

H o u g h 変換平面における 図形の凸包抽出アルゴリズムについて

村上和人* 興水大和** 長谷川錦治*

+:名古屋市工業研究所 **:中京大学

図形の形状特徴の一つである凸包を, H o u g h 変換平面から抽出する方法について述べる. $x-y$ 平面上に与えられた点列を H o u g h 変換した $\theta-\rho$ 平面での H o u g h 曲線群のエンベロープが, $x-y$ 平面での凸包に対応していることをまず示す. 次いで, このエンベロープの求め方の手順, 凸包構成要素(点)の座標と連結順序の求め方について, アルゴリズムとともに示す.

AN ALGORITHM TO EXTRACT CONVEX HULL ON $\theta-\rho$ HOUGH TRANSFORM SPACE

Kazuhito MURAKAMI* Hiroyasu KOSHIMIZU** Kinji HASEGAWA*

+:Nagoya Municipal Industrial Research Institute
3-4-41, Rokuban, Atsuta-ku, Nagoya, 456 JAPAN
**:Chukyo University, Faculty of Liberal Arts

An algorithm to extract the convex hull which is a geometric shape feature of the pattern is realized on Hough transform space. It is theoretically shown that the envelope of the Hough curves in $\theta-\rho$ parameter space corresponds to the convex hull of the pattern in $x-y$ space. Basing on this property of the Hough transform, procedures defined on the Hough transform are constructed in order to extract the envelope, to calculate the x and y coordinates of the convex elements, and to decide the connection order of them, respectively.

1. はじめに

図形の特徴抽出の一方法としてHough変換¹⁾がしばしば用いられる。例えば、直線群検出では、 $\theta - \rho$ 平面で、Hough曲線の通過度数のピークを探索すれば、 $x - y$ 平面で最も多くの点を通過する直線を求めることができる^{2), 3)}。このように、図形の性質やHough変換の性質^{4), 5)}をうまく利用すれば、 $\theta - \rho$ 平面でも $x - y$ 平面上の図形の形状特徴が容易に求められる場合がある。

本稿では、これらの形状特徴の一つとして凸包を取り上げ、その抽出方法を検討してみた。その結果、与えられた $x - y$ 平面上の点列をHough変換した $\theta - \rho$ 平面でのHough曲線群のエンベロープが、その凸包に対応していることが分かったので、その抽出方法とアルゴリズムを示す。

以下、2. にて凸包抽出のための基本原理を、3. にて凸包抽出アルゴリズムを、4. にて実験結果について述べる。

2. 凸包抽出の基本原理

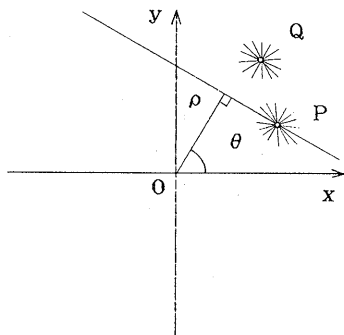
2.1 Hough変換の基本事項

直線群検出のためのHough変換の基本的性質は、図1に示すように、

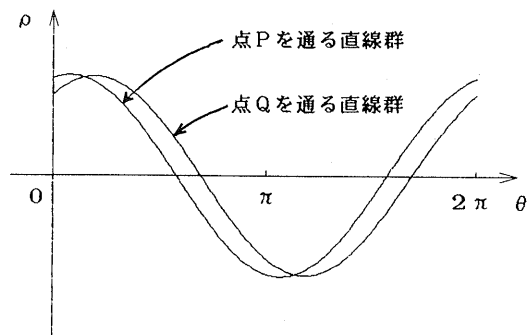
性質<1>

$x - y$ 平面上の点 (x, y) を通過する直線群は、 $\theta - \rho$ 平面において式(1)で表される曲線を描く。

$$\rho = X \cdot \cos \theta + Y \cdot \sin \theta \quad (1)$$



(a) $x - y$ 平面



(b) $\theta - \rho$ 平面

図1. Hough変換の原理

性質<2>

<1>とは逆に、 $\theta - \rho$ 平面上の一点は、 $x - y$ 平面上の一本の直線を表す。

性質<3>

Hough曲線は、 $\theta - \rho$ 平面上で交差する。ただし、Hough曲線は、周期 2π の周期関数のため、 θ の領域を $[0, \pi]$ に限定すると交差は1回、 $[0, 2\pi]$ とすれば、2回交差する。

