

法線像仮説検定法による三面頂点の配置推定

Configuration Estimate of Trihedral Vertex by Hypothesis and Test of Normal Vector Image

尺長 健

金子 博

Takeshi SHAKUNAGA

Hiroshi KANEKO

NTT ヒューマンインタフェース研究所

NTT Human Interface Laboratories

あらまし 我々は、中心投影条件での角度の見え方と実際の角度の基本的関係として透視角度変換を導き、これを用いた三次元情報抽出法を提案してきた。本報告では、対象を三面頂点に絞り、透視角度変換をベースに、角度がすべて既知である三面頂点の中心投影像から、その三面頂点の三次元配置を復元する問題を取り上げ、具体的に解釈アルゴリズムを導くとともに、問題の構造を分析する。前報告では、三面頂点をなす3つの角度のうち2つ以上が直角である場合について、代数解を与えた。ここでは、この代数解をベースに、一般の三面頂点解釈に有効なアルゴリズム（法線像仮説検定法）を導く。さらに、多義性について検討を加える。なお、本報告の議論は、中心投影・平行投影に拘らず、広く情景解析およびロボットビジョンに有効であると考えられる。

Abstract We have proposed the Perspective Angle Transform (PAT) with several applications for analyses of 3-D scene. This paper reveals another very important example of application of the PAT. Trihedral vertex is one of the most primitive elements in 3-D scene. This paper focusses on the interpretation of trihedral vertex, where the interpretation means the recovery of the configuration from a single view, when three angles, which compose the trihedral vertex, are known. In case more than two angles of the three are right, algebraic solutions were reduced from the PAT in our previous paper. Using these, we provide an interpretation algorithm for arbitrary trihedral vertex.

1. はじめに

我々^{[1][2][3][12]}は、中心投影条件での角度の見え方と実際の角度の基本的関係として透視角度変換を導き、その画像解析への利用例として、離散三線分の解釈問題^{[1][2]}、平面内の直交単位ベクトル像からの法線ベクトルの推定^[12]など、角度情報を用いた三次元情報抽出に関わる基本的問題を取り上げ、代数解法あるいは数値解法を提案してきた。本報告では、対象を三面頂点に絞り、透視角度変換をベースに、画像上での見え方からの三面頂点の定量的解釈について論じる。即ち、角度がすべて既知である三面頂点の中心投影像から、その三面頂点の三次元配置を復元する問題を取り上げ、具体的に解釈アルゴリズムを導くとともに、問題の構造を解明する。

本報告の構成は以下の通りである。第2章では三面頂点の解釈問題の定義を与えるとともに、議論の準備として透視動座標系および透視角度変換を簡単に説明する。第3章および第4章では、三面頂点の重要な2つのサブクラス、三直交頂点・二直交頂点をそれぞれ対象として取り扱い、代数解を示すとともに、解釈可能性・解釈の多義性を論じる。一方、第5章では一般の三面頂点を対象とし、法線像仮説検定法と名付けた数値解法を与え、これを用いた三面頂点解釈シミュレーション結果を述べる。また、他の数値解法との比較からこの解法の妥当性を示すとともに、解釈の多義性を考察する。

2. 問題の定義および数学的準備

2.1 三面頂点解釈問題の定義

三面頂点とは、3平面が空間の1点で交わることにより生成される頂点のことである。三面頂点は、それぞれ2平面の交線として定義される3本の稜線と完全に記述できる。いま、これを $L_i (i=1, 2, 3)$ で示し、それぞれに対応する単位ベクトルを E_i で示す。

また、 E_i と E_j がなす角度を $\Delta \alpha_{ij}$ で示す。即ち、次の関係(式(1))が成立するものとする。

$$\begin{aligned} E_1 \cdot E_2 &= \cos \Delta \alpha_{12} \\ E_2 \cdot E_3 &= \cos \Delta \alpha_{23} \\ E_3 \cdot E_1 &= \cos \Delta \alpha_{31} \end{aligned} \quad (1)$$

さらに、 E_i と E_j により張られる平面を Γ_{ij} で示し、その法線ベクトルを E_{ij} で表す。

このとき、三面頂点解釈問題を次のように定義する。図1のように、中心投影法により得られた画像内に三線分 $\hat{l}_i (i=1, 2, 3)$ が共通の交点 p を持つ場合を考える。ここで、 $\Delta \alpha_{ij}$ が既知であり、 \hat{l}_i が L_i の像であるという仮定のもとで、上式で定義される三面頂点の配置（三次元空間での面の法線ベクトル E_{ij} 、あるいは稜線ベクトル E_i ）を復元する問題を三面頂点解釈問題と呼ぶことにする。

本報告は、三面頂点解釈問題をさまざまな観点から論じる。特に、三面頂点の重要なサブクラスとして次に掲げる2つを一般の三面頂点に先立って取り上げる。

- (i) 三直交頂点: $\Delta \alpha_{ij} = \pi / 2$
- (ii) 二直交頂点: $\Delta \alpha_{12} = \Delta \alpha_{31} = \pi / 2$

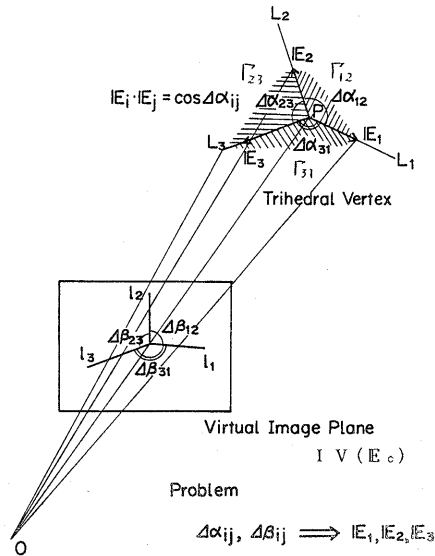


図1. 三面頂点解釈問題

2.2 透視角度変換^[1]

