

弾性体モデルを用いた図形の変形方法

志 沢 雅 彦 鈴 木 智

NTTヒューマンインタフェース研究所

図形を弾性体モデルを用いて変形する方法を提案する。この方法によれば、部分図形ごとに異なる弾性係数を与えることができるので、大きな変形を許容する部分図形と変形を小さく抑える部分図形を指定して変形することが可能である。まず、図形を3角形領域分割する。次に、各3角形に対して、それが属する図形に意味に応じた弾性係数を設定する。最後に、有限要素法による変形解析を用いて変位を計算し、図形の変形をおこなう。応用例として、提案した方法が地図の重ね合せに有効であることを示す。

A Picture Transformation Method Using Elastic Body Model

Masahiko SHIZAWA and Satoshi SUZUKI

NTT Human Interface Laboratories
1-2356, Take, Yokosuka, Kanagawa, 238-03, Japan

This paper proposes a picture transformation method using *elastic body model*. Using this method, we can assign various elastic constants to each subpicture. This flexibility enables us to transform pictures with non-uniformity. First, the pictures are tessellated into triangles. Then, elastic constants are assigned to each triangle based on the attribute of the subpicture containing it. Next, displacement vectors of nodes of triangles are calculated using *finite element method*. Finally, the displacement vectors are added into original coordinates of the nodes. Experimental results show the method is useful for the overlay of two geographical maps of the same region.

1. はじめに

図形処理や画像処理では、図形（あるいは領域）に連続かつ非線形な変換を施す必要がしばしば生ずる(1)、(2)。この様な場合、通常は、多項式や有理式を用いた座標変換、あるいは、それらを区分的に線形近似したものなどが使われる。しかし、これらの方法は、画像を一樣に変換する方法であるために、部分図形ごとに異なる変形率を与えることができない。そこで、本論文では、図形を、その部分図形ごとに異なる弾性パラメータを持った弾性体とみなし、有限要素法による変形解析の方法を用いて、図形内の各点の変形量を求め、図形全体の変形を行う方法を提案する。

例として、市街地図の処理において、各街区の変形を行い、他の地図の該当する街区に街区境界線が完全に重なる様に重ね合わせる処理を考える(図1)。このとき、街区内部に存在する図形を変形しなければ、街区からはみ出るなどの不都合が生じる。これをさけるためには、街区の境界点の対応から適当な座標変換式を求め、この座標変換式によって、街区内部の図形を変形することが考えられる。ところが、この方法では、建物の様に、街区内部の図形の中でずれ変形が生ずると不自然になる様な図形についても一樣な変形が行われてしまう。

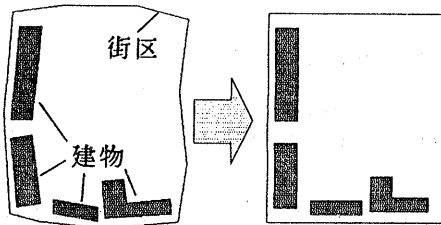


図1 街区図形の変形

本論文で提案する方法では、この様な場合に、建物に与える弾性パラメータを、ずれ変形が起こりにくくなるように設定できる。これにより、建物のずれ変形は、図形の他の部分に比較して小さくなる。

以下、まず、弾性体モデルと有限要素法について簡単に説明し、次に、図形の変形に適用する場合の境界条件の与え方を説明する。さらに、市街地図の街区の変形例により、本方法の有効性を示す。