である。これらを組み合わせることにより、凸包を構成する直線群を抽出することが可能である。

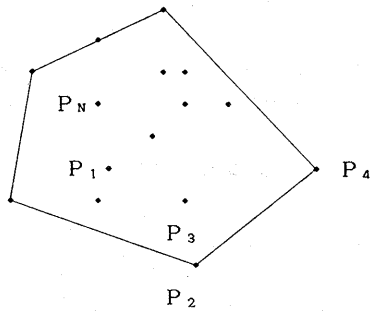
2.2 凸包の基本事項

凸包は図2に示すように、平面上に与えられた点をすべてその周上あるいは内部に含む図形と定義することができる⁶⁾。本稿で扱う $\theta - \rho$ 平面における凸包抽出問題における入力データは、与えられた点 $P_i (i = 1, \dots, N)$ があらかじめHough変換され、 $\theta - \rho$ 平面におけるHough曲線の通過度数が累積された2次元配列であるとする。そして出力は、凸包構成点の $x - y$ 平面における座標値 (x, y) およびその連結順序とする。

2.3 凸包抽出の原理

Hough変換平面における凸包抽出は、次のような原理による。

$\theta - \rho$ 平面でエンベロープをなす曲線の‘交点’は、 $x - y$ 平面で凸包を構成する‘辺’に対応する。



‘.’ : 与えられた点 $P_i (i=1, \dots, N)$
 ‘—’ : 凸包

図2. 点列と凸包の関係

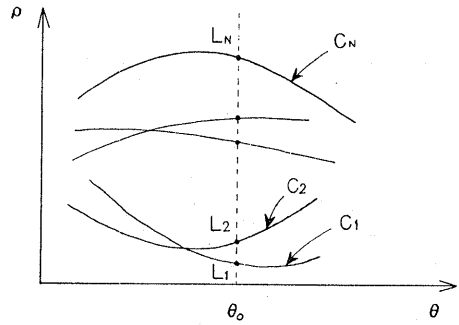
あるいは,

$\theta - \rho$ 平面でエンベロープをなす ‘曲線’ は, $x - y$ 平面では凸包を構成する ‘点’ に対応する.

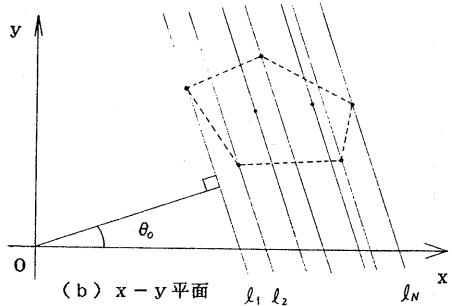
以下に, これを説明しておく. 図3 (a) のように, $\theta - \rho$ 平面に描かれた Hough 曲線の, $\theta = \theta_0$ における N 個の点 $L_i (i=1, 2, \dots, N)$ は, $x - y$ 平面では, 図3 (b) のように y 軸と傾き θ_0 をなす N 本の直線 $l_i (i=1, 2, \dots, N)$ を表す (性質 <2>). そのうち, 最小, あるいは最大の ρ の値をとるものは, 凸包の構成要素 (点) を通過する直線であることは明らかである (図3 の例では, (a) $\theta - \rho$ 平面にて最小のものが L_1 , 最大のものが L_N であり, (b) $x - y$ 平面では, いずれも凸包構成要素 (点) になっている). したがって, $\theta - \rho$ 平面において, この点を含む Hough 曲線, すなわち, エンベロープをなす Hough 曲線 (図3 (a) では, 曲線 C_1 と C_N) は, その凸包構成要素 (点) を Hough 変換したものである (性質 <1>).

また, 同様に他のエンベロープをなす Hough 曲線も, 凸包構成要素 (点) を Hough 変換したものである. そして, 隣接したエンベロープをなす Hough 曲線どうしは必ず交差し (性質 <3>), 交点は, それら 2 つの凸包構成要素 (点) を通る直線, すなわち, $x - y$ 平面で凸包を構成する辺になっている. したがって, エンベロープをなす Hough 曲線を順に追跡してゆくことにより, $x - y$ 平面における凸包の連結順序にしたがって構成要素が得られる. その様子を図4 に示す.

