

## 空間曲線のためのフーリエ記述子

井宮 淳 堀 英昭

金沢大学工学部 電気・情報工学科

平面曲線の記述法の1つにフーリエ記述子がある。特に、上坂によって考案されたP形フーリエ記述子は閉曲線にも適用でき、記述子からの再生曲線の安定性が良く視覚心理学的な結果とも整合性があることが知られている。3次元の自由曲面の特徴量のいくつかは、曲面上の曲線群を介して定義される。また、曲面上に特徴的な曲線群を定義できる。このような空間曲線をフーリエ解析すれば、曲面を記述するための高次の特徴量を抽出できることが期待される。本論文では、空間曲線を記述するためのフーリエ記述子を提案する。すなわち、平面曲線の記述のために提案されたP形フーリエ記述子を空間曲線にも適用できるように拡張する。まず、空間曲線の曲がりを決める関数と捻りを決める関数を定義する。次いで、この2つの関数のフーリエ変換として、空間曲線のフーリエ記述子を定義する。また、フーリエ記述子の性質を利用して空間曲線の複雑さを定量的に評価する基準を提案する。さらに、空間曲線の複雑さの尺度を利用して、メンタルローテーションの角度-反応特性を説明するモデルの構築を試みる。

## Fourier Descriptor for Spacial Curves

Atsushi IMIYA Hideaki HORI

Department of Electrical and Computer Engineering, Kanazawa University  
Kodatsuno 2, Kanazawa 920, Japan

The generalized cylinder is a method to represent a three dimensional object by a spacial curve, the axes of cylinder, and series of closed plane curves around the axes. Spectral analysis of the generalized cylinder extracts higher level features of a three dimensional object as the method does for two dimensional images. This paper proposes a Fourier descriptor for spacial curves. Our descriptor is a three dimensional version of the P type descriptor which is first introduced by Uesaka for the future extraction of open curves on planes. We also introduce a couple of measures to extract complexity of spacial curves. The measures provides a model for the rotation-prsponse curve of mental rotation of a three deimensional objest.

## 1 まえがき

平面曲線の特徴を記述する手法の1つとしてフーリエ記述子が知られている。これは、曲線を適当な変数の関数として表現し、その関数のフーリエ展開係数を曲線の特徴量として採用する方法である。上坂 [1] によって平面曲線の記述のために考案されたP形フーリエ記述子は、曲線の全曲率関数のフーリエ展開係数を特徴量として採用する曲線の記述法である。P形フーリエ記述子は閉曲線にも適用でき、記述子からの再生曲線の安定性が良く、視覚心理学の結果との整合性が良いことが知られている。

計算機支援治療計画では、多層に積み重ねられた人体の断面像を基に人体の表面形状を再構成することが行われる。各断面の輪郭の記述に平面閉曲線のためのフーリエ記述子を適用して、体表面形状を再構成する試みが提案されている [2]。

空間曲線とその周りの閉曲線によって3次元物体を表現する手法を、一般化円筒法という。一般化円筒の基準となる空間曲線を一般化円筒の軸という。一般化円筒法の軸は空間閉曲線になる。そして、一般化円筒法の軸はスプライン関数で表現することが多い [3]。一般化円筒法を表現する代表的な標本点だけに注目すると、軸や3次元物体の大局的な情報を効率良く抽出できることが期待できる。しかし、軸の記述にスプライン関数を採用すると、標本点の数が増えたとき軸の記述のための関数系を計算しなおす必要がある。そのため、代表的な標本点だけから再生される軸と、もとの軸との幾何学的な関係ははっきりとしない。

スプライン関数は、曲線の表現性においては優れているが、関数近似の立場から導入されたものであるため、空間曲線からその大域的な特徴量を抽出するための手段としては適していないのである。

3次元の自由曲面の特徴量のいくつかは、曲面上の曲線群を介して定義される。また逆に曲面上に特徴的な曲線群を定義することもできる [4]。このような曲面上の曲線群は閉曲線になるとは限らない。

曲面上の特徴的な曲線をフーリエ解析すると、曲面を認識するための高次の特徴量を抽出できることが期待できる。また、平面曲線の場合と同様に曲面の特徴量の視覚心理学的な意味も解明できることが期待できる。