2. 弾性体の変形モデル

図2は、2次元弾性体Rの変形をようすを図示した

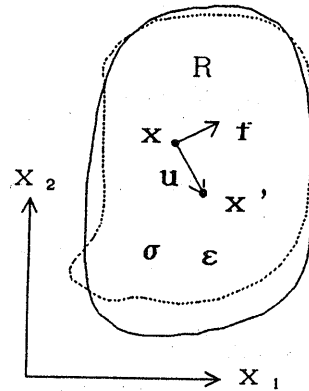


図2 弾性体の力学

ものである。静的な弾性体の力学では、①弾性体内部の材料定数、②弾性体の幾何学的構造、③力学的、幾何学的境界条件から、弾性体内部および境界における変位あるいは、応力を求める。一般に、弾性体についての解析には、変形体の各点の応力を解析する場合と変位を解析する場合がある。ここでは、図形の各点の変位を求めるのが目的であるので、変位解析(3)、(4)にもとづいて説明する。

図2の様に直交座標系 x_1, x_2 をとる。点 $x = (x_1, x_2)$ における応力テンソル、歪テンソルをそれぞれ、

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$

とおく。これらは対称テンソルでなければならないので、 $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ 、 $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$ である。また、点 x における変位を $u = (u_1, u_2)^T$ とおく。以下、変位は十分小さいと仮定する。すると、変位成分 u_1, u_2 と歪成分 $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}$ の間には、次の関係がある。

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \partial_1 u_1, & \epsilon_{22} &= \partial_2 u_2, \\ \epsilon_{12} &= (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1)/2 \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 ∂_1 は x_1 についての偏微分演算である。

応力および歪の幾何学的意味を図3に示す。 σ_{11} 、 σ_{22} は、それぞれ、微小矩形にかかる x_1 軸、 x_2 軸方向の応力であり(図3(a))、 σ_{12} は微小矩形にかかるせ

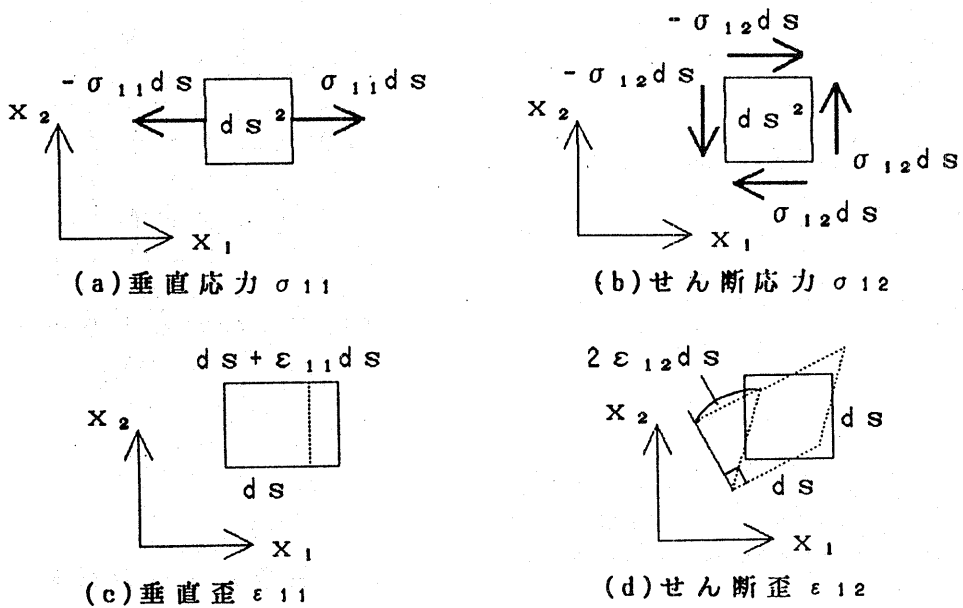


図 3 応力と歪の幾何学的意味

せん断応力である(図3(b)). ϵ_{11} , ϵ_{22} は、それぞれ、 x_1 軸, x_2 軸方向の伸びを表し(図3(c)), ϵ_{12} は、せん断変形を表す(図3(d)).

