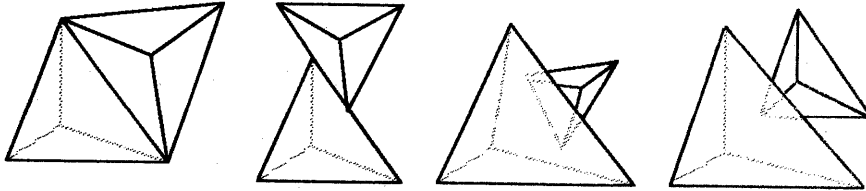


図3 排除される多面体

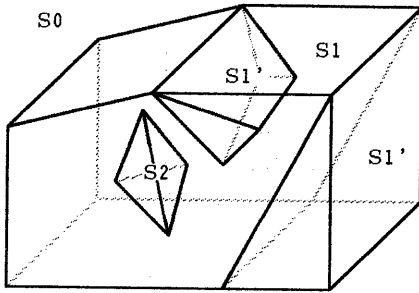


図4(a) 規則に反するクラスS1'

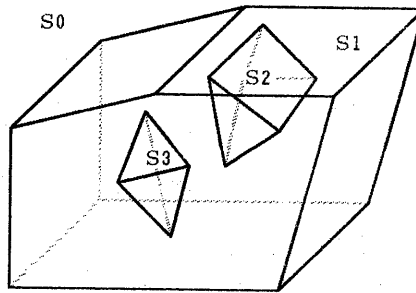


図4(b) 規則を満たすクラス

ここで扱う多面体を定義する。定義1~定義3は[MAR81]による。
定義1 多面体とは、有限個の半空間の積集合の有限個の和集合でかつ有界な閉集合である。

性質1 多面体の境界は有限個の面の集まりから成る。

定義2 多面体境界を形成する2つの面が互いに交わる時、その交わりを多面体の稜線という。

定義3 多面体の2つの稜線が互いに交わる時、その交わりを多面体の頂点という。

式 (i) (j) は定義2, 3を表している。

我々が扱う多面体は、以上の定義に加えて次の条件を満たす。

条件1 多面体を表す閉包Aの内点の閉包はAに等しい。

条件2 多面体を表す閉包Aの境界の任意の一点をpとし、 $B\delta = \{x \mid |x-p| \leq \delta\}$ としたとき、 $(A \cap B\delta)$ が連結である。 $(\cdot \cap \cdot)$ は、内点を表す。

図3に定義4によって排除される多面体の例を示す。

3次元集合構成の候補となる頂点、稜線及び面の集合をそれぞれCV, CE, CFであり、 $CV = \{cv_1, cv_2, \dots, cv_n\}$, $CE = \{ce_1, ce_2, \dots, ce_n\}$, $CF = \{cf_1, cf_2, \dots, cf_1\}$ とする。cv_iが真のとき1、虚のとき0とする。ce_i, cf_kについても同様に0, 1変数を対応させる。

定義4 3次元空間E³内に有限個の面分F (面分は、それを構成する頂点、稜線を含む) があるとす。このとき、x, y ∈ E³の2点を面分を通過せずに結ぶことができる時、x, yは同じクラスに属するという。

性質2 E³ - Fは、有限個のクラスに分けられる。

定理1 (a)~(f)を同時に満足するcv_i, ce_j, cf_kからV, E, Fを次のように定められる。これは、(A)~(F)を満足する。

$$V = \{v_i \in CV \mid v_i = 1\}, \quad E = \{e_j \in CE \mid e_j = 1\}, \\ F = \{f_k \in CF \mid f_k = 1\}$$

証明 各頂点に(a)(b), 各稜線に(c)(d), 各面に(e)(f)を適用すると、その物体要素を基にしてその物体要素を構成する他の物体要素群とそれらが真であるか偽であるかの複数の可能性が列挙される。

物体要素Xが真の時、Xのまま、Xが偽の時、 \bar{X} と表記する。 \bar{X} を、 \bar{X} または \bar{X} とする。a_{(r)c}を物体要素cに規則(r)を適用した

ときの可能性の集合とする。各可能性には、c自体も含んでおく。n_{(r)c}を物体要素cに規則(r)を適用したときの可能性の個数とする。 $n_{(r)c} = |a_{(r)c}|$ 。m_jをj番目の可能性に含まれる物体要素 \bar{X} の個数とする。

$$n_{(r)c} = \sum_j m_j \\ a_{(r)c} = \text{SET}[\text{SET}[\bar{X}]]$$

a_{(a)v}の要素は、(a)の条件の下で(A)を満たしている物体要素の全ての組み合わせの列挙を表す。よって、a_{(a)v}の各要素は(A)を満たしている。同様に、a_{(b)v}, a_{(c)e}, a_{(d)e}, a_{(e)f}, a_{(f)f}の各要素は、(B), (C), (D), (E), (F)を各々満たしている。