そこで、一般化円筒法の記述や自由曲面の高次の特徴量を抽出するためには、平面曲線の場合と同様に、空間閉曲線にも適用できるフーリエ記述子を考案する必要がある。

本論文では、平面曲線の記述のために提案されたP形フーリエ記述子を空間曲線にも適用できるように拡張する。空間曲線を規定する特徴量は、曲線の曲がりを決める曲率と、捻りを決める振率である [4]。微分幾何学では、これらの量はなめらかな曲線に対して定義されている。

しかし、計算機において曲線の性質を解析するためには数値計算に適した幾何学量を新たに定義する必要がある。

ある。

そこで本論文ではまず、平面曲線の場合と同様に、折れ線によって離散近似された曲線に対して、空間曲線の曲率と振率とに対応する幾何学量を定義する。そして、これらの関数の離散フーリエ変換として、空間閉曲線にも適用できるフーリエ記述子を提案する。

提案する記述子は、平面曲線のP形フーリエ記述子を持っていたのと同様の性質を保存している。

また、フーリエ記述子のスペクトルの広がりに関数の複雑さとの関係に注目して、空間曲線の複雑さを定量的に評価する基準を提案する。これは、上坂 [5] が平面曲線の複雑さを評価するために提案したグシュタルト量を空間曲線の場合に拡張した尺度量である。

最後に、空間曲線のグシュタルト量を利用して空間図形のメンタルローテーション [6] の数理的な説明を試みる。

## 2 空間曲線の基本関数

3次元ユークリッド空間  $R^3$  の直交座標系を  $(x, y, z)$  とする。 $R^3$  のベクトル・の転置を  $\cdot^T$  と記すことにする。また、文脈から分かるのでベクトル  $(\cdot, \cdot, 0)^T$ ,  $(\cdot, 0, \cdot)^T$ ,  $(0, \cdot, \cdot)^T$  を  $(\cdot, \cdot)^T$  と略記する。

$R^3$  の連続曲線  $C$  の全長を  $S$  とする。 $C$  上の1点からの長さ  $s$  ( $0 \leq s \leq S$ ) の関数によって  $C$  を表す:

$$C = \{(x, y, z) | x = x(s), y = y(s), z = z(s)\} \quad (1)$$

ただし、曲線  $C$  が閉曲線の場合は曲線の一方の端点からの長さを測ることにする。

$n$  を任意に固定した正の整数とする。 $C$  を  $n$  本の折れ線で近似した空間図形を離散曲線と呼ぶことにする。折れ線の長さを十分短くすれば、離散曲線は  $C$  に近づく。しかも、離散曲線は  $C$  の幾何学的な性質を保存していると考えられる [1]。そこで本論文では、平面曲線の場合と同様に空間曲線の近似である離散曲線の性質を解析する [1]。以下では、離散曲線のことを単に曲線と呼ぶことにする。

曲線上の各線分の端点のベクトルを  $\vec{c}(k)$  とする:

$$\vec{c}(k) = (x(k), y(k), z(k))^T : k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

端点を  $C$  上に持つベクトル  $\{\vec{c}(k)\}_{k=1}^n$  からいくつかの関数を構成する。構成する関数の幾何学的な意味は、後で述べることにして、まず定義から始めることにする。

ベクトル  $(x(k), y(k), z(k))^T$  より、 $k \geq 1$  に対して、

$$\begin{aligned} \hat{x}(k) &= x(k) - x(k-1) \\ \hat{y}(k) &= y(k) - y(k-1) \\ \hat{z}(k) &= z(k) - z(k-1) \end{aligned} \quad (3)$$

と置き、ベクトル関数  $\vec{\pi}(k)$  を

$$\vec{\pi}(k) = (\hat{x}(k), \hat{y}(k), \hat{z}(k))^T : k = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

によって定義する。 $\vec{\pi}(k)$  は  $C$  上の隣接する2点を結ぶ折れ線の変化を表すベクトル関数である。

曲線  $C$  を構成する折れ線の長さ  $\delta(k)$  は

$$\delta(k) = \sqrt{\dot{x}(k)^2 + \dot{y}(k)^2 + \dot{z}(k)^2} : k = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