(1) 観測者中心座標系および中心投影法

本報告では、座標系の取り方を次のように定める。まず、3次元空間を図2の直交座標系X-Y-Zで取り扱う。ここで、X-Y-Z座標系は、左手系をなすものとする。また、X-Y-Z座標の極座標表示をR-θ-φ座標で表わす。このとき、両者の間には次の関係がある。

$$(x, y, z) = (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta)$$

ここで、視点はX-Y-Z座標系の原点O(0,0,0)にあるものとし、視軸をZ軸と一致させる。また、対象世界はZ軸の正方向に広がっているとす。さらに、fでレンズの焦点距離を表わし、3次元世界は視点を通して、Z=fの画像平面上に投影されるものとする。画像平面上の座標系をU-Vで示し、その原点を画像平面とZ軸との交点とする。また、U軸・V軸はそれぞれ、X軸・Y軸に平行とする。

このとき、中心投影法により、3次元空間内の点P(x,y,z)とその画像平面への写像p(u,v)との間には次式が成立する。

$$(u, v) = (f \cdot x / z, f \cdot y / z)$$

(2) 第一透視動座標系と透視角度変換の基本形

3次元空間に物体が存在し、点P(x,y,z)が物体上の点であるとする。ここで、点Pにおける物体の接平面をΓで表わし、こちら向きの法線ベクトル(単位ベクトル)をE_nで示す。このとき、点P(x,y,z)に対し、第一透視動座標系(A-B-C)を、以下に定義する単位ベクトルE_a, E_b, E_cを用いて定める。

$$E_c = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$$

$$E_b = E_c \times F_0 / |E_c \times F_0|$$

ただし、 $F_0 = E_c - (E_n \cdot E_c) E_n$

$$E_a = E_b \times E_c$$

第一透視動座標系は平面Γと視線E_cにのみ依存する。以下では、X-Y-Z座標系とA-B-C座標系を区別するため、X-Y-Z座標系での成分表示を<...>

で、A-B-C座標系での成分表示を<...>でそれぞれ表わす。また、E_cが与えられたとき、点<0,0,f>を通るA-B平面をIV(E_c)で示し、これを(E_cに関する)仮想画像面と呼ぶ。

第一透視動座標系は仮想画像面上での議論を行うのに有効な座標系である。即ち、第一透視動座標系を用いることにより、接平面Γ上で点Pを頂点とする角度とその仮想画像面上での見え方が非常に簡単な方程式で表わせる。

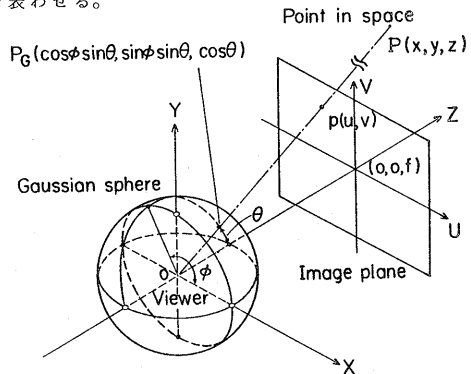


図2. 観測者中心座標系と中心投影

定理1 透視角度変換の基本形

F₀とE_cのなす角度をφ(F₀の定義より、0 ≤ φ ≤ π/2)とする。平面Γ上に点Pを始点とし、E_cと反時計回りに角度α_iをなす半直線L_iを考え、L_i上の単位ベクトルをE_i、L_iの仮想画像面IV(E_c)への中心投影像をI_iとする。また、I_iがA軸から反時計回りで角度β_iに位置するとする(図3)。このとき、3つの角度α_i, β_i, φの間には次の関係式が成立する。

$$\tan \beta_i = \tan \alpha_i / \sin \phi \quad (2)$$

式(2)を透視角度変換の基本形と呼ぶ。ここで、透視角度変換は、実画像上で測定される角度に対してではなく、仮想画像面IV(E_c)上で測定される角度に対して成立する関係である。

仮想画像面IV(E_c)は、カメラを原点Oを中心に回転し、視軸をOPと一致させたときに得られる実画像面と一致する。従って、IV(E_c)上の像は、実画像をガウス球面に投影し、続いてこれをIV(E_c)に投影することにより得られる。また、金谷^[4]の示した変換式を用いることにより、画素・線分・角度を実画像上で計測するだけで、仮想画像面上での像を簡単に得ることができる。

以上の議論を総合すると、E_nおよびE_cはそれぞれ第一透視動座標系で次式のように表わせる。なお、法

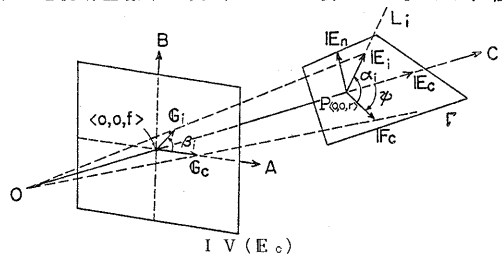


図3. 透視角度変換の基本形

線ベクトル E_n はこちら向き ($E_n \cdot E_c < 0$) にとるものとする。

$$E_n = \langle \cos \phi, 0, -\sin \phi \rangle \quad (3)$$

$$E_i = \langle \cos \alpha_i \cdot \sin \phi, \sin \alpha_i, \cos \alpha_i \cdot \cos \phi \rangle \quad (4)$$

(3) 見かけの角度と実際の角度の関係式

透視角度変換の基本形は、平面上での任意の直線と E_c のなす角度に関する方程式である。いま、基本形を三角関数の和の公式により変形することにより、平面上の任意の二直線のなす実際の角度と見かけの角度との関係が導き出せる。

即ち、平面 Γ_{ij} 上で直線 L_i と L_j ($i \neq j$) がなす実際の角度を $\Delta \alpha_{ij}$ ($= \alpha_i - \alpha_j$)、仮想画像面上での見かけの角度を $\Delta \beta_{ij}$ 、 Γ_{ij} に関する ϕ の値を ϕ_{ij} とすると次式が成立する。

$$\Delta \alpha_{ij} = \tan^{-1} \frac{\sin \phi_{ij} \cdot (\tan \beta_i - \tan \beta_j)}{1 + \sin^2 \phi_{ij} \cdot \tan \beta_i \cdot \tan \beta_j} \quad (5)$$