従って、(a)~(f)を同時に満足するv_i, e_j, f_kの値を定めたものは、(A)~(F)を満足する。

定理2 定理1で定められた{V, E, F}は三面図を表す多面体を生成する。

証明 S = E³ - Fとする。性質1により、Sは有限個のクラス(S₀, S₁, ..., S_i)に分割される。S₀を無限遠点を含むクラスとする。

$$S = \cup_{i=0} S_i, \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

今、S_i (i ≠ 0) を考えると、S_i, S_j (i ≠ j)は、Fを通過しない曲線で結合できないので、S_iは、有限個の面分から成る境界を有する。今、S_iを構成する面群{F_i⁽¹⁾, F_i⁽²⁾, ..., F_i⁽ⁿ⁾}の内部にF, EまたはVの要素があれば、必ずある稜線e₀がS_iの内部に存在する。(d)よりe₀を構成する2つの面分がある。2つの面分は、それぞれS_iの境界の面分か、または、S_iの内部の面分である。前者の場合には、さらにこの面分を構成する稜線群があり、それらが構成する面分がある。この操作を繰り返し、すでにたどった面分を元にして今までにたどったことのない稜線をたどると、有限回の操作の後、S_iの境界の面分f₁に達するか、または、S_iの内部のすでにたどった面分に至る。前者の場合、f₁を構成する稜線の1つには、S_iの境界を構成する2つの面分とS_iの内部へ向かう1つの面分の少なくとも3つの面分が合流しており、(d)に反する。また、後者の場合、S_iの内部に面分によって構成された閉空間ができ、S_iが2つのクラスに分けられ、S_iが1つのクラスであるということに反する。従って、S_iの内部には、F, E, Vの要素はない。また、S_iの境界の面分は、他の2つ以上のクラスS_jの境界の面分となっていない。もし、そのような境界面分f₁があれば、面分f₁を構成する稜線は、3つ以上の面分の合流稜線になり、(d)に反する。S_iの境界の稜線は、他の2つ以上のクラスS_jの境界の稜線となっていない。もし、そのような境界稜線があれば、3つ以上の面分の合流稜線になり、(d)に反する。(図4参照)

さて、S₀をPに属さないとする。次に未だPに属すか否か定まっていないクラスの内、Pに属さないと決まったクラスと境界を共有するクラスの点とその境界点をPに属させる。また、未だPに属すか否か定まっていないクラスの内、Pに属すると決まったクラスと境界を共有するクラスの点をPに含めないことにする。この操作を繰り返すとE³の全ての点かPに属するか否か定まる。この内Pに属する1つのクラスとその境界は多面体を構成する。Pは、その和集合だから多面体である。この多面体はg), (h)を満たしているのので、三面図を表す多面体である。また、Pの境界以外には、F, E, Vの要素はない。

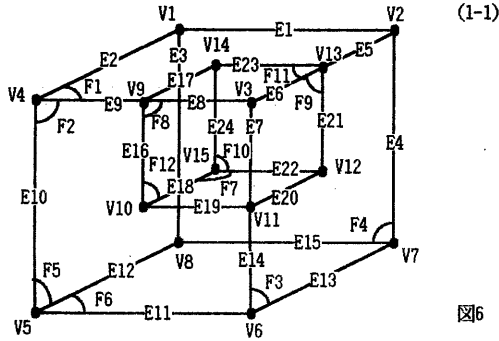


図5 虚物体要素を含むサーフィスマデル

6 例題による検討

6.1 三面図との対応式の検討 まず、式(a)~(f)のみの連立によって図1の例を解いた。図5は虚物体要素を含むサーフィスマデルを表し、連立式の解は図6のようになる。各解は真のサーフィスマデルの成り立ち規則を満たしているが、必ずしも三面図に合致しないことが判る。解(1-1)(1-2)のような三面図に合致しない解を排除するために、三面図端点との対応式(g)が必要となる。式(a)~(g)の連立によって、図1の例を解けば、解は図7のようになり、真のサーフィスマデルの成り立ち規則に矛盾せず、かつ、三面図に合致する解が得られる。

図1の例以外にも、式(a)~(g)の連立で解ける例は多い。しかし、図8の例を式(a)~(g)の連立で解くと、図10のような三面図に合致しない解が現れる。三面図線分との対応式(h)を加えてこの例を解けば、図11の解が得られる。これらの解に同一平面化、同一稜線化を施すと面の偽のようにみえる稜線は排除され、解(2-1)(2-2)は真のサーフィスマデルとなる。

6.2 交線なき2面の交差の検討 図12の例を式(a)~(h)の連立で解いた解を図13に示す。解(3-1)(3-2)(3-3)(3-4)のように実際には存在しえないような物体を示す解が現れる。これらの解は交差していない2面をもっている。式(i)~(j)が必要となり、式(a)~(j)の連立によって同じ例を解くと(3-5)