となる。本論文では、 $\delta(k)$  が一定値  $\delta$  である場合を取り扱うことにする。

ベクトル  $\{\vec{c}(k)\}_{k=0}^n$  を、 $z$  軸に平行な直線に沿って  $(x, y)$  平面に投影したベクトルを  $\{\vec{p}(k)\}_{k=0}^n$  とする：

$$\vec{p}(k) = (x(k), y(k))^T \quad (6)$$

ベクトル  $\{\vec{p}(k)\}_{k=0}^n$  より

$$p(k) = x(k) + iy(k) : k = 0, 1, \dots, n \quad (7)$$

によって複素関数  $p(k)$  を定義する。また、関数  $p(k)$  より

$$t(k) = p(k) - p(k-1) : k = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

によって複素関数  $t(k)$  を定義する。関数  $t(k)$  と、式 (3) の  $\dot{x}(k)$ , および  $\dot{y}(k)$  とは、

$$t(k) = \dot{x}(k) + i\dot{y}(k) \quad (9)$$

なる関係で結ばれている。関数  $t(k)$  の絶対値を  $\tau(k)$  と置くことにする：

$$\tau(k) = \sqrt{\dot{x}(k)^2 + \dot{y}(k)^2} : k = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

次に、

$$u(k) = \begin{cases} u(k-1) + \tau(k) & : k = 1, 2, \dots, n \\ 0 & : k = 0 \end{cases} \quad (11)$$

および、

$$v(k) = z(k) : k = 0, 1, \dots, n \quad (12)$$

によって関数  $u(k)$ ,  $v(k)$  を定義する。そして、

$$h(k) = u(k) + iv(k) : k = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

によって複素関数  $h(k)$  を定義する。

さらに、関数  $h(k)$  より、

$$r(k) = h(k) - h(k-1) : k = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

によって複素関数  $r(k)$  を定義する。関数  $r(k)$  と  $r(k)$  とは、

$$r(k) = \tau(k) + iz(k) : k = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

なる関係によって結ばれている。

ここで、上で定義した複素関数の幾何学的な意味を考えることにする。複素数  $x + iy$  と平面上のベクトル  $(x, y)$  を同一視すれば、関数  $p(k)$  は、 $(x, y)$  平面上に曲線を描く。関数  $p(k)$  の描く平面曲線を  $P$  とする。

$P$  は空間曲線  $C$  を  $z$  軸に平行な直線に沿って  $(x, y)$  平面へ正射影した曲線である。曲線  $P$  は、空間曲線  $C$  の  $z$  軸の回りの回転にだけ注目した曲線である。従って、 $p(k)$  は、空間曲線  $C$  の  $z$  軸の回りの回転を反映した関数と考えることができる。

関数  $t(k)$  は  $p(k)$  を微分した関数である。関数  $t(k)$  とベクトル  $\vec{t}(k)$ ：

$$\vec{t} = (\dot{x}(k), \dot{y}(k))^T : k = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

とを同一視すれば、 $t(k)$  は曲線  $P$  上の隣接する 2 点を結ぶ折れ線の変化を表す関数であることが分かる。

また、関数  $\tau(k)$  は平面曲線  $P$  上の隣接する 2 点を結ぶ折れ線の長さである。従って、曲線  $P$  を構成する折れ線の長さは一定値になるとは限らないことが分かる。

複素関数  $h(k)$  とベクトル  $\vec{h}(k)$ ：

$$\vec{h}(k) = (u(k), v(k))^T \quad (17)$$

とを同一視し、 $h(k)$  の描く平面曲線を  $H$  とする。

式 (11)(13) より、関数  $h(k)$  の実部  $\Re[h(k)]$  と関数  $\tau(k)$  とは

$$\Re[h(k)] = \sum_{i=1}^k \tau(i) : k = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

なる関係によって結ばれている。従って、 $\Re[h(k)]$  は平面曲線  $P$  の始点から点  $(x(k), y(k))^T$  までの全長である。さらに式 (12) より、 $h(k)$  の虚部  $\Im[h(k)]$  は曲線  $C$  の  $z$  座標である。すなわち、 $H$  は空間曲線  $C$  を  $(x, y)$  平面に直交する平面の 1 つに展開した曲線である。従って、曲線  $H$  は、空間曲線  $C$  の  $(x, y)$  平面からの隔たりを反映する曲線と考えることができる。本論文では、 $H$  を  $(x, z)$  平面上の曲線として取り扱うことにする。