応力 σ と歪 ϵ の間にはHookeの法則が成り立つと仮定する。すなわち、

$$\sigma_{ij} = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 C_{ijpq} \epsilon_{pq} \quad (3)$$

ここで、 C_{ijpq} は弾性係数と呼ばれる4階のテンソルであり $2^4 = 16$ 個の成分を持つ。しかし、添字 i, j , および p, q に関する対称性から、 C_{ijpq} の独立な成分は9個である。以下では、簡単のため、弾性体Rは等方的、すなわち、すべての方向に対して弾性的な性質が同一であると仮定する。このとき、 C_{ijpq} の成分は、座標系の方向によらない定数となり、Laméの定数と呼ばれる2つのパラメータ λ, μ によって次のように表されることが知られている。

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = \lambda + 2\mu, \\ C_{1122} &= C_{2211} = \lambda, \\ C_{1212} &= C_{1221} = C_{2112} = C_{2121} = 2\mu \end{aligned} \quad (4)$$

この他の成分は0である。一般に、これらのパラメータ λ, μ は弾性体内の位置によって変化させることができる。

ところで、弾性体R全体の歪エネルギーは次式となる。

$$\begin{aligned} \Pi &= (1/2) \int_R (\sigma_{11} \epsilon_{11} + \sigma_{22} \epsilon_{22} + 2 \sigma_{12} \epsilon_{12}) dS \\ &= (1/2) \int_R \hat{\sigma}^T \hat{\epsilon} dS \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad \hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (6)$$

と書くことにする。また、 $dS = dx_1 dx_2$ 。

このとき、Laméの定数 λ, μ を用いると $\hat{\sigma}$ と $\hat{\epsilon}$ の関係は次のようになる。

$$\hat{\sigma} = D \hat{\epsilon} \quad (7)$$

ただし、

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (8)$$

したがって、歪エネルギー Π は次の様になる。

$$\Pi = (1/2) \int_R \hat{\epsilon}^T D \hat{\epsilon} dS \quad (9)$$

これから外力のする仕事を引いたものが、この系のポテンシャルエネルギーである。すなわち、

$$\Pi^*(u) = (1/2) \int_R \hat{\epsilon}^T D \hat{\epsilon} dS - \int_R u^T d f \quad (10)$$

ただし、 $d f = (d f_1, d f_2)^T$ は、微小面積にかかる外力である。この汎関数 Π^* を最小にする様な変位 u の分布を求めることが、弾性体の静的な変位解析の目的である。

3. 有限要素法と図形処理への適用

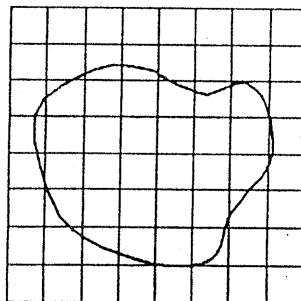
次に、図形・画像の変形処理への適用について考察する。

式(10)を最小にする変位ベクトル場 u を一般の場合に解析的に求めることはできないので、近似解法が使われる。近似解法には、その近似法によって分類すると、差分法と有限要素法をあげることができる(図4参照)。差分近似は、格子で領域を近似するので、図形の境界における条件を与えにくいばかりでなく要素数が大きくなって、弛緩法などの近似解法を使う必要が生じる(図4(a))。一方、図形は境界を線分で近似して扱うことができる。すなわち、図形の境界が任意の方向を向いた線分で表現されているので、領域を3角形領域で近似する有限要素法をもちいれば、領域の境界の各ベクトルが3角形領域の辺になるような近似を行うことが可能である。したがって、差分法に比較して少ない要素分割数で領域の近似を行うことができる⁽⁵⁾、⁽⁶⁾(図4(b))。

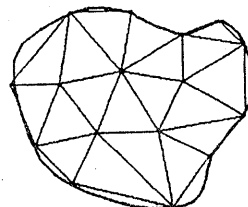
以下、3.1と3.2において、式(10)を最小化する変位場 u を有限要素法によって求める方法⁽⁴⁾を簡単に説明し、3.3において、図形の変形処理へ適用する方法を明らかにする。

