

## 直交性仮説による多面体の3次元形状復元

前原一夫 川島孝夫 金谷健一

群馬大学工学部情報工学科

多くの多面体物体には3辺が直交する頂点が多いことを利用し、カメラ画像からその3次元形状を復元する数学的手法を提案する。3辺が直交している頂点がわかれば、各辺の3次元方向は、カメラをレンズの中心の回りに回転し、その頂点を画像原点に移すのと同様な画像変換を適用することにより計算できる。これより各面の勾配も計算できる。しかし、これは一般に誤差を含んでいるので面の不適合が生じ、多面体形状を復元できない可能性がある。そこで、各面の勾配の推定値を平均的に満たすような最適化を行うことにより矛盾のない3次元形状を復元する。さらに、3辺が直交する頂点を発見する発見の手順を示す。最後に、実際の画像から復元した結果を示す。

### 3D RECOVERY OF POLYHEDRA BY RECTANGULARITY HEURISTICS

Kazuo Maehara, Takao Kawashima and Ken-ichi Kanatani

Department of Computer Science  
Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

The 3D shape of a polyhedron is reconstructed from its perspective projected image by applying the "rectangularity hypothesis". If one corner is known to be rectangular, the 3D orientations of its edges are computed by applying the camera rotation transformation in such way that its vertex is mapped onto the image origin. Hence, the surface gradients of its three faces are also computed. A heuristic algorithm is proposed to detect rectangular corners. In order to absorb inconsistencies in the computed estimates due to noise, an optimization scheme is presented to reconstruct a consistent polyhedron shape which satisfies the estimates "on the average". Our technique is illustrated by some examples based on real images.

## 1. 序論

人間は1枚の画像を見るだけでそこに描かれている物体を3次元的に解釈することができる。これを計算機に行わせる代表的な研究の1つとして多面体の線画解釈がある[1,13]。しかし、辺に凹凸を表すラベルを付けたり、3次元復元の可能性は調べることができても、3次元形状を一意的に復元することはできない。

一方、人間にはそれが可能であるから、知覚心理学に基づいた発見的仮説をあてはめることにより物体の一意的な3次元形状復元を可能にしようという研究がいろいろある。代表的な仮説としては、辺の平行性を仮定する「平行性仮説」[11,17]、面の形に関する「歪対称性仮説」[5]、閉曲線に関する「閉曲線仮説」[3]などがある。本論文では、辺の直交性を仮定する「直交性仮説」[2,5,10,12]を用いた復元を行う。我々のまわりの多くのものは直交する辺で構成されているのでこの仮説は妥当であろう。

本論文では画像処理によりすでに必要な情報が得られているものとして、直交性の仮説に基づき単一画像から多面体の3次元形状を復元する数学的手法を提案する。まず、カメラをレンズの中心の回りに回転すると同等な画像面の変換[6,7]を適用して、直交している3辺の3次元方向を計算する手法を示す。その結果、各面の勾配が決まる。しかし、これは一般に誤差を含んでいるので、データ間に矛盾が生じる。そこで、全体的に矛盾のない多面体の形状を復元するために最適化[8,9,15,16]を行う。最後に3辺が直交する頂点を発見する発見的手順を示す。さらに、実際の画像を用いて復元した結果を示す。

## 2. カメラの回転による変換

空間中にXYZ座標系をとり、Z軸をカメラの光軸とする。XY平面を画像面とし、Z軸上の点(0,0,-f)を視点(レンズの中心)とする中心投影を考える。空間中の点(X,Y,Z)はXY平面上の座標点(x,y)に次のように投影される(図1)。

$$x = \frac{fX}{f+Z}, \quad y = \frac{fY}{f+Z}. \quad (2.1)$$

カメラをレンズの中心の回りに回転したときの画像の変換を考える。

【定理1】カメラの回転を回転行列 $R=(r_{ij})$ (行列式1の直交行列)で表すと、点(x,y)は次のように、点(x',y')に動く。

$$x' = f \frac{r_{11}x + r_{21}y + r_{31}f}{r_{13}x + r_{23}y + r_{33}f}, \quad y' = f \frac{r_{12}x + r_{22}y + r_{32}f}{r_{13}x + r_{23}y + r_{33}f}. \quad (2.2)$$

証明。カメラの回転は、空間の逆方向の回転と同等である。空間が $R^{-1}=(R^T)$ だけ回転すれば、点(X,Y,Z)は次のように点(X',Y',Z')に移る(図2)。(Tは、転置を表す。)

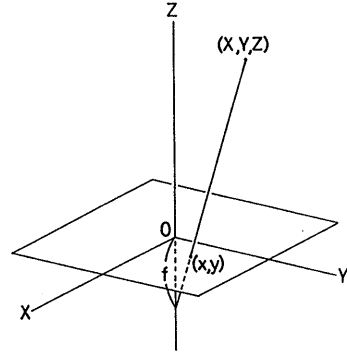


図1 視点と画像面との関係。

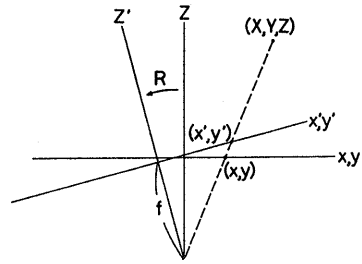


図2 カメラの回転による画像面の変換。

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ f+Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ f+Z \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