また、曲線  $H$  を構成する折れ線の長さは

$$|h(k) - h(k-1)| = \sqrt{\dot{x}(k)^2 + \dot{y}(k)^2 + \dot{z}(k)^2} \quad (19)$$

となり、空間曲線  $C$  を構成する折れ線の長さと同じ。仮定より、 $C$  を構成する各折れ線の長さは一定値  $\delta$  である。従って、 $H$  を構成する折れ線の長さも一定値  $\delta$  になる。

関数  $r(k)$  は関数  $h(k)$  を微分した関数である。関数  $t(k)$  と同様に、関数  $r(k)$  と  $(x, z)$  平面上のベクトル

$$\vec{r} = (\tau(k), \dot{z}(k))^T : k = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

を同一視することにする。

定義より、関数  $\vec{c}(k)$  から関数の対  $(p(k), h(k))$  が一意に決まる。従って、空間曲線  $C$  より、2 つの平面曲線の対  $(P, H)$  を一意に決めることができる。

また逆に、関数の対  $(p(k), h(k))$  が与えられれば

$$\begin{aligned} x(k) &= \Re[p(k)] \\ y(k) &= \Im[p(k)] \\ z(k) &= \Im[h(k)] \end{aligned} \quad (21)$$

によって式 (2) のベクトル関数  $\vec{c}(k)$  を一意に決定できる。従って、平面曲線の対  $(P, H)$  から、空間曲線  $C$  を一意に構成できる。

すなわち、空間曲線  $C$  と平面曲線の対  $(P, H)$  とが 1 対 1 に対応している。そこで、2 つの複素関数  $p(k)$ ,

$h(k)$  を空間曲線の基本関数と呼ぶことにする。

### 3 全曲率関数と振率関数

$\vec{i}(k+1)$  と  $\vec{i}(k)$  との間の偏角  $\alpha(k)$  ( $-\pi \leq \alpha(k) \leq \pi$ ) を反時計方向を正に測ることにする。関数  $\alpha(k)$  と関数  $t(k)$ ,  $\tau(k)$  とは

$$\exp(i\alpha(k)) = \frac{t(k+1)}{\tau(k+1)} \cdot \frac{\tau(k)}{t(k)} : k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (22)$$

なる関係によって結ばれている。ただし,  $\alpha(0)$  はベクトル  $(x(0), y(0))^T$  と  $x$  軸との成す角とする。関数  $\alpha(k)$  を偏角関数と呼ぶことにする [1]。

また, ベクトル  $\vec{r}(k+1)$  と  $\vec{r}(k)$  との間の偏角  $\beta(k)$  ( $-\pi \leq \beta(k) \leq \pi$ ) を反時計回りを正として測ることにする。関数  $\beta(k)$  と関数  $r(k)$  とは

$$\exp(i\beta(k)) = \frac{r(k+1)}{|r(k+1)|} \cdot \frac{|r(k)|}{r(k)} : k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (23)$$

なる関係によって結ばれている。ただし,  $\beta(0)$  はベクトル  $(x(0), z(0))^T$  と  $(x, y)$  平面との成す角とする。関数  $\beta(k)$  を仰角関数と呼ぶことにする。

次に偏角関数  $\alpha(k)$  から

$$\phi(k) = \begin{cases} \phi(k-1) + \alpha(k) & : k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \alpha(k) & : k = 0 \end{cases} \quad (24)$$

によって関数  $\phi(k)$  を定義する。関数  $\phi(k)$  は,  $(x, y)$  平面上の曲線  $P$  の全曲率関数である [1]。

また式 (24) と同様に, 仰角関数  $\beta(k)$  から,

$$\theta(k) = \begin{cases} \theta(k-1) + \beta(k) & : k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \beta(k) & : k = 0 \end{cases} \quad (25)$$

によって関数  $\theta(k)$  を定義する。

ここで, 上で定義した複素関数の幾何学的な意味に付いて考えることにする。

偏角関数は, 曲線  $P$  の曲がりから決まる関数である。そして, 関数  $\phi(k)$  は曲線  $P$  の  $z$  軸の回りの回転角の累積値を表している。

空間曲線  $C$  が  $(x, y)$  平面上の曲線であると, 偏角関数と関数  $\phi(k)$  とは, 上坂 [1] が平面曲線に対して定義した関数と一致する。そこで, 関数  $\phi(k)$  を空間曲線  $C$  の全曲率関数と呼ぶことにする。そして, 2. において定義した曲線  $C$  の  $(x, y)$  平面へ射影曲線  $P$  を,  $C$  の曲率曲線と呼ぶことにする。