3.1 3角形要素の近似

この節では、1つの3角形要素 T_h (h は要素番号)に



(a) 差分法の領域近似



(b) 有限要素法の領域近似

図4 差分法と有限要素法

についてのみ考える。まず、各3角形要素ごとに、変位の区分的線形近似を行う。すなわち、

$$u = A x + b \quad (11)$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_a \\ b_b \end{bmatrix} \quad (12)$$

であり、成分はすべて定数である。

ここで、式(2)を使うと、これらの係数と歪成分の間には次の関係があることがわかる。

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \epsilon_{11}, & \alpha_{22} &= \epsilon_{22}, \\ \alpha_{12} + \alpha_{21} &= 2\epsilon_{12} \end{aligned} \quad (13)$$

したがって、式(6)から、

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} + \alpha_{21} \end{bmatrix} \quad (14)$$

3角形の左まわりに見た3頂点(節点)の座標をそ

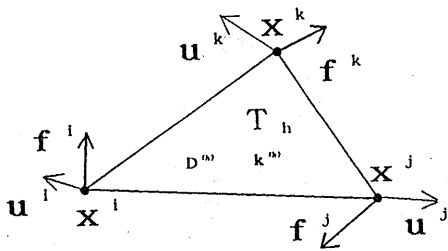


図5 3角形要素の変形

それぞれ、

$$x^i = \begin{bmatrix} x^i_1 \\ x^i_2 \end{bmatrix}, x^j = \begin{bmatrix} x^j_1 \\ x^j_2 \end{bmatrix}, x^k = \begin{bmatrix} x^k_1 \\ x^k_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

とする(図5参照)。ここで右肩の数字は頂点番号を表す。同様に、各頂点における変位ベクトルを、

$$u^i = \begin{bmatrix} u^i_1 \\ u^i_2 \end{bmatrix}, u^j = \begin{bmatrix} u^j_1 \\ u^j_2 \end{bmatrix}, u^k = \begin{bmatrix} u^k_1 \\ u^k_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

とする。このとき、式(11)より、

$$\begin{aligned} u^i &= A x^i + b, \\ u^j &= A x^j + b, \\ u^k &= A x^k + b \end{aligned} \quad (17)$$

これからAを解くと、

$$A = [u^i - u^j, u^i - u^k] [x^i - x^j, x^i - x^k]^{-1} \quad (18)$$

これと、式(13)より、3角形 T_h 内部の歪 $\hat{\epsilon}^{(h)}$ は、変位ベクトル u^i, u^j, u^k によって次の様に表すことができる。

$$\hat{\epsilon}^{(h)} = B^i u^i + B^j u^j + B^k u^k \quad (19)$$

ここで、

$$\Delta^{(h)} = |x^i - x^j, x^i - x^k| \quad (20)$$

$$B^i = \begin{bmatrix} x^j_2 - x^k_2 & 0 \\ 0 & x^k_1 - x^j_1 \\ x^k_1 - x^j_1 & x^j_2 - x^k_2 \end{bmatrix} / \Delta^{(h)},$$

$$B^j = \begin{bmatrix} x^k_2 - x^i_2 & 0 \\ 0 & x^i_1 - x^k_1 \\ x^i_1 - x^k_1 & x^k_2 - x^i_2 \end{bmatrix} / \Delta^{(h)},$$

$$B^k = \begin{bmatrix} x^i_2 - x^j_2 & 0 \\ 0 & x^j_1 - x^i_1 \\ x^j_1 - x^i_1 & x^i_2 - x^j_2 \end{bmatrix} / \Delta^{(h)} \quad (21)$$

