

## 可変スリット法とハフ変換の関係

中島重義      長尾真

京都大学工学部

我々は、可変スリット法という画像処理手法を開発したが、この手法とハフ変換との間に興味深い関係があることを発見した。

ハフ変換は1962年にP. V. C. ハフが提案したもので、画像中の直線を抽出するものである。このために、実平面の画像上の画素の値を、ハフ平面と呼ばれる空間へと変換する。この変換で、点は正弦曲線に変化する。

可変スリット法では、実平面上におかれたウィンドウの中の画素値をある方向に足し合わせ、射影値を算出する。このハフ変換の変換式と、射影値の算出式が互いに同じであることが明らかになった。

The relation between variable slit method and Hough transformation

Shigeyoshi NAKAJIMA      Makoto NAGAO

Department of Electric Engineering, Kyoto University

Yoshidahon-machi, Sakyo-ku, Kyoto-city, 606 Japan

We found an interesting relation between the variable slit method we have developed, and Hough transformation.

Hough transformation, proposed by P.V.C. Hough in 1962, is used to extract straight lines in an image. For this purpose the value of a pixel in an image on a real plane is transformed into a sine curve in the space called Hough plane.

In the variable slit method, a projection curve is obtained as a result of summation of values of pixels at a certain direction in a window, which is on the real plane. We made it clear that the equation of Hough transformation and the equation of a projection curve of slit method are equal.

## 1. まえがき

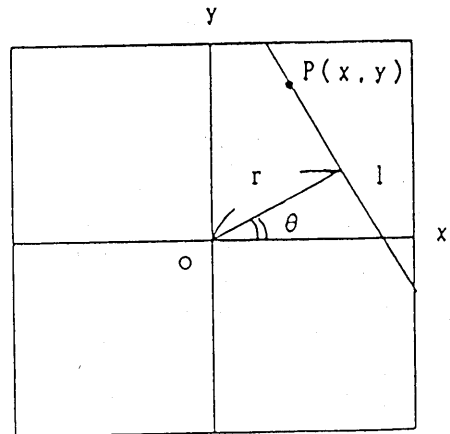
著者らは先に可変スリット法による画像処理について論文[1][2]を発表しているが、この可変スリット法による直線線分の抽出法は簡単な考え方、方法によってすぐれた効果を発揮することがわかって

いる。ここでは、この可変スリット法による直線抽出の方法がハフ変換[3]による直線の抽出との間に面白い関係のあることを発見した。

## 2. ハフ変換

図1に示すように、直線  $l$  上の点は

$$x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta = r \quad (2-1)$$



という関係にある。ここに  $r$ 、 $\theta$  は図1に 図1

示すように原点  $O$  から直線  $l$  におろした垂線の長さ、それが  $x$  軸とのなす角度である。この式を  $(r, \theta)$  平面上にプロットすると一本の  $\sin$  曲線になる。

直線  $l$  上に2点  $P_0(x_0, y_0)$ 、 $P_1(x_1, y_1)$  をとり、(2-1) 式の曲線を  $(r, \theta)$  平面上で描くと

2点で交わる。この点  $(r_0, \theta_0)$ 、

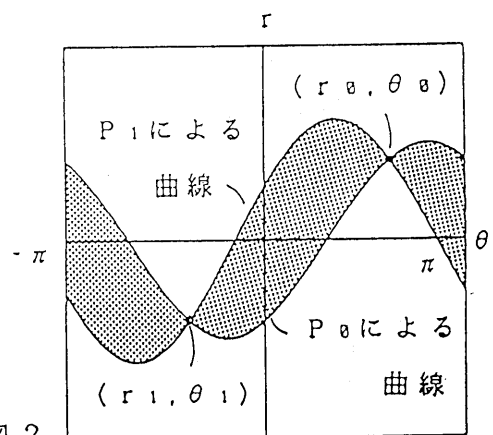
$(r_1, \theta_1)$  の間には図2に示す

ように、

$$r_1 = -r_0 \quad (2-2)$$

$$\theta_1 = \theta_0 - \pi \quad (2-3)$$

という関係が存在する。さらに直線上の点  $P_0$ 、 $P_1$  の間にある点  $P_2$  が描く 図2



(2-1) 式の曲線は図2の網目を施した領域即ち点  $P_0$  と  $P_1$  とで作られる曲線がかこまれる領域の中に存在する。また点  $P$  の値が  $k$  であったとすると、これが