(a) の Hough 曲線群のエンベロープ $C_i (i =$



(a) $\theta - \rho$ 平面



(b) $x - y$ 平面

図3. $\theta - \rho$ 平面の点 (L_1, L_2, \dots, L_N) と $x - y$ 平面の直線 (l_1, l_2, \dots, l_N) の対応

$1, 2, \dots$) は, (b) では凸包構成要素 (点) の $H_i (i=1, 2, \dots)$ に対応している. また, (a) のエンベロープの交点 $G_i (i=1, 2, \dots)$ は, (b) では, 凸包構成要素 (直線) の $g_i (i=1, 2, \dots)$ に対応している.

2.4 凸包抽出の手順

2.3 節の原理により, Hough 変換平面での凸包抽出問題は, $\theta - \rho$ 平面の Hough 曲線群のエンベロープを見つける問題と等価である. したがって, 図4 (a) に示す下側エンベロープについて言えば, エンベロープをなす最初の Hough 曲線 C_1 を見つけてこれを追跡する. そして, 最初に交差した Hough 曲線が次のエンベロープになっているため, 今度はこれを追跡する. 以下, 同様に追跡を繰り返す. この手順は上側エンベロープについても同様である.

なお, Hough 曲線は周期 2π の周期関数である. そこで, 上側あるいは下側のみ追跡する場合には, θ の区間を $[0, 2\pi]$ にとる. また, 上側, 下側それぞれ追跡する場合には, θ の区間を $[0, \pi]$ にとり, 各々で求めた点列を連結すれば, 凸包となる.

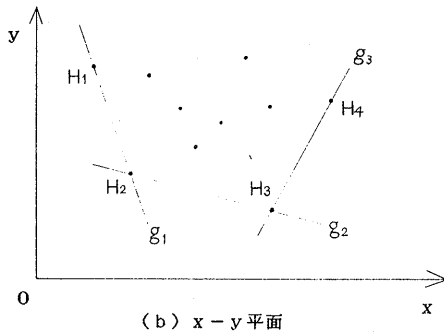
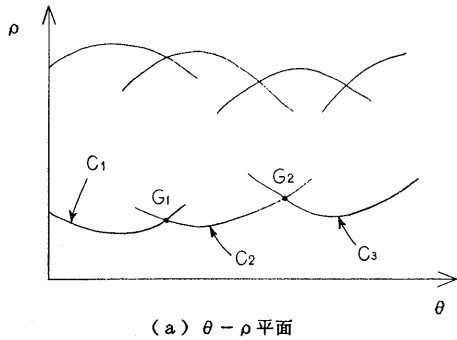


図4. Hough曲線群のエンベロープ (C_1, C_2, \dots) と凸包構成要素(点) (H_1, H_2, \dots) の対応

2.5 凸包抽出に関する補足

2.5.1 Hough曲線からの $x - y$ 座標の算出

$\theta - \rho$ 平面でHough曲線を描くもとの $x - y$ 平面の点 (x_0, y_0) は、このHough曲線上の2点 (θ_1, ρ_1)、(θ_2, ρ_2) の値より計算できる。

Hough変換式(1)より、

$$\rho_1 = x_0 \cdot \cos \theta_1 + y_0 \cdot \sin \theta_1 \quad (2)$$

$$\rho_2 = x_0 \cdot \cos \theta_2 + y_0 \cdot \sin \theta_2 \quad (3)$$

となる。これを、 x_0, y_0 について解くと、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \\ -\cos \theta_2 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Delta &= \cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ &= \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ここで、 $\theta_1 \neq \theta_2$ 、つまり、異なる2点を選べば、(x_0, y_0) が計算できる。

2.5.2 多数のHough曲線が交差した場合

多数のHough曲線が交差した場合でも、やはりエンベロープをなすHough曲線を追跡すれば、凸包が得られる。

$\theta - \rho$ 平面上で図5(a)のように p 本のHough曲線が交差した場合、 $x - y$ 平面上ではその交点が表す直線上に p 個の点があることを表す。凸包抽出問題では、それらの点のうち一番端にある2点(図5(b)の矢印)