この点が投影される画像面上の点(x',y')は、 $x' = fX'/(f+Z')$ 、 $y' = fY'/(f+Z')$ で与えられる。この結果と式(2.1)により式(2.2)を得る。

【定理2】画像面上の任意の点(a,b)を画像の原点に移動するカメラの回転は次のように与えられる。

$$R(a,b) \equiv \begin{bmatrix} E & F & l_1 \\ F & G & l_2 \\ -l_1 & -l_2 & l_3 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$l_1 \equiv \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+f^2}}, \quad l_2 \equiv \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+f^2}}, \quad l_3 \equiv \frac{f}{\sqrt{a^2+b^2+f^2}}, \quad (2.5)$$

$$E \equiv \frac{a^2 l_3 + b^2}{a^2 + b^2}, \quad F \equiv \frac{ab(l_3 - 1)}{a^2 + b^2}, \quad G \equiv \frac{b^2 l_3 + a^2}{a^2 + b^2}. \quad (2.6)$$

証明。視点から画像面上の点(a,b)へ向かう3次元単位ベクトルは

$$l = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+f^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+f^2}}, \frac{f}{\sqrt{a^2+b^2+f^2}} \right) \quad (2.7)$$

となる(図3)。このベクトルとZ軸に沿う単位ベクトル  $k=(0,0,1)$  とのなす角は次のようになる。

$$\Omega = \tan^{-1} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{f}. \quad (2.8)$$

単位ベクトル  $l, k$  の両方に垂直な単位ベクトルは次のようになる。

$$n = \frac{k \times l}{\|k \times l\|} = \left( -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right). \quad (2.9)$$

もしカメラが単位ベクトル  $n=(n_1, n_2, n_3)$  の回りに右ネジ方向に角度  $\Omega$  だけ回転すれば、点  $(a, b)$  は画像の原点に移動する。その回転行列は次のようになる。

$$R = \begin{bmatrix} \cos \Omega + (1 - \cos \Omega) n_1^2 & (1 - \cos \Omega) n_1 n_2 - \sin \Omega n_3 \\ (1 - \cos \Omega) n_2 n_1 + \sin \Omega n_3 & \cos \Omega + (1 - \cos \Omega) n_2^2 \\ (1 - \cos \Omega) n_3 n_1 - \sin \Omega n_2 & (1 - \cos \Omega) n_3 n_2 + \sin \Omega n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - \cos \Omega) n_1 n_3 + \sin \Omega n_2 \\ (1 - \cos \Omega) n_2 n_3 - \sin \Omega n_1 \\ \cos \Omega + (1 - \cos \Omega) n_3^2 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

これに式(2.8)と(2.9)を代入すれば、式(2.4)を得る。

この回転  $R(a, b)$  を点  $(a, b)$  に関する「標準回転」と呼び、対応する画像変換を  $T_{(a, b)}$  と表し、点  $(a, b)$  に関する「標準変換」と呼ぶことにする。

画像面上の直線は次のように表せる。

$$Ax + By + C = 0. \quad (2.11)$$

これに変換(2.2)を適用すると、直線(2.11)は別の直線  $A'x + B'y + C' = 0$ 。 (2.12)

に写像される。

【定理3】係数の比  $A':B':C'$  は次のように与えられる。

$$r_{11}A + r_{21}B + r_{31}C/f : r_{12}A + r_{22}B + r_{32}C/f : fr_{13}A + r_{23}B + r_{33}C. \quad (2.13)$$

証明。投影の関係式(2.1)を代入すると、式(2.11)は  $A(fX/(f+Z)) + B(fY/(f+Z)) + C = 0$ 。すなわち

$$\begin{bmatrix} A & B & C/f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ f+Z \end{bmatrix} = 0. \quad (2.14)$$

と表せる。カメラを  $R$  だけ回転すると、式(2.3)の関係から  $A, B, C/f$  は次のように変換される。

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \\ C'/f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C/f \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

これから、式(2.13)が得られる。

画像面上で点  $(a, b)$  を始点とする半直線を考える。X軸から測った角度を半直線の方向角  $\phi$  とする。標準変換  $T_{(a, b)}$  を適用して、原点を始点とする半直線に写像したときの方向角  $\bar{\phi}$  をこの半直線の「標準角」と呼ぶことにする。