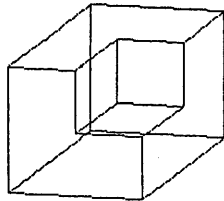


図7 式(a)~(g)の連立

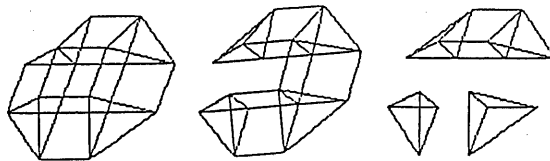


図10 式(a)~(g)の連立 他の解を含めて計50解

(2-1)

(2-2)

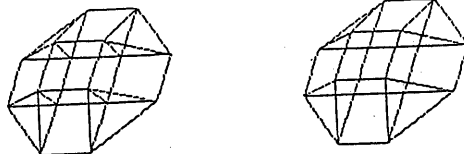


図11 式(a)~(h)の連立

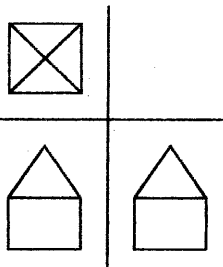
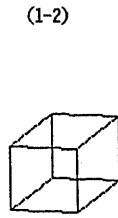
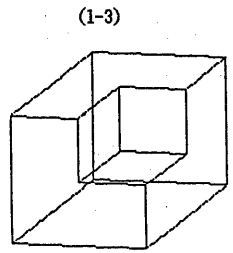


図12 三面図



(1-2)



(1-3)

図6 式(a)~(f)のみの連立

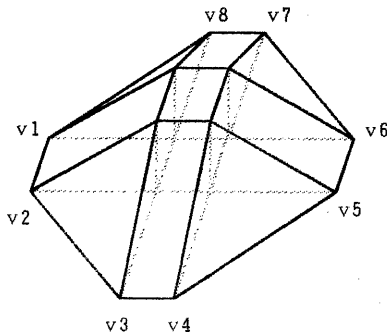


図9 虚物体要素を含むサーフィスマデル

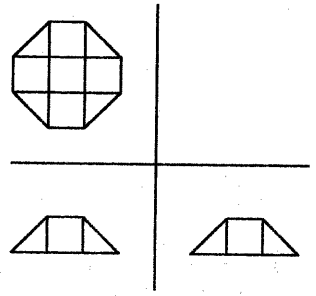


図8 三面図

から(3-13)の解のみが残る。さらに、同一平面化、同一稜線化をほどこせば、解(3-9)から(3-13)は求める真のサーフィスマデルとなる。(3-5)から(3-8)はまだ残る(このことについては8節で検討する)。

7 虚である物体要素を含むサーフィスマデルの成り立ちに関する規則の冗長性

定理3 式(f)は式(d)の必要条件である。

【証明】 いま、 Cf_0 に CB_j ($j=1, 2, \dots, n$)が接続しているとする、式(f)は、

$$n \cdot Cf_0 \leq \sum_{j=1}^n CB_j \quad (7.1)$$

である。ところが、このとき式(d)が成り立っているなら、 $j=1, 2, \dots, n$ に対して、

$$2CB_j = \sum_{f_i \in Cf_{0j}} Cf_i \quad (7.2)$$

である。(7.2)より、

$$2CB_j = Cf_0 + \sum_{f_i \in Cf_{0j}, i \neq 0} Cf_i \quad (i \neq 0)$$

$$2CB_j - Cf_0 = \sum_{f_i \in Cf_{0j}} Cf_i \geq 0 \quad (i \neq 0)$$

$$(\sum_{f_i \in Cf_{0j}} Cf_i \geq 0 \text{ for all } i)$$

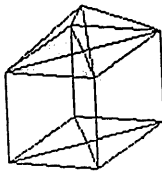
$$2CB_j \geq Cf_0$$

ここで、 CB_j, Cf_0 の変域 $(0, 1]$ を考えれば、

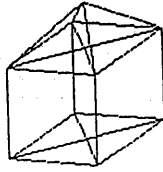
$$CB_j \geq Cf_0 \quad (7.3)$$

このようにしてできたn本の不等式(7.3)の辺々加えると、(7.1)と一致する。つまり、(7.2)が成り立っているならば、(7.1)

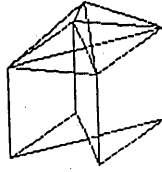
(3-1)



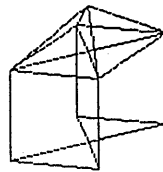
(3-2)



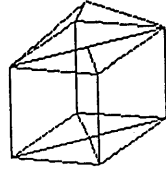
(3-3)



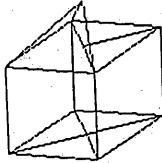
(3-4)



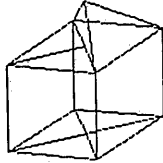
(3-5)



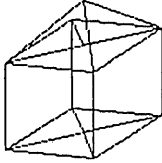
(3-6)



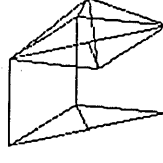
(3-7)



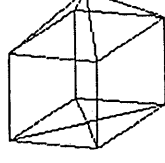
(3-8)