(4) 法線の像からの第一透視動座標系の決定

透視角度変換基本形の使用にあたっては、第一透視動座標系が確定していることが前提条件となる。ここで、一般には第一透視動座標系は未知であることが多いが、他の情報からこれを容易に決定できる場合もある。例えば、法線の像からの第一透視動座標系の決定がこの代表例であり、次の定理が成立する。

定理2 法線の像からの第一透視動座標系の決定

仮想画像面 $I V (E_c)$ 上で、着目する平面の法線ベクトル E_n の像 G_n 、即ち、

$$G_n = f (E_n - (E_n \cdot E_c) E_c) / r_n$$

但し、 $r_n = r + E_n \cdot E_c$

が観測可能の場合、第一透視動座標系を二義的に決定できる。ここで、2つの動座標系は、 E_c および次式で示される E_a により定義される。

$$E_a = \pm G_n / |G_n|$$

第一透視動座標系が定まると、これと $X-Y-Z$ 座標系の関係は自動的に求まる。また、それぞれの座標系におけるこちら向き ($E_n \cdot E_c < 0$) の法線ベクトル E_n は式(3)で示される。ここで、任意のベクトル E_i は、仮想画像面上で A 軸となす角度 β_i を観測することにより、未知数 ϕ を用いて式(4)で表わされる。

(5) 第二透視動座標系とPAT曲線^[2]

透視角度変換は仮想画像面 $I V (E_c)$ 上の概念だけを用いて次のように整理することができる。

$I V (E_c)$ 上の直線 l_i および l_j のなす角の二等分線を S 軸とし、 S 軸および C 軸を含む左手直交座標系 $S-T-C$ を考える(図4)。これは、直線の見え方のみから決定される座標系で、以下では (l_i と l_j に関する) 第二透視動座標系と呼ぶ。このとき、実際の角

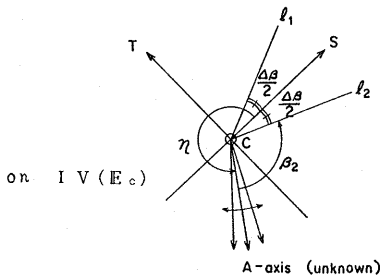


図4. 第二透視動座標系

度 $\Delta \alpha (= \alpha_i - \alpha_j)$ とその見え方 $\Delta \beta (= \beta_i - \beta_j)$ の間には、 $\Delta \alpha \neq \pi/2$ のとき、次の関係が成り立つ。

$$\tan \Delta \alpha \left(\frac{(s^2 + t^2) + (s^2 - t^2) / \cos \Delta \beta}{2} + f^2 \right) = f \tan \Delta \beta \sqrt{s^2 + t^2 + f^2} \quad (6)$$

ここで、 (s, t) は仮想画像面 $I V (E_c)$ 上で E_n の無限遠点 $p_{\infty n}$ の座標を示し、 f はカメラの焦点距離を示す。即ち、式(6)は一般角 $\Delta \alpha$ に対して、 $\Delta \beta$ を一定としたときに得られる $p_{\infty n}$ の軌跡を表わす(図5)。

一方、 $\Delta \alpha = \pi/2$ のとき、次式が成り立つ。

$$\left(\frac{(s^2 + t^2) + (s^2 - t^2) / \cos \Delta \beta}{2} + f^2 \right) = 0 \quad (7)$$

即ち、 $\Delta \alpha = \pi/2$ のときには、点 $p_{\infty n}$ は双曲線(式(7))を描く(図5)。

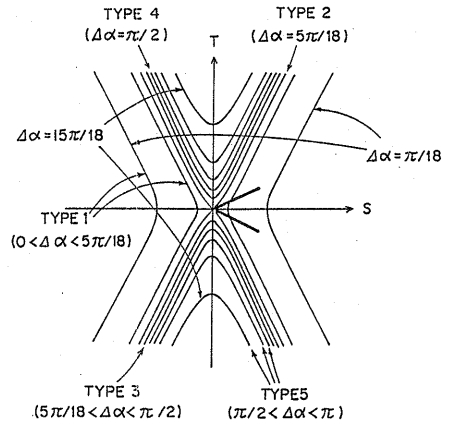


図5. PAT曲線の例: $\Delta \alpha = \frac{(2k-1)\pi}{18}$, $\Delta \beta = \frac{5\pi}{18}$

3. 三直交頂点の解釈

3.1 透視角度変換基本形に基づく解法(代数解)^[3]

三直交頂点の解釈に関しては、従来からさまざまな視点から検討が加えられている^{[6][7]}。一方、透視角度変換基本形を用いると以下の結果が得られる^[3]。

三直交頂点では、3つの面の法線の像を同時に観測できる。ここで、3つの法線像のうち任意の1つを対象として選択することにより、定理2から、第一透視動座標系を二義的に決定できる。従って、透視角度変換基本形を用いて、解析解(代数解)を求めることができる。以下では、面 Γ_{23} に着目して議論を進める。

β_2, β_3 に関する透視角度変換(式(2))と $\Delta \alpha_{23} = \pi/2$ から、次式で ϕ_{23} が定まる。

$$\phi_{23} = \pm \sin^{-1} \left(1 / \sqrt{-\tan \beta_2 \cdot \tan \beta_3} \right)$$

ところで、2つの解のうち、 $0 \leq \phi_{23} \leq \pi/2$ を満たすのは、複号が+の場合のみであることから、 ϕ_{23} は次式で一意的に決定できる。

$$\phi_{23} = \sin^{-1} \left(1 / \sqrt{-\tan \beta_2 \cdot \tan \beta_3} \right) \quad (8)$$

従って、式(8)で与えられる ϕ_{23} と β_2 および β_3 から、次のように三直交頂点の解釈が求まる。

$$E_1 = \langle \cos \phi_{23}, 0, -\sin \phi_{23} \rangle$$

$$E_2 = \langle \cos \alpha_2 \cdot \sin \phi_{23}, \sin \alpha_2, \cos \alpha_2 \cdot \cos \phi_{23} \rangle$$

$$E_3 = \langle \cos \alpha_3 \cdot \sin \phi_{23}, \sin \alpha_3, \cos \alpha_3 \cdot \cos \phi_{23} \rangle$$