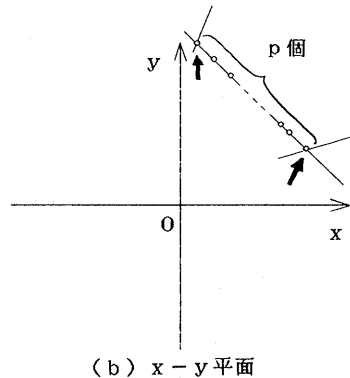
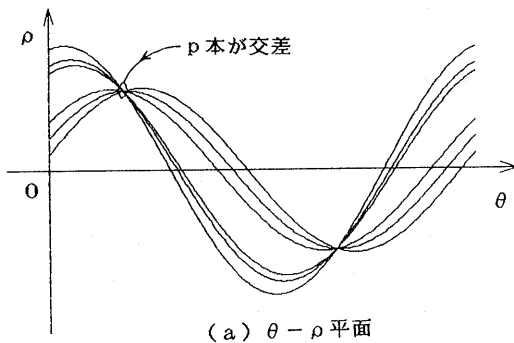
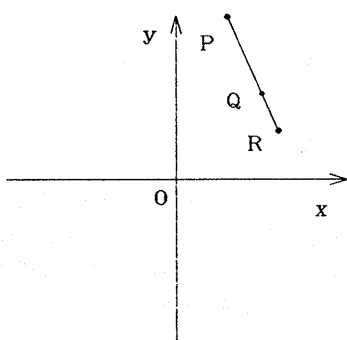
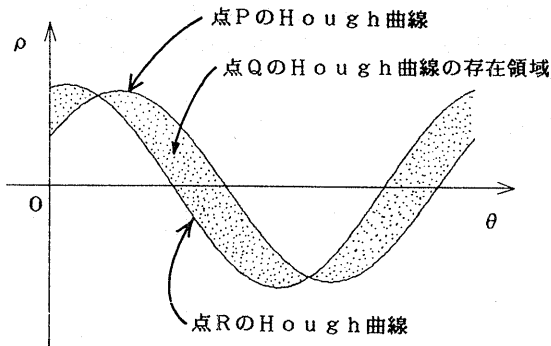


図5. 多数のHough曲線が交差した場合のモデル



(c) x-y平面での3点P, Q, R



(d) θ - ρ 平面のP, Q, RのHough曲線

図5. 多数のHough曲線が交差した場合のモデル

の点)を見つけることになる。問題を簡単にするために、 $p=3$ の場合を考える。そして、x-y平面上で3点P (x_P, y_P), Q (x_Q, y_Q), R (x_R, y_R)が順に図5(c)のように並んでいるものとする。

Hough変換式(1)より、任意の θ に対して、

$$\rho_P = x_P \cdot \cos \theta + y_P \cdot \sin \theta \quad (6)$$

$$\rho_Q = x_Q \cdot \cos \theta + y_Q \cdot \sin \theta \quad (7)$$

$$\rho_R = x_R \cdot \cos \theta + y_R \cdot \sin \theta \quad (8)$$

が成立する。ここで、P, Q, Rは、この順に一直線上にあるので、Qの座標はtをパラメータとして、

$$x_Q = t \cdot x_P + (1-t) \cdot x_R \quad (9)$$

$$y_Q = t \cdot y_P + (1-t) \cdot y_R \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (10)$$

と表すことができる。したがって、

$$\begin{aligned} \rho_Q &= \{t \cdot x_P + (1-t) \cdot x_R\} \cos \theta \\ &\quad + \{t \cdot y_P + (1-t) \cdot y_R\} \sin \theta \\ &= t \{x_P \cdot \cos \theta + y_P \cdot \sin \theta\} \\ &\quad + (1-t) \{x_R \cdot \cos \theta + y_R \cdot \sin \theta\} \\ &= t \cdot \rho_P + (1-t) \cdot \rho_R \end{aligned} \quad (11)$$

となり、点QのHough曲線は、点PのHough曲線と点RのHough曲線の間で描かれることになる。

このように、図5(c)に示すようなx-y平面における線分PR上の点のHough曲線は、 θ - ρ 平面では図5(d)に示した斜線部になる。したがって、複数のHough曲線が交差した場合でも、エンベロープをなすHough曲線のみを追跡すれば十分である。

3. 凸包抽出アルゴリズム

3.1 エンベロープの抽出方法

まず凸包を抽出するために、 θ - ρ 平面からHough曲線群のエンベロープを抽出する。

θ - ρ 平面では、図6のようにHough曲線の通過度数が2次元配列に格納されているので、 θ を固定した1次元配列内で配列要素の小さい方、あるいは大きい方から格納された度数を確認する。最初に'0'でない値が格納されていたところが、その θ におけるエンベロープとなる。この処理を全ての θ について行えば、 θ - ρ 平面でのエンベロープが求められる。