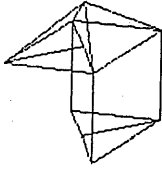
(3-9)



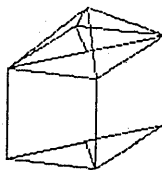
(3-10)



(3-11)



(3-12)



(3-13)

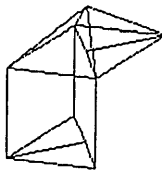


図13(a)-(j)の連立

が成り立つことがわかる。

すべての $cf_0 \in CF$ について、同様なので、式 (f) は式 (d) の必要条件である。

定理4 式 (c) は式 (a) の必要条件である。

【証明】 いま、 CB_k に CV_j ($j=1, 2, \dots, n$) が接続しているとするとき、式 (c) は

$$2CB_0 \leq \sum_{j=1}^n CV_j \quad (7.4)$$

である。ところが、このとき式 (a) が成り立っているならば、 $j=1, 2, \dots, n$ に対して

$$3CV_j \leq \sum_{o \in i \in CE_{ovj}} CB_o \leq |CE_{ovj}| \cdot CV_j, |CE_{ovj}| \geq 3 \quad (7.5)$$

である。(7.5)より、

$$\begin{aligned} \sum_{o \in i \in CE_{ovj}} CB_o &\leq |CE_{ovj}| \cdot CV_j \\ CB_0 + \sum_{o \in i \in CE_{ovj}} CB_o &\leq |CE_{ovj}| \cdot CV_j \quad (i \neq 0) \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$|CE_{ovj}| \cdot CV_j - CB_0 \geq \sum_{o \in i \in CE_{ovj}} CB_o \geq 0 \quad (i \neq 0)$$

($\because CB_k \geq 0$ for all i)

$$|CE_{ovj}| \cdot CV_j \geq CB_0$$

ここで、 CV_j , CB_0 の変域 $\{0, 1\}$ と $|CE_{ovj}| \geq 3$ を考えれば、 $CV_j \geq CB_0$ (7.6)

このようにしてできた n 本の不等式(7.6)の辺々加えると、

$$n \cdot CB_0 \leq \sum_{j=1}^n CV_j$$

稜線に関しては常に、 $n=2$ であることを考えれば、これは(7.4)と一致する。つまり、(7.5)が成り立っているならば、(7.4)が成り立つ。すべての $CB_0 \in CE$ について同様のことがいえるので、式 (c) は、式 (a) の必要条件である。

定理5 式 (e) は、式 (a) か式 (d) であるための必要条件である。

証明に要する事実。

事実1 「 CF と CV_k が接続するならば、それらに共通して接続する CB が存在する。」

【証明】 いま、 cf_0 に CV_j ($j=1, 2, \dots, n$) が接続しているとするとき、式 (e) は、

$$n \cdot CF_0 \leq \sum_{j=1}^n CV_j$$

である。さて、 CF_0 と CV_j に共通して接続している CB を CB_k としよう。このとき、式 (a)、式 (d) が成り立っているならば、 $j=1, 2, \dots, n$ に対して、(7.3)より、 $CB_k \geq CF_0$ 、(7.6)より、

$$\begin{aligned} CV_j &\geq CB_k \\ \therefore CV_j &\geq CF_0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

後は定理3と同様。

定理6 式 (b) は、式 (a) か式 (d) であるための必要条件である。

証明に要する事実。

事実2 「ある1点 CV_i に接続する3本以上の CB_k に、共通して接続する CF は存在しない。」

事実3 「ある1点 CV_i に接続する CB_k に接続する CF は、その CV_i に接続する。」

【証明】 いま、 CV_0 に CF_j ($j=1, 2, \dots, n$)、 CB_k ($k=1, 2, \dots, m$) が接続しているとするとき、式 (b) は、

$$3CV_0 \leq \sum_{j=1}^n CF_j \leq n \cdot CV_0$$

である。 CV_0 と CF_j は接続しているから(7.7)より、 $CV_0 \geq CF_j$ であるから、

$$\sum_{j=1}^n CF_j \leq n \cdot CV_0$$

は、これまでと同様にして証明できる。あとは、(a)、(d) が成り立つとき、

$$3CV_0 \leq \sum_{j=1}^n CF_j \quad (7.8)$$

であることを示せばよい。

このとき、式 (a) より、

$$3CV_0 \leq CB_1 + CB_2 + \dots + CB_n$$

$$6CV_0 \leq 2CB_1 + 2CB_2 + \dots + 2CB_n \quad (7.9)$$

式 (d) より、(7.9) は、

$$6CV_0 \leq \sum_{cf_j \in CF_{0v_0}} CF_j + \sum_{cf_j \in CF_{0e_1}} CF_j + \dots + \sum_{cf_j \in CF_{0e_n}} CF_j \quad (7.10)$$

となる。 CB_1, CB_2, \dots, CB_n での CF_j の重複度を s_j とすると、(7.10) より、

$$6CV_0 \leq \sum_{j=1}^n s_j \cdot CF_j \leq 2 \sum_{j=1}^n CF_j$$

($s_j \leq 2$ for $j=1, 2, \dots, n$ by 事実2)