また, 仰角関数は  $(x, z)$  平面上の曲線  $H$  の偏角関数に成っている。従って, 仰角関数は,  $\vec{h}(k+1)$  の方向の,  $\vec{h}(k)$  の方向からのずれを表す尺度となる。

関数  $\theta(k)$  は,  $(x, z)$  平面上の曲線  $H$  の全曲率関数である。すなわち, 曲線  $C$  の  $(x, z)$  平面への展開曲線  $H$  がどれだけ回転したかを表している。また, 関数  $\theta(k)$  は, ベクトル  $\vec{n}(k)$  と  $(x, y)$  平面との成す角でもある。従って, 関数  $\theta(k)$  を空間曲線  $C$  の平面曲線  $P$  からの捻れの尺度と考えることができる。そこで,  $\theta(k)$  を空間曲線  $C$

の全振率関数と呼ぶことにする。そして, 2. において定義した曲線  $C$  の  $(x, z)$  平面へ展開曲線  $H$  を,  $C$  の振率曲線と呼ぶことにする。

$R^3$  の座標軸の回転を表す行列を

$$R(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta, & \sin \alpha \cos \beta, & \sin \beta \\ -\sin \alpha, & \cos \alpha, & 0 \\ -\cos \alpha \sin \beta, & -\sin \alpha \sin \beta, & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (26)$$

と置くことにする。そして, ベクトル  $\vec{n}(0)$  を

$$\vec{n}(0) = (\delta, 0, 0)^T \quad (27)$$

とする。

ベクトル  $\{\vec{n}(k)\}_{k=0}^n$  の始点を原点に移動して考えると, ベクトル  $\vec{n}(k+1)$  と  $\vec{n}(k)$  との間に

$$\vec{n}(k+1) = R(\alpha(k), \beta(k)) \cdot \vec{n}(k) : k = 0, 2, \dots, n-1 \quad (28)$$

なる関係が成立している。

全曲率関数  $\phi(k)$  はベクトル  $\vec{n}(0)$  からベクトル  $\vec{n}(k+1)$  に至る方位角の変化の累積である。同様に, 全振率関数  $\theta(k)$  はベクトル  $\vec{n}(0)$  からベクトル  $\vec{n}(k+1)$  に至る仰角の変化の累積である。従って, ベクトル  $\vec{n}(k+1)$  と  $\vec{n}(0)$  との間に

$$\vec{n}(k+1) = R(\phi(k), \theta(k)) \cdot \vec{n}(0) : k = 0, 2, \dots, n-1 \quad (29)$$

なる関係が成立する。

変数  $k$  を時間変数と考えれば, 偏角関数と仰角関数とが, 半径  $\delta$  の球面上のベクトル  $\{\vec{n}(k)\}_{k=1}^n$  の方向の単位時間内の変化率を表していることが分かる。

また, 全曲率関数と全振率関数とが, ある時間内にベクトルが球面上を動いた角度の累積を表していることが分かる。

従って, 式 (28)(29) を, 空間連続曲線のガウスの球面表示に対応して, 空間折れ線に対して成立する関係と考えることができる。

### 4 空間曲線の P 表現

3. の全曲率関数  $\phi(k)$  より構成される複素関数  $a(k)$ :

$$a(k) = \exp[i\phi(k)] : k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (30)$$

を全曲率関数の P 表現という [1]。

また式 (30) と同様に, 全振率関数  $\theta(k)$  より構成される複素関数  $b(k)$ :

$$b(k) = \exp[i\theta(k)] : k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (31)$$

を全振率関数の P 表現と呼ぶことにする。

式 (30)(31) によって定義される関数の組  $(a(k), b(k))$  を空間曲線  $C$  の P 表現と呼ぶことにする。

全曲率関数  $\phi(k)$  や全振率関数  $\theta(k)$  を経由せずに空間曲線の P 表現を定義することもできる。

まず、偏角関数の定義より、 $(x, y)$  平面上のベクトル  $\vec{r}(k)$  と  $x$  軸との成す角が全曲率関数そのものである。従って、

$$a(k) = \frac{p(k+1) - p(k)}{\tau(k+1)} : k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (32)$$