式(19)を次の様に書く、

$$\hat{\epsilon}^{(h)} = B^{(h)} u^{(h)} \quad (22)$$

ただし、

$$B^{(h)} = [B^i, B^j, B^k] \quad (23)$$

および、

$$u^{(h)} = \begin{bmatrix} u^i \\ u^j \\ u^k \end{bmatrix} \quad (24)$$

式(22)によって3角形領域 T_h だけについて式(10)を近似すると、

$$\Pi^{(h)} = (1/2) u^{(h)T} k^{(h)} u^{(h)} - u^{(h)T} f^{(h)} \quad (25)$$

ここで、

$$\begin{aligned} k^{(h)} &= \int_{T_h} B^{(h)T} D^{(h)} B^{(h)} dS \\ &= B^{(h)T} D^{(h)} B^{(h)} \Delta^{(h)} \end{aligned} \quad (26)$$

$$f^{(h)} = \begin{bmatrix} f^i \\ f^j \\ f^k \end{bmatrix} \quad (27)$$

となる。 $k^{(h)}$ は要素剛性マトリクスと呼ばれているものであり、 $f^{(h)}$ は、3角形 T_h の節点にかかる力 f^i, f^j, f^k を並べた節点力ベクトルである。

3.2 全体剛性方程式

次に、全体の連立方程式を作る。全節点の個数を N_a として、 $2N_a \times 2N_a$ の行列 K を同じ節点同士に値を重ね合わせる事によって $k^{(h)}$ からつくる。また、 $2N_a \times 1$ のベクトル F を $f^{(h)}$ も同様に重ね合わせる事によってつくる。すると、弾性体 R 全体の近似ポテンシャルエネルギーは、

$$\Pi = (1/2)U^T K U - U^T F \quad (28)$$

この式を停留させるには、ベクトル U の各成分について偏微分したものを 0 とおく。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U} = K U - F = 0 \quad (29)$$

すなわち、次の、全体剛性方程式を得る。

$$K U = F \quad (30)$$

このままでは、境界条件を与えていないので行列 K は特異行列である。

3.3 境界条件

次に、図形の変形に用いることを考慮した境界条件について考察する。図形の変形という目的では、与える境界条件は、変形を制御する制御点の変位で、求めるものは図形の各部分における変位量である。図6に示した様に、各節点を、与える条件に応じて3通りに分類する。

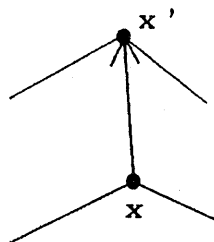
(a) **自由節点**：何らの拘束条件もない節点で、この節点のとりうる自由度は2である。この節点の個数を N_f とする (図6(c))。

(b) **点拘束節点**：移動先として点が指定された節点で、自由度は0。この節点の個数を N_p とする (図6(a))。

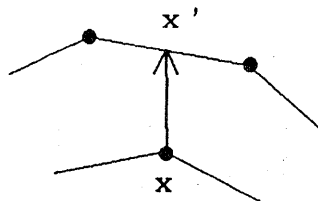
(c) **線拘束節点**：移動先として線が指定された節点で、自由度は1。この節点の個数を N_l とする (図6(b))。

なお、幾何学的境界条件は、必ずしも図形の境界で与えられる必要はなく、点拘束節点や線拘束節点が図形内部の節点であってもかまわない。

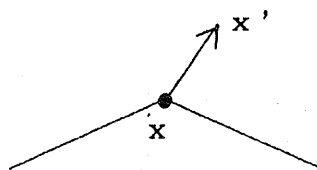
以下では、式(30)を変形して、境界条件を与え、最



(a) 点拘束節点の変位



(b) 線拘束節点の変位



(c) 自由節点の変位

図6 3種類の境界条件

最終的に解くべき連立1次方程式を導く。

上記の節点の分類にもとずいて、行列 K の行と列、ベクトル U 、 F の行を入れ替えて、次の様に変形する。

$$\begin{bmatrix} K_{FF} & K_{FL} & K_{FP} \\ K_{LF} & K_{LL} & K_{LP} \\ K_{PF} & K_{PL} & K_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_F \\ U_L \\ U_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_F \\ F_L \\ F_P \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここで、例えば、 K_{FL} は、自由節点の節点番号に対応する行番号および線拘束節点の節点番号に対応する列番号を持つ行列 K の成分を集めた行列である。 U_F 、 U_L 、 U_P は、それぞれ、自由節点、線拘束節点、点拘束節点の節点変位の成分を並べたベクトルである。また、 F_F 、 F_L 、 F_P は、同様に、節点力の成分を並べたベクトルである。