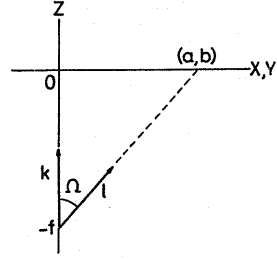


図3 画像面上の点を指す単位ベクトル。

【定理4】点  $(a, b)$  を始点とする方向角  $\phi$  の半直線の標準角  $\bar{\phi}$  は次のように与えられる。

$$\bar{\phi} = -\tan^{-1} \frac{(fE + a l_1) \tan \phi - (fF + b l_1)}{(fF + a l_2) \tan \phi - (fG + b l_2)}. \quad (2.16)$$

ただし、 $l_1, l_2, E, F, G$  は式(2.5), (2.6)で定義したものである。また、 $\tan^{-1}$ は2価関数であるので、二つの値のうち  $\phi$  に近い方を選ぶ。

証明。点  $(a, b)$  を通る直線は  $A(x-a) + B(y-b) = 0$  で表せる。この直線に標準変換  $T_{(a, b)}$  を適用すると  $\bar{A}x + \bar{B}y = 0$  の形になる。ただし、 $\bar{A}, \bar{B}$  は、式(2.4)を式(2.13)に代入して次のように得られる。

$$\frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{(fE + a l_1)A + (fF + b l_1)B}{(fF + a l_2)A + (fG + b l_2)B}. \quad (2.17)$$

もともとの直線の方向角を  $\phi$ 、標準角を  $\bar{\phi}$  とすれば、 $A/B = -\tan \phi$ 、 $\bar{A}/\bar{B} = -\tan \bar{\phi}$  が成立することから式(2.16)を得る。

この結果として、頂点の3次元形状を解析するとき、画像自身に標準変換を適用して別の画像を生成する必要はない。標準角が計算によって得られるからである。

### 3. 直交辺の3次元復元

互いに直交する3辺の投影像を考える。頂点の画像座標を  $(a, b)$  とし、 $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  ( $0 \leq \phi_1, \phi_2, \phi_3 < 2\pi$ ) を各辺の投影像の方向角とする。この3辺の3次元方向を計算するには、まず標準変換を適用して頂点が画像原点にくるようにすると、投影関係が平行投影の場合と同じになる。3辺の標準角  $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3$  は式(2.16)により計算できる。これらの辺の空間中でZ軸となす角をそれぞれ  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  ( $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi$ ) とする(図4)。それぞれの辺に沿った単位ベクトルは次のように与えられる。

$$\bar{n}_i = (\sin \theta_i \cos \bar{\phi}_i, \sin \theta_i \sin \bar{\phi}_i, \cos \theta_i), \quad i=1, 2, 3. \quad (3.1)$$

【定理5】3辺すべてが頂点を始点として、画像面から遠ざかるように配置しているとき、すなわち  $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi/2$  のとき、次式が成立する。

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \tan^{-1} \sqrt{-\frac{\cos(\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_3)}{\cos(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)\cos(\bar{\phi}_3 - \bar{\phi}_1)}} \\ \theta_2 &= \tan^{-1} \sqrt{-\frac{\cos(\bar{\phi}_3 - \bar{\phi}_1)}{\cos(\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_3)\cos(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)}} \\ \theta_3 &= \tan^{-1} \sqrt{-\frac{\cos(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)}{\cos(\bar{\phi}_3 - \bar{\phi}_1)\cos(\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_3)}}\end{aligned}\quad (3.2)$$

もし辺  $i$  が画像面に近づくように配置しているとき、すなわち  $\pi/2 < \theta_i < \pi$  なら、 $\theta_i$  をその「鏡像」 $\pi - \theta_i$  に置き換える。

証明. 3辺が互いに直交しているという条件は  $(n_i, n_j) = 0$ ,  $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ , すなわち

$$\sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_j) + \cos \theta_i \cos \theta_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, i \neq j, \quad (3.3)$$

であり、次のように書き換えられる。

$$\tan \theta_i \tan \theta_j = -\frac{1}{\cos(\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_j)}, \quad i, j = 1, 2, 3, i \neq j. \quad (3.4)$$

式(3.4)の三つの方程式の両辺をそれぞれかけ合わせて、 $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi/2$  と仮定して両辺の平方根をとると次式を得る。

$$\begin{aligned}\tan \theta_1 \tan \theta_2 \tan \theta_3 \\ = \sqrt{-\frac{1}{\cos(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)\cos(\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_3)\cos(\bar{\phi}_3 - \bar{\phi}_1)}}\end{aligned}\quad (3.5)$$

式(3.4)と(3.5)から定理が得られる。

各辺が画像面に近づくか遠ざかるかを判定するには、3辺の投影像の配置を考慮する必要がある。どの2辺も  $\pi/2$  より大きく  $\pi$  より小さい角をなすものを「フォーク」と呼び、ある2辺が  $\pi$  より大きく  $3\pi/2$  より小さい角をなし、残りの角が  $\pi/2$  より小さいものを「アロー」と呼ぶことにする(図5)。(2辺のなす角がちょうど  $\pi/2$  または  $\pi$  のものは考えないことにする。)