∴ 両辺2で割って(7.8)と一致する。

すべての $CV_0 \in CV$ について、同様のことがいえるので、式 (b) は式 (a) かつ式 (d) であるための必要条件である。

以上より、(a)~(f)の連立によって得られる解は(a), (d)のみの連立によって得られる解と同等であることが証明された。

検討事項は、(a), (d)に加えて(b)(c)(e)(f)を連立させることにより、探索効率の向上があるか否かである。経験的には、これまでの例題では(b)(c)(e)(f)を加えることによる探索効率の向上は見られず、逆に多く式の評価することによる処理効率の低下が見られた。

「式(a)~(f)」とあるところは「式(a), (d)」と書き換えても理論上さしつかえない。

8 非線形擬似プールの代数解法

8.1 線形擬似プールの代数解法の問題点 以上の線形擬似プールの代数解法では、図14、図16の三面図に対して、図15、図17に示す解をも許してしまう。この理由は coplanarな2面によってつくられた冗長な稜線が三面図線分との対応の情報に合致してしまったためである。この解決策としてたとえば図15でcoplanarな2面 f_1, f_2 は同

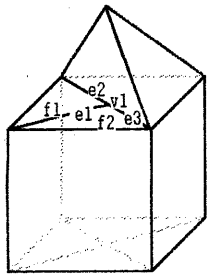


図15

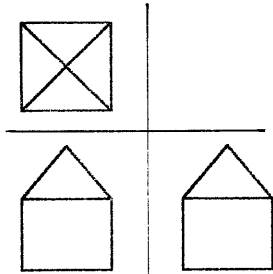


図14

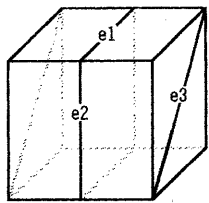


図17

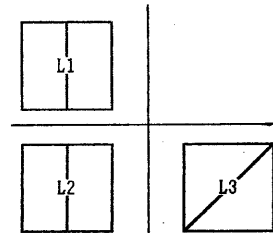


図16

一面であり e_1 が存在せず、coplanarな2稜線 e_2, e_3 は同一稜線であり v_1 が存在しないとすれば、それは多面体として真となる。

8.2 成り立ち規則の見直し

8.2.1 真のサーフィスマデル成り立ち規則の改訂 真のサーフィスマデル成り立ち規則の(D)を「物体の稜線は coplanar でない2つの面から成る。」と訂正する。(A)も同様 coplanarな2面により物体の稜線が構成されることを禁止すれば、上のような問題は解決できる。

8.2.2 虚物体要素を含むサーフィスマデルの成り立ち規則の改訂 (a)(d)のままでは、「稜線が無いならば面が無い」、「頂点が無いならば稜線が無い」であり、また coplanarな2面により稜線が構成されることも許される。これを稜線無く coplanarな2面が存在することや、頂点無く coplanarな2稜線が存在することを許すように(a)(d)自体に修正が必要である。

(a') 頂点が虚でなければその頂点を構成する稜線のうち3つ以上が真であり、虚ならばその頂点を構成する稜線は全て虚であるか、または coplanarな2稜線が真である。

(d') 稜線が虚でなければその稜線を構成する面のうち coplanarでない2つが真であり、虚ならばその稜線を構成する面はすべて虚であるか、または coplanarな2面が真である。

注意すべきことは、この規則は、coplanarな2面が真となることを禁止するものではないということである。例えば、図15の例では、coplanarな2面 f_1, f_2 は真である。しかし、その2面によっては e_1 は構成されないということである。以上と同様なことが、頂点と稜線の関係においてもいえる。

8.3 新しい定式化(非線形項の導入) 以上の新しい虚物体要素を含むサーフィスマデルの成り立ち規則を表現すべく、非線形項を導入して、次のように立式する。

(a') 全ての CV について、

$$(a'1) \quad 3CV \leq \sum_{ek \in CF_{0v}} CB_k \leq \sum_{cei, cej \in CF_{0e}} CV + \sum_{cei, cej \in CF_{0e}} CB_i \cdot CB_j$$

$$(a'2) \quad \sum_{cei, cej \in CF_{0e}} CV \cdot CB_i \cdot CB_j \leq 1$$

$$\{cei, cej\} \in CF_{0e \text{ coplanar}}$$

(d') 全ての CB について、

$$(d'1) \quad \sum_{cfk \in CF_{0e}} CF_k \leq 2CB + \sum_{cfi, cfj \in CF_{0e}} CF_i \cdot CF_j$$

$$\{cfi, cfj\} \in CF_{0e \text{ coplanar}}$$

$$(d'2) \quad \sum_{cfi, cfj \in CF_{0e}} CB \cdot CF_i \cdot CF_j \leq 1$$

$$\{cfi, cfj\} \in CF_{0e \text{ coplanar}}$$

(d'3) 全ての $\{CF_i, CF_j\}$ ($CF_i, CF_j \in CF_{0e}$, $\{CF_i, CF_j\} \in CF_{0e \text{ coplanar}}$) について、 $CB + CF_i + CF_j \leq 2$