ただし、 $\tan \alpha_i = \tan \beta_i \cdot \sin \phi_{23}$

3.2 三線接続点の直交解釈可能性

前節の議論は、与えられた三線接続点を三直交頂点

として解釈するための手続きを示す。しかし、三線接続点の中には、図6のように三直交頂点としては解釈できないようなものもある。即ち、定量的解釈とは別に解釈可能性を判定することが必要な場合がある。この問題に関しては、Perkins^[6]、Kanatani^[7]などが判定式を示しているが、前節の議論を直接利用することも可能である。

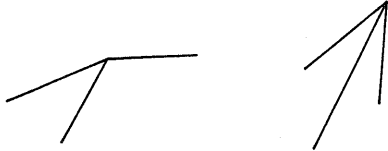


図6. 三直交解釈できない三線接続点の例

即ち、式(8)において ϕ_{23} が実根を持つ条件は、

$$-\tan\beta_2 \cdot \tan\beta_3 \geq 1 \quad (9)$$
 であり、この関係を直交解釈可能性の判定式として利用することができる。

一方、PAT曲線を用いることにより、三直交解釈のマクロな構造を明確に示すことができる。即ち、直線 l_2 と l_3 に関する第二透視動座標系で、 $\Delta\alpha_{23} = \pi/2$ に対応するPAT曲線(式(7))を描くと図7の双曲線が得られる。ここで、この三線接続点が三直交解釈可能なとき、 l_1 の無限遠点は図7のPAT曲線上になければならないから、 l_1 の存在位置は図7の斜線内に限定される。

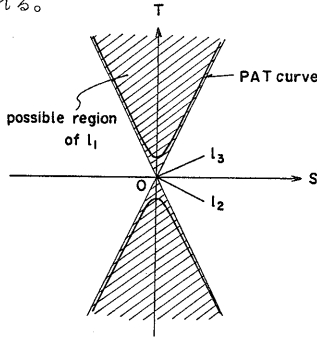


図7. 三直交解釈可能域

3.3 例題

本章の議論を実際の例に適用し、3次元配置を復元すると以下ようになる。例としては、図8の2個の三線接続点を考える。図は三線接続点における仮想画像面を示し、それぞれ注目する法線の像に矢印を付した。ここで、定理2から法線の像から決まる2つの第一透視動座標系のうち一方のA軸はこの矢印と一致する。 β_2, β_3 および $\Delta\alpha_{23}$ の値を図に付記した。ここでは、図8を出発点として、 ϕ_{23} の値を求めるまでを取り扱うが、実際の画像への適用に当たっては、これに先立って、U-V平面からA-B平面への変換が必要である。これは、簡単な座標変換^[4]により得られる。図8の2例に対し式(8)を適用した解を表1に示す。

(a)は解釈可能な例に、(b)は解釈不可能な例に対応する。ここで、(b)の解釈不可能性は、式(9)によっても検出可能である。

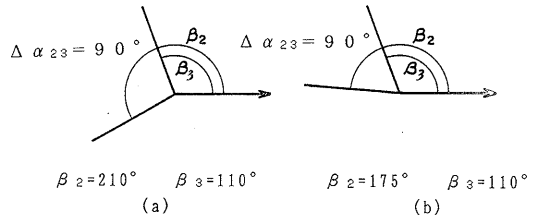


図8. 三直交解釈の例題

表1. $\Delta\alpha_{23} = \pi/2$ の解釈例

図	$-\tan\beta_2 \tan\beta_3$	ϕ_{23}
(a)	1.58626	32.23°
(b)	-0.24037	---

4. 二直交頂点の解釈

4.1 透視角度変換基本形に基づく解法(代数解)^[3]

二直交頂点では、1つの面の法線像が観測可能であり、定理2から第一透視動座標系を二義的に決定できる。従って、三直交頂点の場合と同様にして定量的解釈のための解析解(代数解)を求めることができる。

即ち、角度 $\Delta\alpha_{23} (= \alpha_2 - \alpha_3)$ が既知の場合、 β_2, β_3 を計測することにより、式(5)を解いて、 ϕ_{23} を求めることができる。

$$\phi_{23} = \sin^{-1} D \quad (10)$$

但し、

$$D = (-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\gamma\varepsilon}) / 2\gamma \quad (11)$$

$$\gamma = \tan\beta_2 \tan\beta_3 \tan\Delta\alpha_{23}$$

$$\delta = \tan\beta_3 - \tan\beta_2$$

$$\varepsilon = \tan\Delta\alpha_{23}$$

ここで、 ϕ_{23} の定義から、 $0 \leq \phi_{23} \leq \pi/2$ でなければならないから、式(11)で与えられる2つのDのうち、次の条件を満たすもののみが解となる。

$$0 \leq D \leq 1 \quad (12)$$

式(10)で与えられる ϕ_{23} と β_2 および β_3 から、三直交頂点の場合と同様に三面頂点の解釈が求まる。

$$E_1 = \langle \cos\phi_{23}, 0, -\sin\phi_{23} \rangle$$

$$E_2 = \langle \cos\alpha_2 \cdot \sin\phi_{23}, \sin\alpha_2, \cos\alpha_2 \cdot \cos\phi_{23} \rangle$$

$$E_3 = \langle \cos\alpha_3 \cdot \sin\phi_{23}, \sin\alpha_3, \cos\alpha_3 \cdot \cos\phi_{23} \rangle$$

ただし、 $\tan\alpha_i = \tan\beta_i \cdot \sin\phi_{23}$

4.2 解釈可能性および解の二義性とその判定法

式(12)は個々の三線接続点に対する解釈可能性の判定条件を示す。これを詳しく分析することにより、解釈可能性および解の多義性に関して幾つかの知見が得られる。まず、式(11)から、解釈の個数の最大は2、最小が0であることが判る。また、解が1個である場合、複号が+である場合のみが解であり、-の方が解になることはありえないことが判る。