3.2 エンベロープのセグメント化

Hough曲線からx, y座標を計算するための(θ, ρ)は、同一の曲線から2組以上与える必要がある。そこで、3.1節の方法で抽出されたエンベロープをx-y平面の同一点を表すHough曲線ごとにセグメント化する必要がある。また、式(4), (5)より、x, y座標を精度よく計算するには、なるべく離れた θ_1 と θ_2 を用いて計算するのが好ましい。そこで、エンベロープ上のHough曲線の交点を順次求め、これからx, y座標を計算することにする。ところで、Hough曲線が交差する地点では、図6のようにその交差本数が度数pとして2次元配列に格納されているので、

if $p=1$ then 単なるエンベロープであり、Hough曲線は交差していない
if $p>1$ then エンベロープであり、かつp本のHough曲線が交差している地点である

の判定により、セグメント化を行うと同時に、最も精度よく x , y 座標を計算できる θ_1, θ_2 を求めることができる。

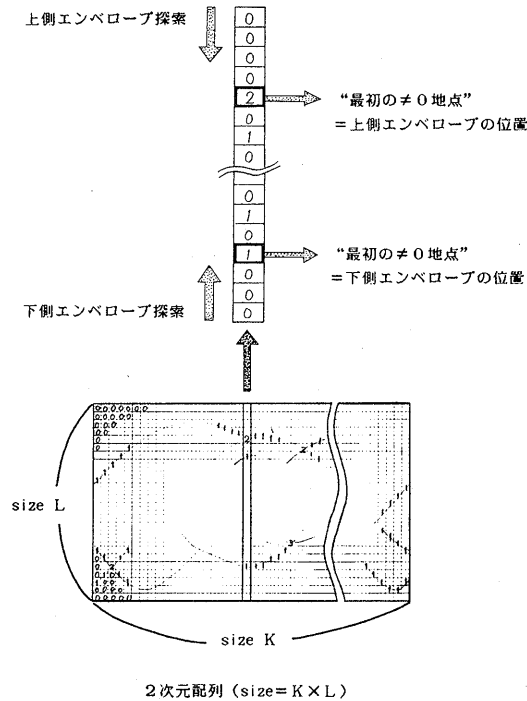


図6. エンベロープ抽出とセグメント化のモデル

3.3 凸包抽出アルゴリズム

凸包は、まず3.1節の方法でエンベロープを求め、続いて3.2節の方法でエンベロープのセグメント化を行い、Hough曲線の交差点 (θ, ρ) を求めることにより計算できるが、この2つの処理を同時に進めることにより、より計算効率の高いアルゴリズムが構成できる。

下に示したアルゴリズムでは、 K は θ 方向の分割数、 L は ρ 方向の分割数である。また、与えられた点群は Hough 変換され、その曲線群の通過度数が2次元配列 $A(i, j)$ ($i=1, \dots, K; j=1, \dots, L$) に格納されているものとする。そして、計算された $x-y$ 平面での凸包構成要素(点)の座標値を順に、 $x(h)$, $y(h)$ ($h=1, 2, \dots$) とする。また、添字 Δ は上側を、 ∇ は下側を表すものとする。

なお、アルゴリズムのステップ②, ③はそれぞれ下側、上側の初期値 ($\theta=0$ のときのエンベロープの値 $(\theta, \rho) = (0, \rho)$) の計算である。