ここで、 $CF_{0e \text{ coplanar}} = \{\{CB_i, CB_j\} \mid CB_i \text{ と } CB_j \text{ は coplanar}\}$
 $CF_{0e \text{ coplanar}} = \{\{CF_i, CF_j\} \mid CF_i \text{ と } CF_j \text{ は coplanar}\}$

8.4 例題による検討 図18の虚を含む物体要素群に(a'-1), (a'-2)の式を適用する。

$$(a'-1), (a'-2) \text{ はそれぞれ } 3v_1 \leq e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \leq 5v_1 + 2\sqrt{v_1} \cdot e_1 + e_4 + 2\sqrt{v_1} \cdot e_2 \cdot e_5 \quad (8.1)$$

$$\sqrt{v_1} \cdot e_1 \cdot e_4 + \sqrt{v_1} \cdot e_2 \cdot e_5 \leq 1 \quad (8.2)$$

となる。頂点 $v_1=1$ (真) となるとき、(8.1) は

$$3 \leq e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \leq 5 \quad (8.3)$$

となり、このとき、 v_1 に接続する稜線 $e_1 \sim e_5$ のうち3つ以上が1 (真) であるとなる。(8.2) は $0 \leq 1$ となり何の意味も示さない。

頂点 $v_1=0$ (虚) となるとき、(8.1), (8.2) はそれぞれ

$$0 \leq e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \leq 5 + 2e_1 \cdot e_4 + 2e_2 \cdot e_5 \quad (8.4)$$

$$e_1 \cdot e_4 + e_2 \cdot e_5 \leq 1 \quad (8.5)$$

となる。このとき、(8.4) より、

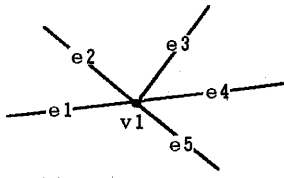


図18 虚を含む物体要素群

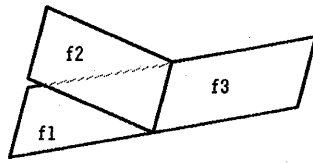


図19 虚を含む物体要素群



図20

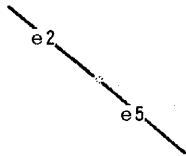


図21

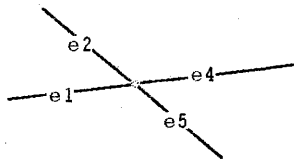


図23

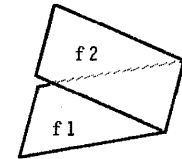


図22

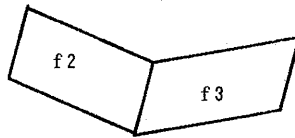


図24

$e_1=e_2=e_3=e_4=e_5=0$ (全ての稜線が虚である)
 $e_1=e_4=1, e_2=e_3=e_5=0$ (colinearな2稜線 e_1, e_4 が真である: 図20)
 $e_2=e_5=1, e_1=e_3=e_4=0$ (colinearな2稜線 e_2, e_5 が真である: 図21)
 $e_1=e_2=e_4=e_5=1, e_3=0$ (2組みのcolinearな2稜線 e_2, e_5 と e_1, e_4 が真である: 図23)となる。(8.5)は $e_1=e_2=e_4=e_5=1$ というように2組み以上のcolinearな2稜線が真となるような解を排除するものである。

次に、図19の虚を含む物体要素群に(d'-1), (d'-2), (d'-3)の式を適用する。(d'-1), (d'-2), (d'-3)はそれぞれ $f_1+f_2+f_3=2e_1+2e_2+2e_3$ (8.6)

$$e_1 \cdot f_1 \cdot f_3 \leq 1 \quad (8.7)$$

$$e_1+f_1+f_3 \leq 2 \quad (8.8) \text{となる。}$$

稜線 $e_1=1$ (真) となるとき、(8.6), (8.7), (8.8)はそれぞれ

$$2e_1=f_1+f_2+f_3 \quad (8.9) \quad 0 \leq 1 \quad (8.10) \quad 1+f_1+f_3 \leq 2 \quad (8.11)$$

となる。このとき、(8.9)より、 e_1 に接続する面 $f_1 \sim f_3$ のうち2つが1 (真) であるとなる。(8.11)は、その際に、coplanarな2面 f_1, f_3 を選ぶことはできないということを示している(図22)。(8.10)は、ここでは何の意味も示さない。