一方、三直交解釈の場合と同様に、PAT曲線を用いることにより、二直交解釈のマクロな構造を明確に示すことができる。即ち、直線 l_2 と l_3 に関する第二透視動座標系で、 $\Delta\alpha_{23}$ に対応するPAT曲線(式(6))を描くと図9の曲線(四次曲線の分岐に相当)が得られる。ここで、この三線接続点が二直交解釈可能なとき、 l_1 の無限遠点はPAT曲線上になければなら

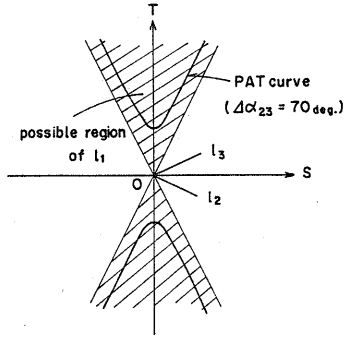


図9. 二直交解釈可能域

いから、 l_1 の存在位置は図の斜線内に限定される。
 ここで、三直交解釈の場合にはPAT曲線が常に双曲線であったのに対し、二直交解釈ではPAT曲線が四次であり曲線の形態が $\Delta\alpha_{23}$ と $\Delta\beta_{23}$ によって大幅に変化する^[11]。これに伴い、解（法線像 l_1 とPAT曲線の交点）の個数が変化するが、詳細な分析により、いくつかの重要な知見を得ることができる。

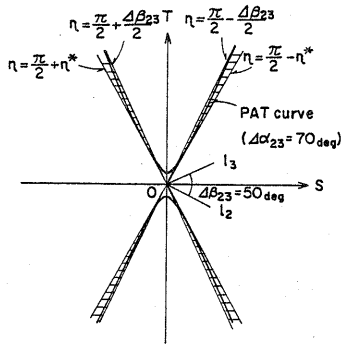


図10. 二直交解釈における二義解釈域

このうち、特筆すべきものとしては、解が2個存在するのが極めて特殊な場合であるということがあげられる。具体的には、 $\frac{\Delta\beta_{23}}{2} < \Delta\alpha_{23} < \frac{\pi}{2}$ （ただし、 $\Delta\beta_{23} > \Delta\alpha_{23} > \frac{\pi}{2}$ の場合も解が2個存在するが、これは、 $\Delta\alpha_{23} > \frac{\pi}{2}$ の場合には補角について考えることにすると、同じ条件式に帰着される）が成立し、かつ次式を満たす位置（図10の斜線内に対応）に l_1 が存在する場合にのみ、解が2個存在する^[11]。

$$\frac{\pi}{2} - \eta^* < \eta < \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\beta_{23}}{2} \quad \text{あるいは、}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\beta_{23}}{2} < \eta < \frac{\pi}{2} + \eta^*$$

ただし、

$$\eta^* = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{\cos \Delta\beta_{23} \sqrt{\tan^2 \Delta\alpha_{23} - \tan^2 \Delta\beta_{23}}}{\tan \Delta\alpha_{23}}$$

4.3 例題

本章の議論を実際の例に適用し、3次元配置を復元すると以下ようになる。例としては、図11の4個の三線接続点を考える。3.3節と同様に、図はすべ

て三線接続点に対応する仮想画像面を示し、それぞれ注目する法線の像に矢印を付すものとする。ここで、法線の像から決まる2つの第一透視動座標系のうち一方のA軸はこの矢印と一致する。 β_2, β_3 および $\Delta\alpha_{23}$ の値を図に併記する。これらに対し、式(11), (10)を適用し求めた解を表2に示す。

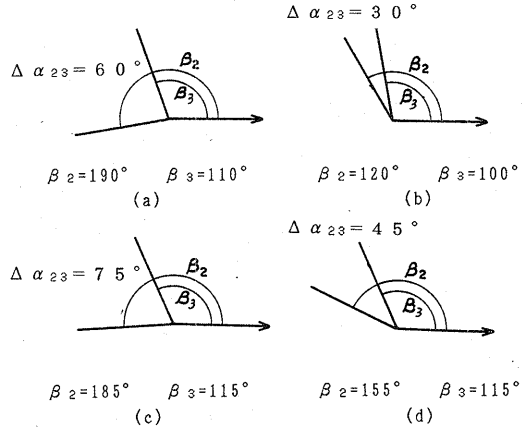


図11. 二直交解釈の例題

表2. $\Delta\alpha \neq \pi/2$ の解釈例

図	$D (= \text{Si n}^{-1} \phi_{23})$	ϕ_{23}
(a)	-4.00044 0.51599	31.06°
(b)	0.21014 0.48445	12.13° 28.98°
(c)	1.21157 -4.39919	— —
(d)	0.8391 + 0.5440j 0.8391 - 0.5440j	— —

(a)は第一透視動座標系を固定したとき、 ϕ_{23} が一意的に決まる例である。一方、(b)は ϕ_{23} が二義的に決まる例を示す。鏡像関係にある第一透視動座標系でも同じことが言えるので、結局、法線ベクトルは(a)で二義的に、(b)で四義的に求まる。(c)および(d)は、解が存在しない場合を示す。ここで、(c)ではDが実数値であるのに対し、(d)では複素数値となるが、判定式(式(12))により、何れも解釈不能性が検出される。

5. 交角既知の三面頂点の解釈

5.1 一般の三面頂点解釈

前二章の議論より、3直交頂点の解釈問題は1次方程式に、また、2直交頂点の解釈は2次方程式に帰着される。これに対し、現在のところ、一般の三面頂点に対しては簡単な代数方程式が得られていない。そこで、ここでは、一般の三面頂点については数値解法により配置を推定することにする。数値解法としては、Barnard^[9]により提案された逆投影法、我々が前報告^[12]で提案した三角形探索法などが提案されているが、計算量が大きいという問題がある。そこで、次節で示す法線像仮説検定法と名付けた数値解法を新たに開発した。5.4節で詳述するように、この方法は解の探索空間の大きさ・単位計算量を評価基準としたとき、