式(31)を展開して、

$$K_{FF} U_F + K_{FL} U_L + K_{FP} U_P = F_F \quad (32)$$

$$K_{LF} U_F + K_{LL} U_L + K_{LP} U_P = F_L \quad (33)$$

$$K_{PF} U_F + K_{PL} U_L + K_{PP} U_P = F_P \quad (34)$$

以下、点拘束節点、線拘束節点に関する条件 [1]、[2]、[3] を列挙する。

[1] 点拘束節点の変位についての条件

点拘束節点の変位は既知であるから、

$$U_P = X_P' - X_P \quad (35)$$

ここで、 X_P 、 X_P' は点拘束節点についての、それぞれ変形前の節点座標、変形後の節点座標を並べた既知ベクトルである。

[2] 線拘束節点の変位についての条件

線拘束節点が、変形後に与えられた直線上に乗る条件から、

$$N(U_L + X_L - P) = 0 \quad (36)$$

ここで、 X_L は、変形前の線拘束節点の座標を並べた既知ベクトルであり、 P は、線拘束節点の移動先の直線上の1点の座標を並べた既知ベクトルである。 N は、線拘束節点の移動先の直線の法線ベクトルの成分を対角線上に並べた $N_L \times 2N_L$ のマトリクスである。

$$N = \begin{bmatrix} n^r_1 & n^r_2 & & 0 \\ & & n^s_1 & n^s_2 \\ & 0 & & \dots \end{bmatrix} \quad (37)$$

ここで、 n^r_1 、 n^r_2 は、第 r 節点 (線拘束節点) の移動先の直線の法線ベクトルの x_1 成分、 x_2 成分であり既知である。

[3] 線拘束節点の節点力についての条件

線拘束節点の節点力の接線方向成分は0であるから、

$$T F_L = 0 \quad (38)$$

ここで、 T は、線拘束節点の移動先の直線の接線ベクトルの成分を対角線上に並べた $N_L \times 2N_L$ のマトリクスである。

$$T = \begin{bmatrix} n^r_2 & -n^r_1 & & 0 \\ & & n^s_2 & -n^s_1 \\ & 0 & & \dots \end{bmatrix} \quad (39)$$

式(32)、(33)、(34)、(35)、(36)、(38)から、未知量 U_F 、 U_L を求める連立1次方程式は次の様になる。

$$\begin{bmatrix} K_{FF} & K_{FL} \\ T K_{LF} & T K_{LL} \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_F \\ U_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{FC}(X_P' - X_P) \\ -T K_{LC}(X_P' - X_P) \\ -N(X_L - P) \end{bmatrix} \quad (40)$$

これは、 $(2N_F + 2N_L)$ 元連立1次方程式である。これを解くことにより、線拘束節点と点拘束節点の変位量を求めることができる。

最後に、これらの変位量を、対応する各節点の座標に加えれば、変形された図形を得る。また、各3角形の内部の点の変位量は、頂点の変位から線形補間すれば良い。

4. 実行例

図7は、実験に用いた原図形と境界条件を示した図である。原図形の4隅の点A、B、C、Dは、点拘束節点として、長方形の4頂点A'、B'、C'、D'に移動し、原図形の4点E、F、G、Hは、線拘束節点として、それぞれ長方形の4辺A'B'、B'C'、C'D'、D'A'の上に移動する。この例の様に、スケールがほとんど変化しない場合には、弾性パラメータ λ の値は、結果にほとんど影響しなかった。そこで、以下の実験では、 $\lambda = 0$ として、 μ のみを3角形ごとに変化させた。