稜線 $e_1=0$ (虚) となるとき、(8.6), (8.7), (8.8)はそれぞれ

$$2f_1 \cdot f_3 = f_1+f_2+f_3 \quad (8.12)$$

$$f_1 \cdot f_3 \leq 1 \quad (8.13)$$

$$f_1+f_3 \leq 2 \quad (8.14) \text{となる。}$$

これを解くと

$$f_1=f_2=f_3=0 \text{ (全ての面が虚である)}$$

$$f_1=f_3=1, f_2=0 \text{ (coplanarな2面} f_1, f_3 \text{が真である: 図24) となる。}$$

以上のように式(d'-1), (d'-2), (d'-3)は規則(d')を表現し、式(a

'-1), (a'-2)は規則(a')を表現している。

例題

図12の例に対して単純合成後の物体を図25に示す。

$$\text{By } (a'-1), 3v1 \leq e1+e2+e3+e4 \leq 4v1+2v1$$

$$e1 \cdot e4+2v1 \cdot e2 \cdot e3, \dots, 3v11 \leq e7+e10+e20+e22+e24 \leq 5v11.$$

$$\text{By } (a'-2), \quad \nabla 1 \cdot e1 \cdot e4+\nabla 1 \cdot e2 \cdot e3 \leq 1, \dots$$

$$\dots, \nabla 2 \cdot e5 \cdot e8+\nabla 2 \cdot e6 \cdot e7 \leq 1.$$

$$\text{By } (d'-1), \quad 2e1=f1+f2+f3+2e1 \cdot f1 \cdot f2, \dots$$

$$\dots, 2e24=f7+f14+f20.$$

$$\text{By } (d'-2), \quad e1 \cdot f1 \cdot f2 \leq 1, \dots$$

$$\dots, e8 \cdot f5 \cdot f9+e8 \cdot f10 \cdot f12 \leq 1,$$

$$\text{By } (d'-3), \quad e1+f1+f2 \leq 2, \dots, e8+$$

$$f10+f12 \leq 2.$$

$$\text{By } (g), \quad \text{nothing.}$$

$$\text{By } (h), \quad f3+f5 \leq 1, \quad f9+f11 \leq 1.$$

$$\text{By } (i) \text{ for front view, } v3+v5 \geq 1, \dots, v8+v11 \geq 1.$$

$$\text{By } (j) \text{ for front view, } e1+e2+e11+e15 \geq 1, \dots, e5+e6+e18+e24 \geq 1.$$

$$\text{By } (i) \text{ for top view, } \dots \text{By } (j) \text{ for top view, } \dots \text{By } (i) \text{ for side view, } \dots$$

$$\text{By } (j) \text{ for side view, } \dots$$

以上を連立して解けば、図26の5解が得られる。

9 課題と結論

線形擬イプル代数解法による三面図からの物体合成の手順を示し、成り立ち規則式(a)~(f), 三面図との対応の式(g), (h), 多面体規則式(i), (j)の各式の意味や、この解法の問題点を明らかにした。非線形擬イプル代数解法の導入により、この問題点の多くは解決されたが、次のような課題が残されている。