【定理6】3辺が直交していると解釈できる必要十分条件は、その投影像がフォークかアローであることである。

証明. これは、式(3.2)と(3.5)の根号の中が正になる条件から得られる。すなわち

$$\cos(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)\cos(\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_3)\cos(\bar{\phi}_3 - \bar{\phi}_1) < 0 \quad (3.6)$$

である。これを場合わけして調べれば定理が得られる。

式(3.4)をすべての場合について調べることにより次の定理を得る。

【定理7】投影像がフォークならすべての辺が画像面に近づくか遠ざかるかのどちらかである。アローなら両側の辺が画像面に近づき中央の辺が遠ざかるか、両側の辺

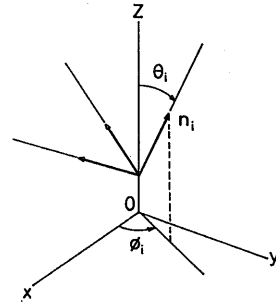


図4 頂点の投影は平行投影とみなせる。

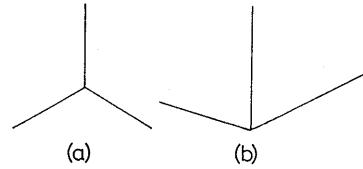


図5 (a)フォーク (b)アロー。

が画像面から遠ざかり中央の辺が近づくかのいずれかである。

頂点の投影像が画像原点に位置するようにカメラ回転をほどこした3辺の位置を「標準位置」と呼ぶことにする。

【定理8】ある辺の標準位置での3次元方向の単位ベクトルが  $\bar{n}$  であれば、その頂点が点  $(a, b)$  に投影される位置での3次元方向は次の単位ベクトルで与えられる。

$$\bar{n} = R(a, b)\bar{n}. \quad (3.7)$$

証明. 標準変換  $T_{(a,b)}$  を適用することは、空間がカメラに相対的に  $R(a, b)^{-1}$  だけ回転することと同等である。したがって、ベクトル  $\bar{n}$  に式(2.4)の  $R(a, b)$  をかければ、元の位置に変換される。

以上より、次の結論が得られる。

【定理9】中心投影のもとでは、直交する3辺の3次元方向は、鏡像を除いて唯一に復元できる。

#### 4. 最適化による多面体の3次元復元

多面体の形状は、それを構成する辺や面の3次元方向が決まれば、絶対的なスケールを除いて唯一に決定される。しかし、画像処理によるデータに誤差が含まれていれば問題が生じる。例えば、すべての面の勾配が求まっていれば、それらの面がちょうどそれらの投影像に投影

されるように、空間中でつぎ合わせることで形状を復元できるはずである。しかし、誤差が含まれていると、2つの隣接する面が1つの辺で交わらないという矛盾が起こる(図6)。矛盾のない3次元形状を復元するためには多面体の構造を考慮しなければならない。

多面体の隣接構造を次のように定義する。\$V\_i, i=1, \dots, n\$, を頂点, \$F\_\alpha, \alpha=1, \dots, m\$, を面とする。頂点\$V\_i\$が面\$F\_\alpha\$の上にあることを\$(F\_\alpha, V\_i)\$と表し、そのような対を「隣接対」と呼び、\$L\$を隣接対の数とする[14,15,16]。(3次元復元のためには隣接構造が「正則」である必要があるが、常に正則であるように修正できる[14,16]。) 頂点\$V\_i, i=1, \dots, n\$, の3次元座標を\$(X\_i, Y\_i, Z\_i)\$とし、\$Z=p\_\alpha X+q\_\alpha Y+r\_\alpha\$を面\$F\_\alpha, \alpha=1, \dots, m\$, の方程式とする。面\$F\_\alpha\$の勾配は\$(p\_\alpha, q\_\alpha)\$で表され、隣接条件\$(F\_\alpha, V\_i)\$は次式で表される。

$$Z_i = p_\alpha X_i + q_\alpha Y_i + r_\alpha \quad (4.1)$$

新しい変数 \$x\_i, y\_i, z\_i\$ を次のように定義する。

$$x_i = \frac{fX_i}{f+Z_i}, y_i = \frac{fY_i}{f+Z_i}, z_i = \frac{fZ_i}{f+Z_i} \quad (4.2)$$

すると \$x\_i, y\_i\$ は式(2.1)より、ちょうど頂点\$V\_i\$の画像座標となっている。また \$X\_i, Y\_i, Z\_i\$ が \$x\_i, y\_i, z\_i\$ と1対1対応し、逆の関係は次のようになる。

$$X_i = \frac{fx_i}{f-z_i}, Y_i = \frac{fy_i}{f-z_i}, Z_i = \frac{fz_i}{f-z_i} \quad (4.3)$$

式(4.3)を式(4.1)に代入すれば次式が得られる。

$$z_i = \frac{fp_\alpha}{f+r_\alpha}x_i + \frac{fq_\alpha}{f+r_\alpha}y_i + \frac{fr_\alpha}{f+r_\alpha} \quad (4.4)$$