図8は、全ての3角形で $\mu = 1$ に設定した場合の変形結果である。この様に建物が大きく歪んでしまう。

図9は、建物内部の3角形で $\mu = 1.0.0$ 、その他の3角形では $\mu = 1$ に設定した場合の変形結果である。建物の歪みは小さくなったが、街区境界線との平行性が失われてしまっている。

図10は、建物内部の3角形で $\mu = 1.0.0$ 、建物と街区境界線の3角形 (斜線の部分) で $\mu = 1.0$ 、その他の3角形では $\mu = 1$ に設定した場合の変形結果である。この様に、見た目に不自然でない様に図形全体が変形されている。

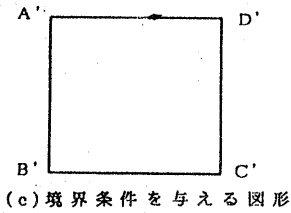
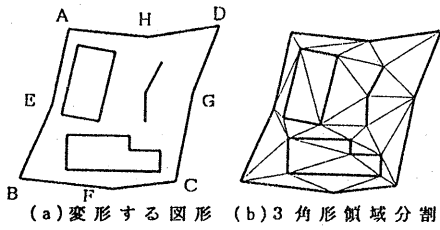


図 7 実験に用いた図形と境界条件

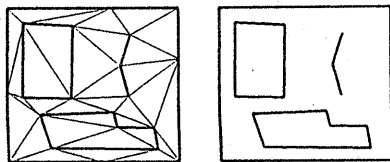


図 8 一様なパラメータを与えた場合

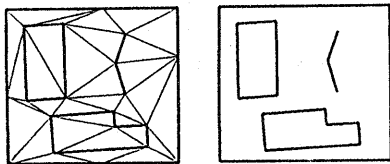


図 9 建物の弾性係数を大きくした場合

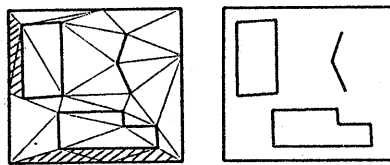


図 10 建物と街区線との間の弾性係数も大きくした場合

5. まとめ

図形を不均質な弾性体とみなし、有限要素法によって各部分図形の変形量を求める図形の変形方法を提案した。本方法によれば、変形したい各部分図形に対してそれぞれ異なる弾性パラメータを与えることによって、大きく変形されてもかまわない部分図形と、変形をできるだけ小さくしたい部分図形の変形量を制御することができる。

本論文で提案した方法は、変形量が比較的小さい場合にしか適用できないが、今後は、大きな変形が可能な方法について検討を進める予定である。

謝辞

熱心にご討論頂き、有益な御意見を頂いた画像メディア研究部の山田豊通主幹研究員に感謝します。

<<参考文献>>

- (1) 福江深也: "リモートセンシング分野における画像処理アルゴリズム", 別冊OplusE"画像処理アルゴリズムの最新動向", pp.188-204, 新技術コミュニケーションズ (1986).
- (2) 伊理正夫監修, 腰塚武志編集: "計算幾何学と地理情報処理", bit別冊, 共立出版 (1986).
- (3) Y.C.Fung: "A First Course in Continuum Mechanics", Prentice-Hall (1969).
- (4) G.Strang, G.J.Fix: "An Analysis of The Finite Element Method", Prentice-Hall (1973).
- (5) 岸本一男: "領域の最適三角形群への分割アルゴリズム", 情報処理, Vol.19, No.3, pp.211-218 (1978).
- (6) A.Bykat: "Design of a Recursive, Shape Controlling Mesh Generator", Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol.19, pp.1375-1390 (1983).