逆投影法および三角形探索法に比べ優れている。

5. 2 法線像仮説検定法

(1) 基本的なアイデア

法線像仮説検定法は、前章で述べた二直交頂点解釈問題を部分問題として解くことにより一般の三面頂点解釈を行う方法であり、基本的なアイデアは以下の通りである。

即ち、三面頂点を構成する3つの面のうちの1つ (Γ_{23} とする) に注目すると、その法線 E_{23} と E_2 および E_3 からなる二直交頂点を考えることができる。ここで、 E_{23} の像 (法線像) $l_{2,3}$ は実際には観測できないが、これを仮定する (図12(a)) ことにより二直交頂点の解釈を求めることは可能である (図12(b))。次に、この解釈を仮説として用いることにより、 E_1 を推定することができる。従って、推定値が画像上で観測される E_1 の像と矛盾しないか否かを検定できれば、仮説の妥当性を検証することができる (図12(c))。即ち、 E_{23} の像として、考えうるすべての場合を考えることにすれば、妥当な解釈をすべて求めることができる。

(2) 具体的な計算手順

計算手順を5つのステップに分けて説明する。

ステップ1: (法線像存在範囲の算出)

E_{23} の無限遠点の位置は、 Γ_{23} を張る2つの稜線の像 l_2 と l_3 で規定されるPAT曲線上に制限される。従って、法線像 $l_{2,3}$ (即ち、仮想画像面上での法線像の方向) の存在範囲が求められる。

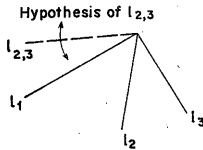
ステップ2: (二直交解釈、 E_2 および E_3 の復元)

あらゆる $l_{2,3}$ に対して、以下の計算を行う。まず、法線像 $l_{2,3}$ を仮定する (図12(a)) ことにより、式(10)で ϕ_{23} を求める。これを用いて E_2 および E_3 が次式で定まる (図12(b))。

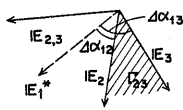
$$E_2 = \langle \cos \alpha_2 \cdot \sin \phi_{23}, \sin \alpha_2, \cos \alpha_2 \cdot \cos \phi_{23} \rangle$$

$$E_3 = \langle \cos \alpha_3 \cdot \sin \phi_{23}, \sin \alpha_3, \cos \alpha_3 \cdot \cos \phi_{23} \rangle$$

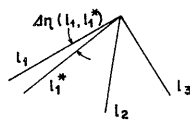
ただし、 $\tan \alpha_i = \tan \beta_i \cdot \sin \phi_{23}$



(a) Hypothesis of $l_{2,3}$, appearance of $l_{2,3}$



(b) Recovery of 2-orthogonal vertex and estimate of l_{E1}



(c) Test by appearance of l_{E1}

図12. 法線像仮説検定法の原理

4.2節の分析から、 $\Delta \beta_{23} < \Delta \alpha_{23} < \pi/2$ および $\Delta \beta_{23} > \Delta \alpha_{23} > \pi/2$ の場合には、法線像の配置により二直交頂点解釈に二義性 (但し、鏡像関係は除く) が残ることがある。しかし、どの法線像に対して解釈の多義性が残るのかについては、計算上、特に意識することはない。即ち、式(11)で求まる2つのDについて、独立に式(12)による判定を施し、妥当な二直交解釈をえれば良い。

ステップ3: (E_1 の推定)

ステップ2で求まったあらゆる二直交解釈に対して、 E_1 の推定を行う (図12(b))。即ち、 $\Delta \alpha_{12}$ および $\Delta \alpha_{13}$ が既知であるから、

$$E_i = \langle a_i, b_i, c_i \rangle \quad (i=1,2,3)$$

としたとき、 a_i, b_i, c_i を未知数として、次の連立方程式を解くことにより、 E_1 を推定できる。

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = \cos \Delta \alpha_{12}$$

$$a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = \cos \Delta \alpha_{13}$$

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$$

ここで、上の連立方程式による a_1, b_1, c_1 の推定値を、それぞれ a_1^*, b_1^*, c_1^* で表すことにすると、 a_1^*, b_1^*, c_1^* は次式で与えられる (但し、複号同順)。

$$a_1^* = \frac{a_2 \mu + a_3 \nu \pm (b_3 c_2 - b_2 c_3) \lambda}{\sin^2 \Delta \alpha_{23}} \quad (13)$$

$$b_1^* = \frac{b_2 \mu + b_3 \nu \pm (c_3 a_2 - c_2 a_3) \lambda}{\sin^2 \Delta \alpha_{23}} \quad (14)$$

$$c_1^* = \frac{c_2 \mu + c_3 \nu \pm (a_3 b_2 - a_2 b_3) \lambda}{\sin^2 \Delta \alpha_{23}} \quad (15)$$

但し、

$$\mu = \cos \Delta \alpha_{12} - \cos \Delta \alpha_{13} \cos \Delta \alpha_{23}$$

$$\nu = \cos \Delta \alpha_{13} - \cos \Delta \alpha_{12} \cos \Delta \alpha_{23}$$

$$\lambda^2 = 1 - \cos^2 \Delta \alpha_{12} - \cos^2 \Delta \alpha_{13} - \cos^2 \Delta \alpha_{23}$$

$$+ 2 \cos \Delta \alpha_{12} \cos \Delta \alpha_{13} \cos \Delta \alpha_{23}$$

なお、 μ, ν, λ は共に三面頂点により定まる量であり、見え方には依存しない。特に、 λ は幾何学で立体角正弦と呼ばれるものであり、 E_1, E_2, E_3 を三辺とする平行六面体の体積に等しい⁽⁸⁾。

式(13)~(15)により、各二直交解釈に対して、 E_2 と E_3 から E_1 の推定値 $E_1^* = \langle a_1^*, b_1^*, c_1^* \rangle$ が2通り求まる。

ステップ4: (E_1^* の検定)