ここで、新しいパラメータ \$P\_\alpha, Q\_\alpha, R\_\alpha\$ を次のように定義する。

$$P_\alpha \equiv \frac{fp_\alpha}{f+r_\alpha}, Q_\alpha \equiv \frac{fq_\alpha}{f+r_\alpha}, R_\alpha \equiv \frac{fr_\alpha}{f+r_\alpha} \quad (4.5)$$

逆の関係は次のようになる。

$$p_\alpha = \frac{P_\alpha}{1-R_\alpha}, q_\alpha = \frac{Q_\alpha}{1-R_\alpha}, r_\alpha = \frac{fR_\alpha}{1-R_\alpha} \quad (4.6)$$

これらの新しい変数を用いれば、条件(4.1)は次の式と等価である。

$$z_i = P_\alpha x_i + Q_\alpha y_i + fR_\alpha \quad (4.7)$$

\$x\_i, y\_i\$ は頂点の画像座標であるので既知である。\$n\$個の変数 \$z\_i, i=1, \dots, n\$, と、面に関する\$3m\$個のパラメータ \$P\_\alpha, Q\_\alpha, R\_\alpha, \alpha=1, \dots, m\$, が未知数であり、未知数に関して線形な方程式である。

各面の勾配の推定値を\$(\hat{p}\_\alpha, \hat{q}\_\alpha), \alpha=1, \dots, m\$, とし、真の勾配\$(p\_\alpha, q\_\alpha), \alpha=1, \dots, m\$, を次の式を最小にする最小二乗法で推定することを考える(図7)。

$$J = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m W_\alpha [(P_\alpha - \hat{p}_\alpha)^2 + (Q_\alpha - \hat{q}_\alpha)^2] \quad (4.8)$$

ここで、\$W\_\alpha\$は面\$F\_\alpha\$の重みである。式(4.6)をこれに代入すると、次のように未知パラメータ \$P\_\alpha, Q\_\alpha, R\_\alpha\$ で表せる。

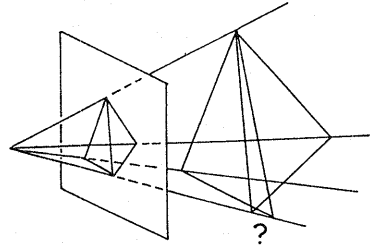


図6 面の接続の不適合。

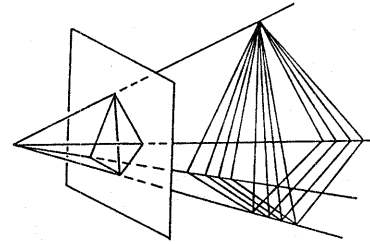


図7 無数の可能な解から最適化により解を選ぶ。

$$J = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m W_\alpha \left( \frac{f+r_\alpha}{f} \right)^2 [(P_\alpha - \hat{p}_\alpha R_\alpha - \hat{p}_\alpha)^2 + (Q_\alpha - \hat{q}_\alpha R_\alpha - \hat{q}_\alpha)^2] \quad (4.9)$$

面\$F\_\alpha\$の\$Z\$軸に沿う距離\$r\_\alpha\$や勾配が大きいと測定が不正確になりやすいので小さい重みを割り当てるのが妥当であろう。ここでは次のように選ぶ。

$$W_\alpha = \frac{1}{(\hat{p}_\alpha^2 + \hat{q}_\alpha^2 + 1) \frac{f}{f+r_\alpha}} \quad (4.10)$$

以上より、問題は式(4.7)を拘束条件とする最小化問題になる。ただし、物体の絶対的なスケールは決定できない。そこで、任意の1つの頂点を選んで、\$z\$の値を与えたとする。その頂点を\$V\_n\$とすると、最小化問題は次の定理にまとめられる。

【定理10】頂点\$V\_i, i=1, \dots, n-1\$, の各\$z\_i\$は、次の\$n+3m+L-1\$個の連立一次方程式を解くことで求まる。

$$P_\alpha x_i + Q_\alpha y_i + fR_\alpha - z_i = 0, \quad (F_\alpha, V_i) \quad (4.11)$$

$$P_\alpha + \hat{p}_\alpha R_\alpha + \sum_i (\hat{p}_\alpha^2 + \hat{q}_\alpha^2 + 1) x_i \Lambda_{\alpha i} = \hat{p}_\alpha, \quad \alpha=1, \dots, m, \quad (4.12)$$

$$Q_\alpha + \hat{q}_\alpha R_\alpha + \sum_i (\hat{p}_\alpha^2 + \hat{q}_\alpha^2 + 1) y_i \Lambda_{\alpha i} = \hat{q}_\alpha, \quad \alpha=1, \dots, m, \quad (4.13)$$

$$\sum_i (\hat{p}_\alpha x_i + \hat{q}_\alpha y_i - f) \Lambda_{\alpha i} = 0, \quad \alpha=1, \dots, m, \quad (4.14)$$

$$\sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha i} = 0, \quad i=1, \dots, n-1. \quad (4.15)$$