<凸包抽出アルゴリズム>

- ① $i=0, H^\Delta=0, H^\nabla=0$
 - ②-1) $j=0$
 - 2) $j=j+1$
 - 3) もし、 $A(i, j)=0$ なら、②-2) へ飛ぶ。
 - 4) $\theta_2^\nabla = \ll i \gg_\theta, \rho_2^\nabla = \ll j \gg_\rho$ とする。ただし、 $\ll \dots \gg_\theta, \ll \dots \gg_\rho$ は、各々配列要素から θ, ρ への変換とする。
 - ③-1) $j=L+1$
 - 2) $j=j-1$
 - 3) もし、 $A(i, j)=0$ なら、③-2) へ飛ぶ。
 - 4) $\theta_2^\Delta = \ll i \gg_\theta, \rho_2^\Delta = \ll j \gg_\rho$ とする。
 - ④ $i=i+1$ (もし、 $i>K$ なら⑧へ飛ぶ。)
 - ⑤-1) $j=0$
 - 2) $j=j+1$
 - 3) もし、 $A(i, j)=0$ なら、⑤-2) へ飛ぶ。
 - 4) もし、 $A(i, j)=1$ なら、⑥へ飛ぶ。
 - 5) $H^\nabla = H^\nabla + 1, \theta_1^\nabla = \theta_2^\nabla, \rho_1^\nabla = \rho_2^\nabla, \theta_2^\nabla = \ll i \gg_\theta, \rho_2^\nabla = \ll j \gg_\rho$ とし、
- $$\begin{pmatrix} x^\nabla(H^\nabla) \\ y^\nabla(H^\nabla) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \sin\theta_2^\nabla & -\sin\theta_1^\nabla \\ -\cos\theta_2^\nabla & \cos\theta_1^\nabla \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1^\nabla \\ \rho_2^\nabla \end{pmatrix}$$
- ただし、 $\Delta = \sin(\theta_2^\nabla - \theta_1^\nabla)$ (12)
- にて、 $x^\nabla(H^\nabla), y^\nabla(H^\nabla)$ を計算する。
- ⑥-1) $j=L$
 - 2) $j=j-1$
 - 3) もし、 $A(i, j)=0$ なら、⑥-2) へ飛ぶ。
 - 4) もし、 $A(i, j)=1$ なら、④へ飛ぶ。
 - 5) $H^\Delta = H^\Delta + 1, \theta_1^\Delta = \theta_2^\Delta, \rho_1^\Delta = \rho_2^\Delta, \theta_2^\Delta = \ll i \gg_\theta, \rho_2^\Delta = \ll j \gg_\rho$ とし、
- $$\begin{pmatrix} x^\Delta(H^\Delta) \\ y^\Delta(H^\Delta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \sin\theta_2^\Delta & -\sin\theta_1^\Delta \\ -\cos\theta_2^\Delta & \cos\theta_1^\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1^\Delta \\ \rho_2^\Delta \end{pmatrix}$$
- ただし、 $\Delta = \sin(\theta_2^\Delta - \theta_1^\Delta)$ (13)

にて、 $x^{\wedge}(H^{\wedge})$ 、 $y^{\wedge}(H^{\wedge})$ を計算する。

- ⑦ ④へ飛ぶ。
- ⑧ 下側凸包 ($x^{\vee}(h)$, $y^{\vee}(h)$) ($h=1, 2, \dots, H^{\vee}$)、上側凸包 ($x^{\wedge}(h)$, $y^{\wedge}(h)$) ($h=1, 2, \dots, H^{\wedge}$) を連結し、凸包を構成する。
- ⑨ 終了。

<アルゴリズム終了>

4. 実験

$x-y$ 平面に与えられた $N=20$ 個の点をHough変換し、サイズ $K \times L$ ($K=720$, $L=800$)の2次元配列に格納されたHough曲線群から凸包を求め

1	: 50.0	40.0
2	: 60.0	80.0
3	: 80.0	50.0
4	: 50.0	80.0
5	: 65.0	65.0
6	: 50.0	60.0
7	: 70.0	60.0
8	: 70.0	90.0
9	: 60.0	60.0
10	: 80.0	80.0
11	: 100.0	70.0
12	: 50.0	65.0
13	: 70.0	100.0
14	: 80.0	70.0
15	: 55.0	50.0
16	: 70.0	50.0
17	: 30.0	80.0
18	: 60.0	85.0
19	: 90.0	70.0
20	: 55.0	60.0

(a) 与えた点の x , y 座標値
(データ点数 $N=20$)

1	: 100.09	69.94
2	: 70.01	100.03
3	: 29.98	80.08
4	: 50.01	39.90
5	: 80.22	50.01

(b) Hough変換平面より抽出された凸包構成要素(点)の x , y 座標値と連結順序

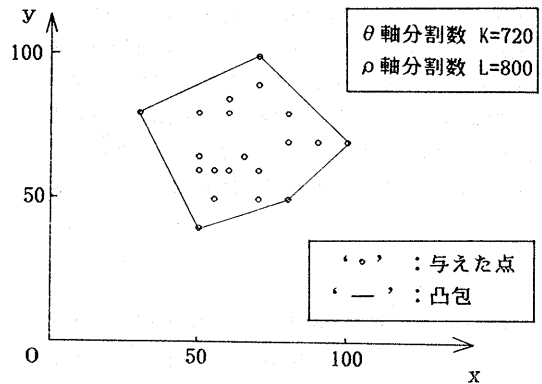
た結果を図7に示す。(a)はこれら20個の点の $x-y$ 平面での座標値である。(c)の丸印は、それらを図示したものである。また、(d)は、それらのHough曲線群である。