各 E_1^* に対して、仮想画像面上で実際に観測される E_1 の像 $l_1 \langle a_1, b_1 \rangle$ と推定値 E_1^* から算出される像 $l_1^* \langle a_1^*, b_1^* \rangle$ との成す角度 $\Delta \eta (l_1, l_1^*)$ を計算する。ここで、 $\Delta \eta$ は次の二式を満たし、 $-\pi \sim \pi$ の値を取るものとする。

$$\sin \Delta \eta (l_1, l_1^*) = \frac{a_1 b_1^* - b_1 a_1^*}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_1^{*2} + b_1^{*2})}}$$

$$\cos \Delta \eta (l_1, l_1^*) = \frac{a_1 a_1^* + b_1 b_1^*}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_1^{*2} + b_1^{*2})}}$$

ここで、 $\Delta \eta (l_1, l_1^*) = 0$ を確認することにより、 E_{23} に関する仮説を検定できる (図12(c))。

ステップ5: (鏡像の復元)

最後に、仮説検定を通過した各解釈に対して、仮想画像面に対する鏡像を求めることにより、妥当な解釈が全て求まる。

なお、ステップ3において、 $\lambda = 0$ 、即ち E_1 が E_2 および E_3 と同一平面上にある場合についても式(13)~(15)により、 E_1^* の推定が可能である。従って、法線

像仮説検定法は E_1 、 E_2 および E_3 が平面上にある場合にも適用できる。

5. 3 実験結果

(1) 実験例

図13(a)の三面頂点を例として、法線方向 η と l_1 の推定誤差 $\Delta\eta$ の関係をプロットする図13(b)が得られる。このグラフから、 $\Delta\eta$ の零交差を検出することにより2つの解が求まる。即ち、図13(a)の配置に対しては、二義解(仮想画像面に対する鏡像を除く)が得られることが判る。図13(c)にはこの2つの配置を構成する単位ベクトルの成分表示およびその仮想画像面上での見え方を示す。

(2) 無作為な解釈に対する多義性の分布

解の構造を調べるため、 $\Delta\beta_{12}$ および $\Delta\beta_{13}$ を各0.1度刻みにとった画像を無作為に作成し、 $\Delta\alpha_{ij}$ を無作為(0.1度刻み)に選択して、法線仮説検定法を適用し、解の多義性を統計的に調べた。ここで、三面頂点を形成しない $\Delta\alpha_{ij}$ の組合せは予め除去した。表3に、実験結果から得られた解の多義性の相対頻度(母数10万)を示す。

表3より、統計的には、解が存在する確率は約80%であり、そのうちの70%では解は一意的であることが判る。また、解が存在する場合の解の個数の平均値は1.3であった。さらに、多義性は最大4であり、解釈が5個以上得られることは無かった。

表3. 無作為な解釈の多義性(鏡像を含まず)

解の数	0	1	2	3	4
相対頻度(%)	21.20	56.38	22.05	0.24	0.13
解が存在する場合中の相対頻度(%)	71.55	27.98	0.31	0.16	

(3) 正しい対応付けに対する解釈の多義性の分布

3次元空間内に無作為に4点を選択して三面頂点を作成し、これから得られる $\Delta\alpha_{ij}$ および画像から得られる $\Delta\beta_{ij}$ に対して、法線仮説検定法を適用し、解の多義性を統計的に調べた。表4に、実験結果から得られた解の多義性の相対頻度(母数10万)を示す。

表4より、解が存在する確率は100%であり、そのうちの50%では解は一意的であることが判る。また、解が存在する場合の解の個数の平均値は1.5であった。

さらに、多義性は最大4であり、解釈が5個以上得られることは無かった。また、解の数が4である場合について、 $\Delta\alpha_{ij}$ および $\Delta\beta_{ij}$ をそれぞれ1度の範囲で変化させ、解の数の変化を見たが、5個以上の解釈が得られる例は得られなかった。

表4. 正しい対応付けに対する解釈の多義性

解の数	0	1	2	3	4
相対頻度(%)	0.00	50.06	49.13	0.51	0.30

5. 4 考察

(1) 法線像仮説検定法と他の数値解法の比較

三面頂点解釈の数値解法としては、法線像仮説検定法の他にも様々な方法が考えられる。ここでは、これらのうち、2つの代表的な方法(逆投影法^[9]および三角形探索法^[12])を取り上げ、法線像仮説検定法との比較を行う。このうち、逆投影法はBarnard^[9]により3次元情報復元の一般的手法として提案されたものである。また、三角形探索法はKanade^[5]が斜め対称性を用いた形状復元に用いた手法を我々^[12]が三面頂点解釈に適用したものである。

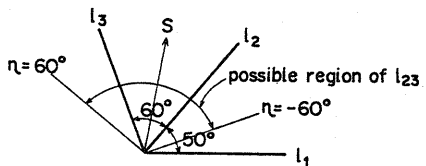
このうち、逆投影法は、力ずくの3次元探索解法であり、個々の計算は比較的簡単になるものの、探索空間が広いために計算量が膨大になるという欠点を持ち、あまり優れた方法とは言えない。

一方、三角形探索法と法線像仮説検定法とは、1次元探索解法である点では共通しているが、単位計算量の点で大きな差異がある。三角形探索法ではPAT曲線(4次曲線)と直線の交点計算が必要であり、4次方程式を解く必要がある。これに対し、法線像仮説検定法では二直交頂点解釈問題を解くことが基本となり、2次方程式を解けばよい。即ち、三角形探索法が4次方程式の1次元探索であるのに対し、法線像仮説検定法は2次方程式の1次元探索である。

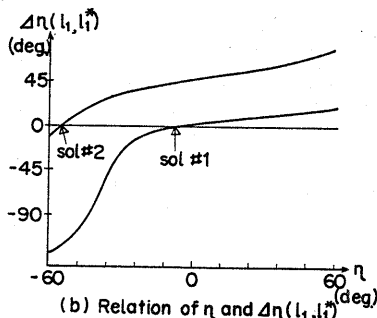
以上の比較から、法線像仮説検定法が他の2つの数値解法よりも計算量の点で優れていると結論できる。

(2) 解の数に関する考察

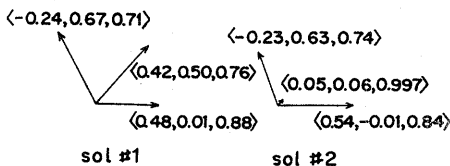
実在する配置をもとに得られた画像に上記の議論を適用した場合、求まる解(鏡像関係を除く)の数は下限が1であることは自明である。一方、その上限については、現在までに以下の結果が得られている。