によって基本関数から直接関数  $a(k)$  を定義できる。

また同様に、仰角関数の定義より、 $(x, z)$  平面上のベクトル  $\vec{r}(k)$  と  $x$  軸との成す角が全振率関数そのものである。従って、

$$b(k) = \frac{h(k+1) - h(k)}{|h(k+1) - h(k)|} : k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (33)$$

なる関係が成立している。そこで、

$$\delta = |h(k+1) - h(k)| : k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (34)$$

であることを考慮すれば、

$$b(k) = \frac{h(k+1) - h(k)}{\delta} : k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (35)$$

によって、空間曲線  $C$  の基本関数から直接関数  $b(k)$  を定義できる。

しかし、平面曲線の定義の場合と同様、式 (24)(25) を通して、曲線の方向角の変化の累積値として、全曲率関数や全振率関数を定義した方が、折れ線近似された空間曲線の決める諸量の幾何学的な関係が明快になるのである。

P 表現と空間曲線  $C$  の決めるベクトル関数  $\vec{c}(k)$  との間に次の関係が成立する。

[定理 1] P 表現  $(a(k), b(k))$  から、

$$x(k) = x(0) + \delta \sum_{i=0}^{k-1} \Re[b(i)] \Re[a(i)] : k = 1, 2, \dots, n \quad (36)$$

$$y(k) = y(0) + \delta \sum_{i=0}^{k-1} \Re[b(i)] \Im[a(i)] : k = 1, 2, \dots, n \quad (37)$$

$$z(k) = z(0) + \delta \sum_{i=0}^{k-1} \Im[a(i)] : k = 1, 2, \dots, n \quad (38)$$

によって、ベクトル関数  $\vec{c}(k)$  を再生できる。

(証明)

式 (35) を  $h(k)$  に関して解けば

$$h(k) = h(0) + \delta \sum_{i=0}^{k-1} b(i) \quad (39)$$

を得る。同様に、式 (32) を  $p(k)$  に関して解けば

$$p(k) = p(0) + \sum_{i=0}^{k-1} (\tau(i+1)) \cdot a(i) \quad (40)$$

を得る。また、

$$\tau(k) = \delta \cdot \Re[b(k)] \quad (41)$$

である。従って、式 (21) を考慮すれば定理を得る。

(証明終)

定理 1 より、ベクトル  $\vec{c}(0)$ :

$$\vec{c}(0) = (x(0), y(0), z(0))^T \quad (42)$$

と曲線を構成する折れ線の長さ  $\delta$  との不定性を除けば、P 表現より空間曲線  $C$  を一意に決定できる。すなわち、もとの曲線の平行移動と拡大・縮小の不定性を除いて曲線と P 表現とが 1 対 1 に対応しているのである。これは、平面曲線の P 表現とまったく同様の性質である。

次に、曲線の回転を考える。  $C$  を  $z$  軸の回りに反時計回りに角度  $\alpha$  だけ回転した曲線を  $\tilde{C}$  とする。そして、 $\tilde{C}$  の決める曲率曲線を  $\tilde{P}$  とし、振率曲線を  $\tilde{H}$  とする。

平面曲線の P 表現の性質より、 $\tilde{P}$  の P 表現は  $e^{i\alpha} a(k)$  である。そして、 $\tilde{H}$  の P 表現は  $b(k)$  である。

以上のことから、 $(a(k), b(k))$  と曲線  $C$  との間に次の性質が成立する。

- $(a(k), b(k))$  は曲線  $C$  の平行移動に関して不変な量である。
- $(a(k), b(k))$  は曲線  $C$  の拡大・縮小に関して不変な量である。
- 曲線  $C$  を  $z$  軸の回りに角度  $\alpha$  だけ回転した曲線  $\tilde{C}$  の P 表現は  $(e^{i\alpha} a(k), b(k))$  である。

以上の性質より、空間曲線の P 表現が平面曲線の P 表現 [1] と同様の性質を持つことが分かる。

## 5 空間曲線の P 形フーリエ記述子

P 表現  $(a(k), b(k))$  のフーリエ変換  $(A(k), B(k))$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ):

$$A(k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} a(m) \exp[-2\pi i \frac{km}{n}] \quad (43)$$

$$B(k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} b(m) \exp[-2\pi i \frac{km}{n}] \quad (44)$$