ただし総和は、存在する隣接対に対しとられる。

証明. 式(4.7)に対応するラグランジュ乗数 $\Lambda_{\alpha i}$ を導入すれば, 問題は次の制約なしの最小化問題となる.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m \frac{1}{\hat{p}_{\alpha}^2 + \hat{q}_{\alpha}^2 + 1} [(P_{\alpha} + \hat{p}_{\alpha} R_{\alpha} - \hat{p}_{\alpha})^2 + (Q_{\alpha} + \hat{q}_{\alpha} R_{\alpha} - \hat{q}_{\alpha})^2] + \sum_{\alpha i} \Lambda_{\alpha i} (P_{\alpha} x_i + Q_{\alpha} y_i + f R_{\alpha} - z_i). \quad (4.16)$$

式(4.11)は, 式(4.7)そのものである. 式(4.12), (4.13), (4.15)はそれぞれ $J$ を $P_{\alpha}$ ,  $Q_{\alpha}$ ,  $\alpha=1, \dots, m$ ,  $z_i$ ,  $i=1, \dots, n-1$ , について微分して0とおくことで得られる. 式(4.14)は $J$ を $R_{\alpha}$ について微分して0とおき, 式(4.12), (4.13)を代入して得られる.

すべての面 $F_{\alpha}$ ,  $\alpha=1, \dots, m$ , に対して勾配の推定値 $(\hat{p}_{\alpha}, \hat{q}_{\alpha})$ が与えられている必要はない. もし面 $F_{\alpha}$ の勾配の推定値が与えられていないときは, 式(4.12), (4.13), (4.14)は次式に置き換える.

$$\sum_i x_i \Lambda_{\alpha i} = 0, \quad \sum_i y_i \Lambda_{\alpha i} = 0, \quad \sum_i \Lambda_{\alpha i} = 0. \quad (4.17)$$

### 5. 直交辺発見法による最適化

1枚の画像からの多面体の3次元復元を考える. ある頂点において3辺が直交していることがわかれば, 3辺の3次元方向は鏡像を除いて計算できる. 各辺の方向は他の2辺で定義される面の法線を示すから3つの面の勾配が決まる. 互いに鏡像である2つの解の1つを選ばなければならないが, ここでは簡単のためいつでも正しい解を選ぶことができるとする.

もし1つの面がそのような頂点を2つ以上持っているなら, 各頂点で計算した勾配の平均値を勾配として割り当てる. また, そのような頂点を持たない面には勾配の推定値は与えられないが, 前節で指摘したように最適化には差し支えない.

残る問題は, どのようにして3辺が直交する頂点を見つけるかである. 一つの手がかりは定理6に基づく直交性テストである. すなわち, 標準角を計算して, 標準位置での投影像がフォークにもアローにもならないものを除く. 具体的に言えば, 3辺のつくる3つの角が次の条件の1つでも満たすならば, その3辺は直交し得ない(図8).

- (a) 1つが鋭角であり, 残りの2つが鈍角である.
- (b) 1つが鋭角であり, もう1つが鈍角であり, もう1つが $\pi$ より大きい.
- (c) 2つが鋭角であり, もう1つが $3\pi/2$ より大きい.

しかし, 残った頂点すべてで3辺が必ずしも直交しているとは限らない. 次の手がかりは, 2頂点についての適合性テストである. 少なくとも1つの面を共有する2つの頂点を選び, どちらも3辺が直交すると仮定し, それぞれ共有する面の勾配を計算する. もしこの仮定が正しいなら共有する面は一致した勾配を持つはずである. (ただし, ある程度の誤差は考慮しなければならない.) そうでないとき, 2頂点では同時には3辺が直交しない

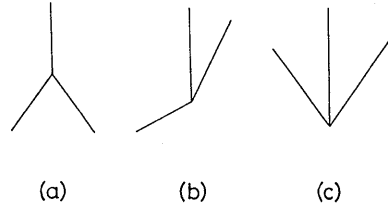


図8 直交する3辺の投影とみなせないもの.

と判断する.

残ったものに対する方法としてはいろいろ考えられるが, ここでは物体には直交する3辺が多いと仮定して, 矛盾がない限り仮定を広げて極大適合集合を作る. おのおのの集合に属する頂点ではすべて3辺が直交していると仮定するとこれらの極大適合集合と同じ数だけの解が得られる.