(a) Image of trihedral vertex
($\Delta\alpha_{12}=30^\circ$, $\Delta\alpha_{23}=40^\circ$, $\Delta\alpha_{31}=60^\circ$)



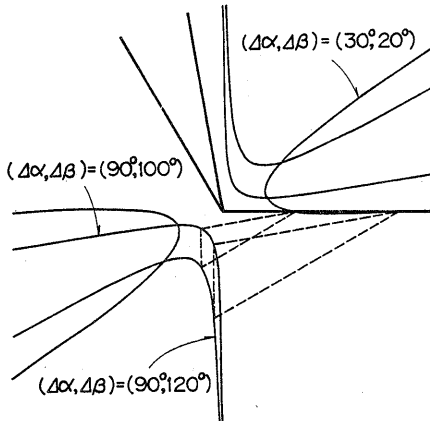
(b) Relation of η and $\Delta\eta(l_1, l_1^*)$



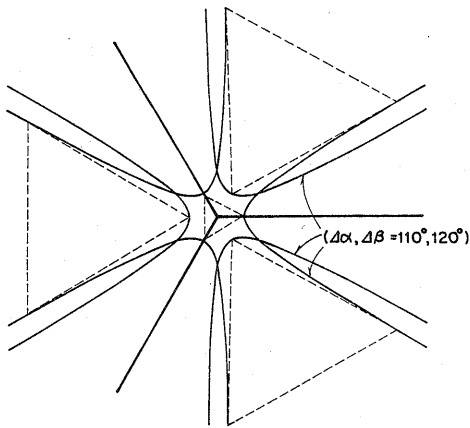
(c) Images of unit vectors of solutions

図13. 法線像仮説検定法の適用例

- a) 三直交頂点では、解の数の上限値は1である。即ち、三直交頂点の解釈は常に一意である。
- b) 二直交頂点の場合、解の数の上限値は2である。例えば、直角以外の角度 $\Delta\alpha, \Delta\beta$ について、次式が成立するとき、2つの解が存在する例をつくることのできる(図14(a))。
- c) 一般の三面頂点の場合、4個の解を持つ場合が存在する(図14(b))。また、5.3節の実験結果からは、5個の解を持つ例は検出されていない。



(a)二直交頂点の二義解釈の例



(b)一般三面頂点の四義解釈の例

図14. 多義解の例

6. まとめ

本報告では、まず、三面頂点解釈問題について、定量的解析を試みた。三面頂点のサブクラスである、三直交頂点および二直交頂点に対しては代数解を得ることができ、また解釈可能性の判定式を示すとともに、多義性の存在条件を明示できた。また、一般の三面頂点解釈問題に対する数値解法として、法線像仮説検定法を提案し、シミュレーションによりその有効性を確認するとともに解の構造を分析した。この結果は、3次元モデルに基づく物体認識^[13]などに、広く利用できると考えられる。

三面頂点解釈問題に対して、現在までに得られた結果を整理すると次表を得る。但し、最大解釈数には鏡像関係を含む。ここで、一般の三面頂点解釈問題が低次の代数方程式に帰着されるか否かは現在のところ明らかではない。一方、シミュレーション結果から得られた一般頂点の最大解釈数は8であることから、一般頂点についても低次の代数方程式に帰着される可能性が残されている。

表5. 三面頂点解釈問題の解の構造

	代数方程式の次数	1D探索解の単位計算の次数	最大解釈数
三直交	1	-	2
二直交	2	-	4
一直交	?	1	8?
一般	?	2	8?

なお、三面頂点解釈問題の一つの拡張として、共通交点が存在しない場合の三線分の3次元勾配を復元する問題^{[11][10]}がある。これに対して前論文^[11]では、三直交と二直交の場合について、それぞれ2次と4次の代数解を与えている。

本報告および前論文^[11]の議論はすべて、厳密な意味で中心投影法を取り扱っている。これらの手法は、実際の画像理解において広く適用可能と考えられる。

謝辞 日頃御指導戴く視覚情報研究部小森部長、末永主幹研究員に深謝致します。

[文献]

- [1] 尺長、金子, "透視角度変換—角度情報からの形状情報復元", 信学論(D), Vol. J70-D, No. 10, 1987.
- [2] Shakunaga, T. and Kaneko, H., "Perspective angle transform and its application to 3-D Configuration recovery", Proc. CVPR'86, 1986.
- [3] 尺長、金子, "透視動座標系による3次元空間の認識", 信学研資, PRL85-31, 1985.
- [4] Kanatani, K., "Camera rotation invariance of image characteristics", Proc. CVPR'86, 1986.
- [5] Kanade, T., "Recovery of the Three Dimensional Shape of an Object from a Single View", Artificial Intelligence, Vol. 17, 1981.
- [6] Perkins, D. N., "Visual discrimination between rectangular and nonrectangular parallelepipeds", Perception and Psychophysics, Vol. 12, No. 5, 1972.
- [7] Kanatani, K., "The constraints on images of rectangular polyhedra", IEEE Trans. PAMI, Vol. 8, No. 4, 1986.
- [8] 岩田至康編, 幾何学大辞典, Vol. 2, 槇書店, 1974.
- [9] Barnard, S. T., "Interpreting Perspective Images", Artificial Intelligence, Vol. 21, 1983.
- [10] Barnard, S. T., "Choosing a Basis for Perceptual Space", CVGIP, Vol. 29, 1985.
- [11] Mackworth, A. K., "Interpreting Picture of Polyhedral Scenes", Artificial Intelligence, Vol. 4, No. 2, pp. 121-137, 1973.
- [12] 尺長、金子, "透視角度変換による3次元情報抽出", 信学研資, PRU86-83, (CV研資, 87-46), 1987.
- [13] 尺長、金子, "3次元モデルに基づく単眼視物体認識—四面体配置推定法", S62信学シ全大, S13-3, 1987.