( $r, \theta$ ) 平面上に変換されたとき、その曲線の各点のもつ値は  $k$  であると約束する。

画像  $x-y$  平面上の関数  $f(x, y)$  が、 $r-\theta$  平面上の関数  $F(r, \theta)$  に変換されることを考えよう。点  $(x, y)$  の画素値が  $k$  であったときにこの点に対して  $r-\theta$  平面上に得られる成分は  $z$  は

$$\begin{aligned} z &= k \cdot \delta(r - (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta)) \, dx \, dy \\ &= f(x, y) \cdot \delta(r - (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta)) \, dx \, dy \end{aligned} \quad (2-4)$$

である。ここで  $\delta$  は Dirac の  $\delta$  関数であり、その特徴として、任意の連続関数  $\phi(x)$  に対して次の性質を持つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \cdot \delta(x-x') \, dx = \phi(x') \quad (2-5)$$

そうすると、

$$F(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \delta(r - (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta)) \, dx \, dy \quad (2-6)$$

となる。

### 3. 可変スリット法

可変スリット法は図3に示すように  $x$  軸に対して任意の角度  $\theta$  におかれた矩形の中に存在する濃淡値  $f(x, y)$  を矩形の辺  $v, u$  に平行な直線にそって積分して得られる曲線  $g(u), h(v)$  から、その矩形の中にどのような形状が存在するかを推定しようとするものである。この場合の関数  $g(u), h(v)$  について考えよう。 $g(u)$  は図3のように  $u$  を固定したとき、 $v$  にそって  $f(x, y)$  を積分したものである。

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dv \quad (3-1)$$

( $x, y$ ) と ( $u, v$ ) との変換式は図3に従えば、

$$\begin{aligned} u &= x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta \\ v &= -x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta \\ x &= u \cdot \cos \theta - v \cdot \sin \theta \\ y &= u \cdot \sin \theta + v \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (3-2)$$

となるから、次の式が成立する。

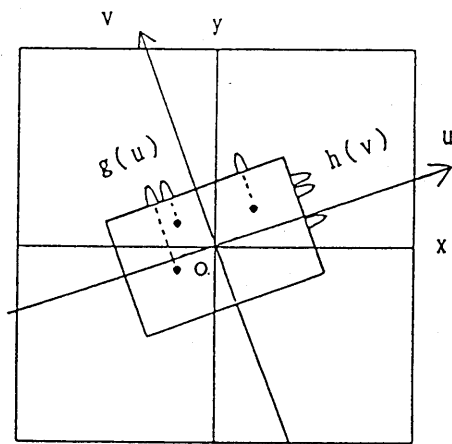


図 3

$$f(x,y)=f(u\cdot\cos\theta-v\cdot\sin\theta,u\cdot\sin\theta+v\cdot\cos\theta) \quad (3-3)$$

よって  $g(u)$  は次のようになる。

$$g(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(u\cdot\cos\theta-v\cdot\sin\theta,u\cdot\sin\theta+v\cdot\cos\theta) dv \quad (3-4)$$

となる。この (3-4) 式と (2-6) 式が等価であることを以下に示す。

(2-6) 式の積分変数を  $x, y$  から  $u, v$  に変換しよう。

$$\begin{aligned} F(r,\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot \delta(r-(x\cdot\cos\theta+y\cdot\sin\theta)) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u\cdot\cos\theta-v\cdot\sin\theta,u\cdot\sin\theta+v\cdot\cos\theta) \\ &\quad \cdot \delta(r-u) \cdot J du dv \end{aligned} \quad (3-5)$$