(b)は、上述のアルゴリズムによりHough変換平面から抽出された凸包構成要素(点)の x , y 座標値を、その連結順に並べたものである。(c)の実線は、これらの点を結んだものであり、ほぼ正確に凸包が求められていることを示している。

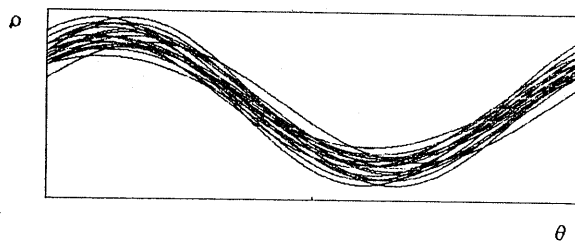
5. 考察とまとめ

5.1 計算オーダー

本アルゴリズムの計算オーダーは、基本的に与えられた点の数 N には依存せず、Hough変換平面の分割数、つまり2次元配列の大きさ K , L に依存する。 K への依存はリニアであり、 $O(K)$ である。一方、 L への依存



(c) 与えた点と結果(b)の連結による凸包



(d) 与えた点のHough曲線群

図7. 実験結果の一例

は、最悪でも $O(L)$ であるが、 N が大きくなるほどHough変換平面での度数記録が多く(密に)なってエンベロープ探索が早く終るため、一般の凸包抽出の場合と性格を異にしている。

なお、本稿では、Hough変換平面が計算されている場合を出発点にしているが、Hough変換自体の計算は、 $O(NK)$ である。

5.2 量子化誤差による影響

本稿では、Hough曲線の通過度数を量子化した2次元配列を真値とみなして論じてきた。しかし、Hough変換自体、必然的に量子化誤差を含む。さらに、デジタル画像を対象にする場合など、Hough変換のもとになる $x-y$ の座標自体に標本化・量子化による誤差が含まれている。したがって、 $\theta-\rho$ 平面でのデータをもとに逆算された凸包の座標にも、当然ある程度の誤差が含まれていると考えられる。

この精度向上のためには、一般に、分割数 K, L を大きくすることが必要になる。本稿では、あらかじめ2次元配列が計算されている場合のアルゴリズムについて示したが、 $x-y$ 平面上の点列から凸包を求める場合には、度数累積(2次元配列作成)のサブプロセスと、エンベロープ抽出のサブプロセスを併合させて一つのプロセスを構成してメモリ削減することができる。この場合、必要な配列をサイズ L の1次元配列で済ませることができる³⁾。

5.3 まとめ

本稿では、図形の形状特徴の一つである凸包をHough変換平面から抽出する方法について検討した。そして、 $\theta-\rho$ 平面でのHough曲線群のエンベロープが

$x-y$ 平面での凸包に対応していることを明らかにした。また、実験例とともにアルゴリズムを示し、計算オーダーと精度について考察を行った。

K, L を限りなく大きくすれば量子化誤差も小さくなり、より正確な凸包の位置が求められるが、デジタル画像を対象とするときには、ある程度のところで妥協できると考えられる。 $x-y$ 平面での精度と $\theta-\rho$ 平面での精度との関係解明、および、分割数 K, L の最適値の設定が今後の課題である。

< 文 献 >

- 1) Hough, P.V.C.(1962):" Method and means for recognizing complex patterns," U.S. Patent 3069654 (Dec.18,1962)
- 2) R.O.Duda and P.E.Hart:"Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures", Comm. ACM,15,1,pp.11-15 (Jan.1972).
- 3) 興水, 村上:" 直線群検出のためのHough曲線追跡型アルゴリズム", 信学論, Vol.J69-D, No.4, pp.631-633 (April 1986) .
- 4) 松山, 長尾(1985):"Hough変換の幾何学的性質と直線群検出への応用," 情報処理学論誌,26,6,pp.1069-1078(Jun.1985)
- 5) Wahl, F.M. and Biland, H.P.(1986):" Decomposition of polyhedra scene in Hough space," Proc.8th-ICPR, pp.78-84(Oct.1986)
- 6) 村上, 興水, 長谷川:" 凸包の高速計算アルゴリズム", 信学技報, IE86-122 (March 1987) .