図9(a)は, 多面体の画像である. 図9(b)の線画が得られたとし, 頂点と面に図のようにラベル付ける. 頂点 $V_1, V_3, V_4, V_6, V_{10}$ で3辺が交わっている. (頂点 $V_8$ は,  $F_2$ だけに隣接する.) 最初に, 直交性テストにより頂点 $V_3$ が除かれる. 残りを, 少なくとも1つの面を共有している組にまとめると次の結果ようになる.

$$\{V_1, V_4\}, \{V_1, V_{10}\}, \{V_4, V_6\}, \{V_4, V_{10}\}, \{V_6, V_{10}\}.$$

これに対して適合性テストを行うと, どれも不適合が生じない. そこで, ただ1つの適合集合ができる. これらの頂点ではすべて3辺が直交すると仮定して, 各面の勾配を計算し, 前節で述べた最適化の方法を適用すれば, 図9(c)のような3次元形状が復元できる. この中で, 上の図は上面図であり, 下の図は側面図である.

図10(a)は別の画像である. 図10(b)の線画が得られたとし, 頂点と面に図のようにラベル付ける. 頂点 $V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_{10}$ で3辺が交わっている. 今度は, 直交性テストではどの頂点も除けない. これらを少なくとも1つの面を共有している組にまとめると次の結果ようになる.

$$\{V_2, V_3\}, \{V_2, V_4\}, \{V_2, V_6\}, \{V_2, V_7\}, \{V_2, V_{10}\}, \{V_3, V_4\}, \{V_3, V_5\}, \{V_3, V_6\}, \{V_3, V_7\}, \{V_3, V_{10}\}, \{V_4, V_5\}, \{V_4, V_6\}, \{V_5, V_6\}, \{V_5, V_7\}, \{V_5, V_8\}, \{V_6, V_7\}, \{V_6, V_8\}, \{V_6, V_{10}\}, \{V_7, V_8\}, \{V_7, V_{10}\}, \{V_8, V_{10}\}.$$

適合性テストによって, これらは2つの極大適合集合 $\{V_2, V_7, V_8, V_{10}\}$ ,  $\{V_3, V_4, V_5, V_6\}$ に分けられる. おのおのに属する頂点で3辺が直交すると仮定して, 各面の勾配を計算し, 最適化の方法を適用すれば, 図10(c)(d)の二つの3次元形状が復元できる.

図9(a)と10(a)の物体は実際には同じ物体であり, 復元した形状は正しい. このことから, もし違った角度から撮られた同じ物体の二つの画像があれば, 正しい解は同一の形状を持たなければならないことから偽の解は取

り除くことができる。

## 6. まとめ

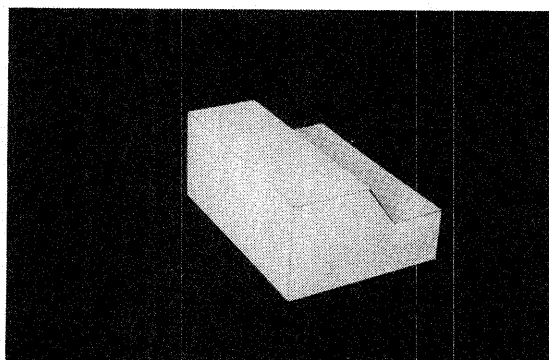
本論文では、中心投影された画像から多面体の3次元形状を復元する手法を示した。3辺が直交している頂点がわかれば各辺の3次元方向は、画像原点では角度情報に関して中心投影と平行投影との差がないことを利用したカメラの回転による変換を用いて計算できる。このようにして面の勾配の推定値が得られれば、画像処理による誤差を多面体の構造を考慮した最適化の手法を用いて克服することで矛盾のない3次元形状を復元できる。