ここで  $J$  はヤコビアンで、これを (3-2) の変換式により計算すると、

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos\theta \cdot \cos\theta + \sin\theta \cdot \sin\theta = 1 \quad (3-6)$$

となる。ここで (3-5) 式の  $v$  による積分の部分を  $G$  ととすると、次の式が成立する。

$$\begin{aligned} G &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u\cdot\cos\theta-v\cdot\sin\theta,u\cdot\sin\theta+v\cdot\cos\theta) \cdot \delta(r-u) \cdot J du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u\cdot\cos\theta-v\cdot\sin\theta,u\cdot\sin\theta+v\cdot\cos\theta) \cdot \delta(r-u) du \\ &= f(r\cdot\cos\theta-v\cdot\sin\theta,r\cdot\sin\theta+v\cdot\cos\theta) \end{aligned} \quad (3-7)$$

よって、

$$F(r,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r\cdot\cos\theta-v\cdot\sin\theta,r\cdot\sin\theta+v\cdot\cos\theta) dv \quad (3-8)$$

この (3-8) 式と (3-4) 式を比べてみると、(3-4) 式で  $u=r$  とおいたときに  $g(u)$  は  $F(r,\theta)$  と一致することがわかる。これは図4に示す関係である。即ち、角度  $\theta$  のスリットから得られるスリット曲線はハフ平面上での  $\theta$  における断面の曲線と同一であることがわかった。

したがって、対象図形を内部に含む十分な大きさのスリットの  $u, v$  方向 (角度  $\theta$ ) の射影出力波形 (スリット曲線) をハフ平面上の  $\theta$  および  $\theta - \pi/2$  の位置に与えるという操作を、 $\theta = 0$  から  $\pi/2$  及び  $\pi$  から  $3\pi/2$  まで変化させて行えばハフ変換の結果と同じ物が得られることがわかる。

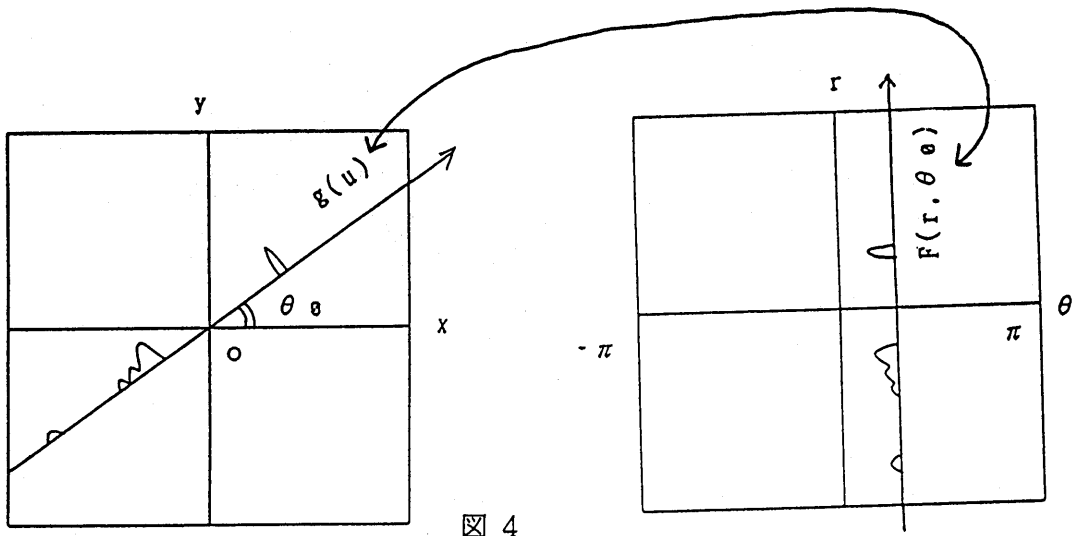


図 4

#### 4. 直線の長さ

図 5 に示す直線線分  $PQ$  の位置と長さは、スリットを種々の角度で設定し、その  $u$ 、 $v$  方向 (図 3 参照) のスリット出力をみて、一方のスリット曲線が最も鋭い出力を示し、他方のスリット曲線は最も平坦で、その巾が広いというスリット方向を探し出すことによって求めることができる。その時の平坦なスリット曲線の巾が直線  $PQ$  の長さである。