9.1 破線情報の加味 現在の擬イプル代数解法では、三面図破線が実線であるか、破線であるかの情報は加味していないので、

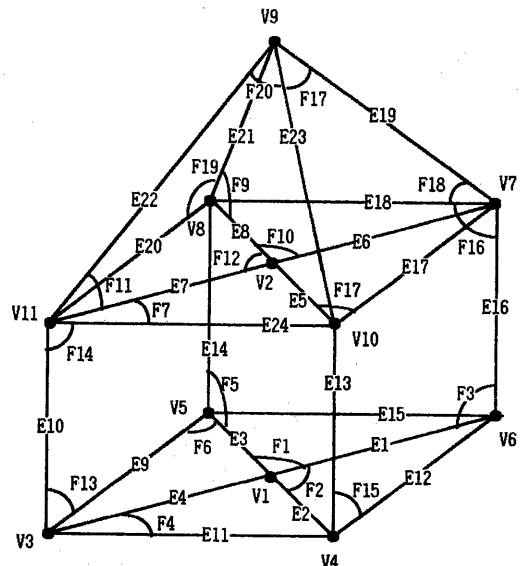


図25 虚物体要素を含むサーフィスマデル

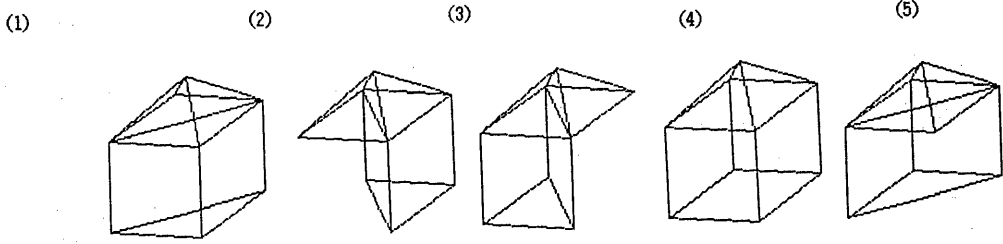


図26 非線形擬似ブール代数解法により得られる解

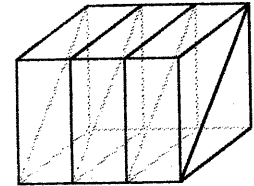
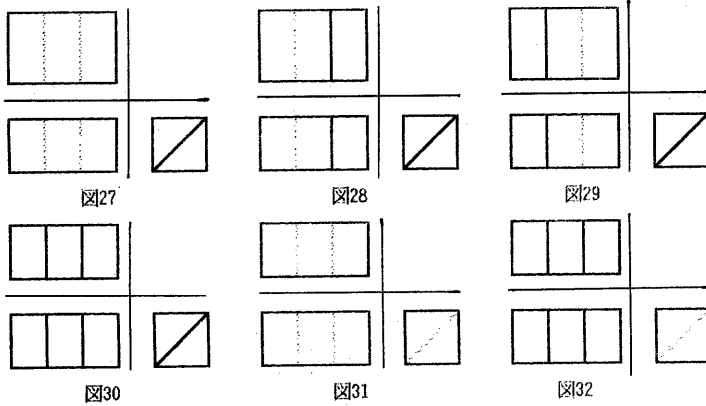


図33 虚物体要素を含むサーフィスマデル

図27~図32の三面図を区別することはできず、すべての三面図に対して、解は図34のようになる。三面図の実線・破線情報を加味することを検討している。

9.2 あいまいさの多い三面図 例えば、図12の三面図において、図26の5解が求まる。それぞれが真のサーフィスマデルの成

り立ち規則を満たし、三面図にも合致しているが、人間は解(4)の物体を想像しがちである。ひとつの三面図に対して複数の解が得られるとき、どの解を人間が最も考え易いかを評価をすることも必要である。または、解を一意とするために、断面図、副投影図などをいかに利用するかを検討することも必要である。

なお本稿で述べた手法はCでインプリメントした。
 参考文献 [HAM68] Hammer, P.L. et al., Boolean Methods in Operations Research, Springer-Verlag, New York, (1968).
 [ISH85a] 石川雅朗, 宮路照久, 藤生崇則, 伊藤潔, 松本直文, 鈴木誠道: 三面図入力による図面からの物体自動合成のための三手法, 情報処理学会コンピュータビジョン研究会, (July 1985), 37-3.
 [ISH85a] 石川雅朗, 藤生崇則, 伊藤潔, 松本直文, 鈴木誠道: サーフィスマデルの真物体要素結合による三面図からのソリッド自動合成法, 第16回画像工学コンファレンス講演論文集, (December 1985), 3-10.
 [MAR81] Markowsky, M.A. et al., Fleshing Out Projections, IBM J. Res. Develop, 25.6, (Nov. 1981), 934-954.

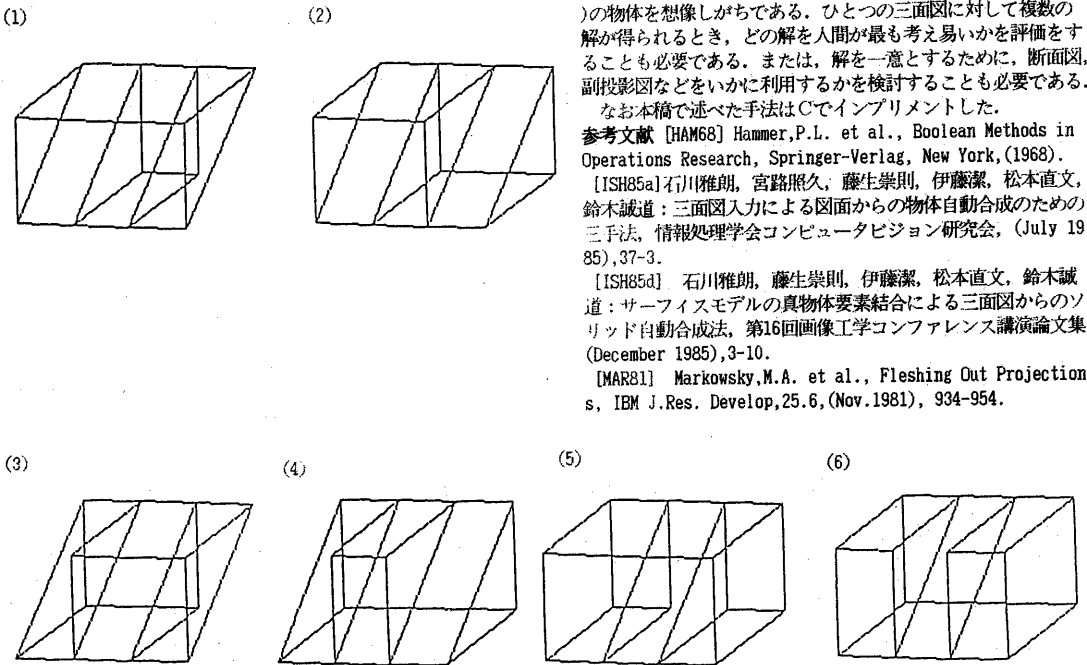


図34 非線形擬似ブール代数解法により得られる解