また、3辺が直交する頂点を発見する発見の手順を示した。これらの手法を実際の画像に適用し、様々な多面体の3次元形状を正しく復元できた。

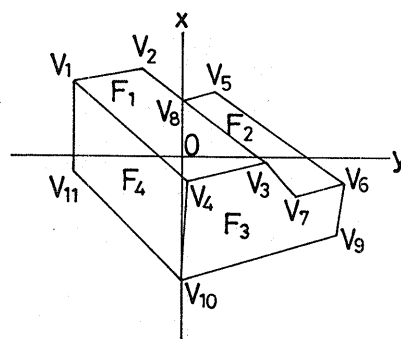
本研究の一部はカシオ科学振興財団研究助成金によった。

## 参考文献

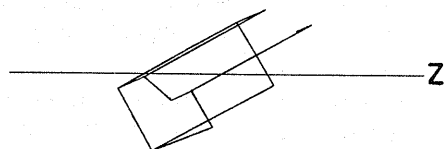
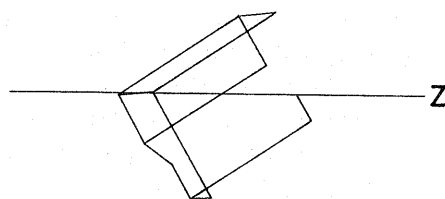
1. D. H. Ballard and C. M. Brown, Computer Vision, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NY, 1982 (福村晃夫他訳, コンピュータ・ビジョン, 日本コンピュータ協会, 1987).
2. S. T. Barnard, Choosing a basis of perceptual space, Comput. Vision Graphics Image Process., 29(1985), 87 - 99.
3. M. Brady and A. Yuille, An extremum principle for shape from contour, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., PAMI-6(1984), 288 - 301.
4. T. Kanade, Recovery of the three-dimensional shape of an object from a single view, Artif. Intell., 17(1981), 409 - 460.
5. K. Kanatani, The constraints on image of rectangular polyhedra, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., PAMI-8 (1986), 456 - 463.
6. 金谷健一, 長さや角度の拘束条件, 情報処理学会コンピュータビジョン研究会 49-5 (1987-3).
7. K. Kanatani, Camera rotation invariance of image characteristics, Comput. Vision Graphics Image Process., 39(1987), 328 - 354
8. 金谷・田中・前原・川島, 最適化による多面体の3次元形状復元, 情報処理学会第36回全国大会 (1988-3), 1643 - 1644.
9. 金谷・吉田, ノイズに強いオブティカルフローからの3次元復元, 情報処理学会コンピュータビジョン研究会 48-4 (1987-5).
10. A. K. Mackworth, Model-driven interpreta-



(a)



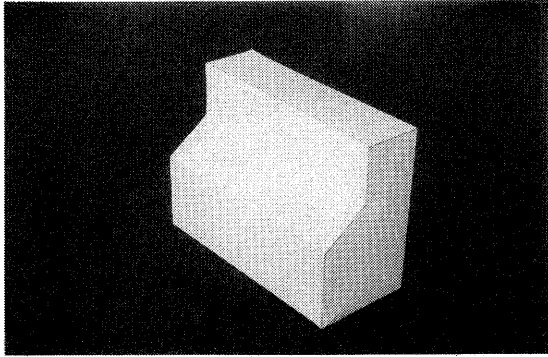
(b)



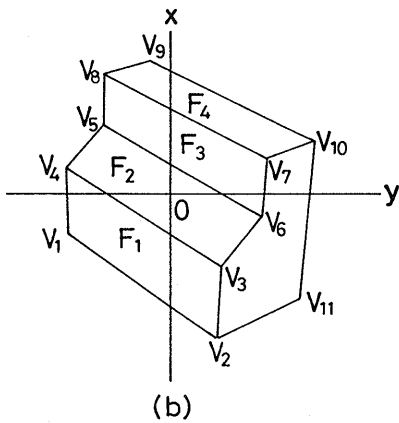
(c)

図9 (a) 物体の画像. (b) 線画と隣接構造.

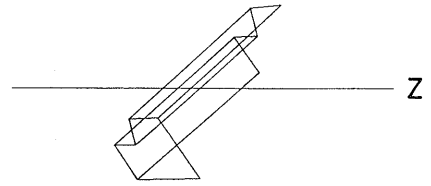
(c) 復元した3次元形状の上面図と側面図.



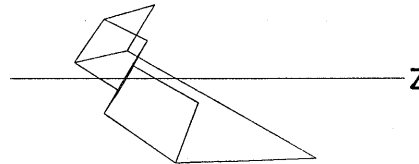
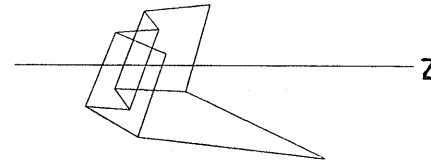
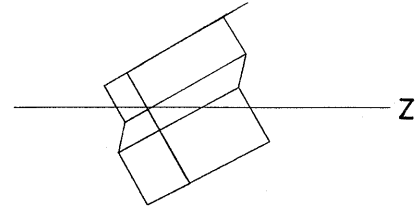
(a)



(b)



(c)



(d)

tion in intelligent vision systems, Perception, 5 (1976), 349 - 370.

11. P. G. Mulgaonkar and L. G. Shapiro and R. M. Hanalick, Shape from perspective: A rule-based approach, Comput. Vision Graphics Image Process., 36 (1986), 298 - 320.
12. 尺長・金子, 透視角度変換——角度情報からの形状情報復元——, 電子情報通信学会論文誌 J70-D(10) (1987), 1931 - 1940.
13. 白井良明, コンピュータビジョン, 昭晃堂 1980.
14. 杉原厚吉, 多面体線画の数理的構造——線画を介した計算機との対話をめざして, 情報処理 22(3) (1981), 209 - 217.
15. 杉原厚吉, 線画の代数構造を利用した単眼画像からの立体復元法, 電子通信学会論文誌 J66-D(5)

図10 (a) 物体の画像. (b) 線画と隣接構造.

(c) 復元した3次元形状の上面図と側面図 1.

(d) 復元した3次元形状の上面図と側面図 2.

(1983), 541 - 548.

16. K. Sugihara, Machine Interpretation of Line Drawings, MIT Press, Cambridge, MA, 1986.
17. 田中・川島・金谷, 平行性仮説による多面体の3次元復元, 情報処理学会コンピュータビジョン研究会 53-6 (1988-3).