これをハフ空間で考えてみよう。ハフ平面上では直線  $PQ$  の各点に対応する曲線は総て図 6 に示すように点  $P$ 、 $Q$  に対応する二つの曲線の間にはいる。そして二つの集積点が得られる。この点  $(r, \theta)$  が直線  $PQ$  に対応する。この点を通る  $\theta = \text{const.}$  の直線  $L_1$  上の  $F(r, \theta = \text{const.})$  は、3. で述べたことからスリット法における  $u$  軸上のスリット曲線の形と一致する。この  $(r, \theta)$  平面上の集積点は  $u$  軸上のスリット曲線での最も鋭い出力ピークに対応する。従ってスリット法での  $v$  軸上のスリット曲線は  $(r, \theta)$  軸上の  $L_1$  から  $\pi/2$  ずれた位置における  $\theta = \text{const.}$  の直線  $L_2$  上の出力と一致する。即ち  $L_2$  の位置では曲線  $C_p$  と  $C_q$  とではさまれる  $r$  軸方向の巾が最大となっていて、これが直線  $PQ$  の長さとも一致するわけである。任意の角度  $\theta$  にスリットをおいた時に得られるスリット曲線がハフ平面上の  $\theta$ 、 $\theta - \pi/2$  における  $r$  軸方向の断面での曲線と一致することはいうまでもない。

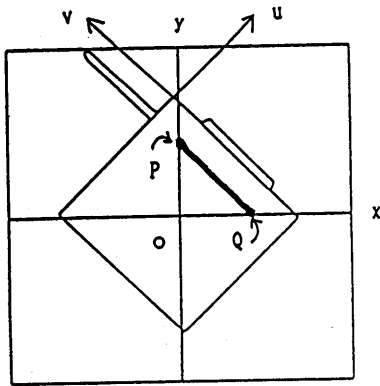


図 5

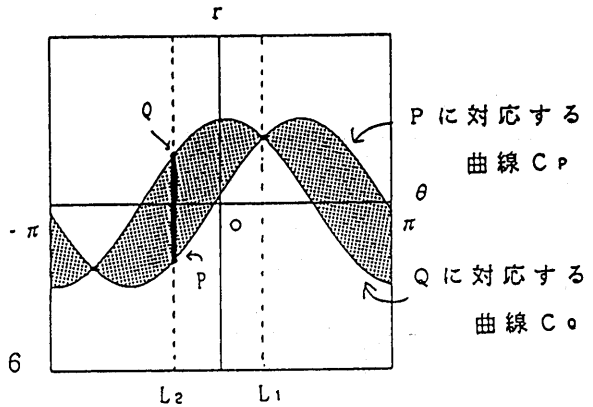


図 6

## 5. むすび

我々が開発したスリット法は、任意の大きさ、サンプルピッチ、位置、角度でハードウェア的にスリットをおくことが出来るので、スリット曲線は高速に得られるという利点がある。さらにある角度でおいたスリットから得られる曲線の形状から（この曲線形状パラメータもハードウェアで得られる）、次にスリットをおくべき角度・位置を推定することが出来るので、ある特徴を検出するためにおくべきスリットの最適位置はかなり早く求めることが出来る。ハフ変換の場合は膨大な計算を伴うが、スリット法ではそれがなく、実平面上で容易に結果がえられるという利点がある。

## 参考文献

- [1] 長尾 真 「試行錯誤的形狀認識方式とそのハードウェア化」  
信学論 '85/4 vol.J68-D No.4 P.442-448
- [2] Makoto Nagao, Shigeyoshi Nakajima "Shape Recognition System by Variable Size Slit Method -Its Hardware and Software-"  
Proc. ICPR, '86, Paris
- [3] 長尾 真 「画像認識論」 コロナ社 P.72-73