を、平面曲線の場合と同様に、空間曲線  $C$  の P 形フーリエ記述子と呼ぶことにする (以下、P 形記述子と略称する.)。

式 (43)(44) の P 形記述子  $(A(k), B(k))$  を逆フーリエ変換すると、P 表現  $(a(k), b(k))$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ): を再生できる:

$$a(k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} A(m) \exp[-2\pi i \frac{km}{n}] \quad (45)$$

$$b(k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} B(m) \exp[-2\pi i \frac{km}{n}] \quad (46)$$

フーリエ変換が 1 対 1 変換であること、フーリエ変換の位相定理とより P 表現の性質に対応して、P 形記述子も次の性質を持つ。

- $(A(k), B(k))$  は曲線  $C$  の平行移動に関して不変な量である。

- $(A(k), B(k))$  は曲線  $C$  の拡大・縮小に関して不変な量である。
- 曲線  $C$  を  $z$  軸の回りに角度  $\alpha$  だけ回転した曲線  $\tilde{C}$  の P 形記述子は  $(e^{i\alpha}A(k), B(k))$  である。

$n$  が偶数の場合を考えることにする。そして、

$$\hat{A}(k) = \begin{cases} A(k) & : k = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} \\ A(n+k) & : k = -\frac{n}{2} + 1, -\frac{n}{2} + 2, \dots, -1 \end{cases} \quad (47)$$

$$\hat{B}(k) = \begin{cases} B(k) & : k = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} \\ B(n+k) & : k = -\frac{n}{2} + 1, -\frac{n}{2} + 2, \dots, -1 \end{cases} \quad (48)$$

によって P 形記述子の番号を付け変えることにする。

逆フーリエ変換変換の性質より、 $(\hat{A}(k), \hat{B}(k))$  から、

$$a(k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=-\frac{n}{2}+1}^{\frac{n}{2}} \hat{A}(m) \exp[-2\pi i \frac{km}{n}] \quad (49)$$

$$b(k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=-\frac{n}{2}+1}^{\frac{n}{2}} \hat{B}(m) \exp[-2\pi i \frac{km}{n}] \quad (50)$$

によって、P 表現  $(a(k), b(k))$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) を復元できる。

式 (47)(48) において  $|k| > N$  に対して

$$\hat{A}(k) = 0 : |k| > N \quad (51)$$

$$\hat{B}(k) = 0 : |k| > N \quad (52)$$

として、P 形記述子から再生される P 表現:

$$a_N(k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=-N}^N \hat{A}(m) \exp[-2\pi i \frac{km}{n}] \quad (53)$$

$$b_N(k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=-N}^N \hat{B}(m) \exp[-2\pi i \frac{km}{n}] \quad (54)$$

$: k = 0, 1, \dots, n-1$

を  $N$  次の P 表現と呼ぶことにする。

そして、 $N$  次の P 表現から

$$x_N(k) = x(0) + \delta \sum_{i=0}^{k-1} \Re[b_N(i)] \Re[a_N(i)] \quad (55)$$

$$y_N(k) = y(0) + \delta \sum_{i=0}^{k-1} \Re[b_N(i)] \Im[a_N(i)] \quad (56)$$

$$z_N(k) = z(0) + \delta \sum_{i=0}^{k-1} \Im[a_N(i)] \quad (57)$$

$: k = 0, 1, \dots, n$

によって計算されるベクトル関数  $\vec{c}_N(k)$ :

$$\vec{c}_N(k) = (x_N(k), y_N(k), z_N(k))^T : k = 0, 1, \dots, n \quad (58)$$

の決める空間曲線  $C_N$  を平面曲線の場合と同様に、 $C$  の  $N$  次の再生曲線と呼ぶことにする。

$N$  次の P 表現は、 $(a(k), b(k))$  を低域通過フィルタに通した後の関数の対である。すなわち、 $N$  次の P 表現は空間曲線  $C$  の大局的な情報を担っていると考えることができる。従って、 $N$  次の再生曲線  $C_N$  はもとの曲線  $C$  のある種の近似曲線になっている。

## 6 空間曲線の複雑さの定量的解析

P 表現  $(a(k), b(k))$  のパワースペクトルの対を  $(P(k), H(k))$  とする:

$$P(k) = |A(k)|^2 : k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (59)$$

$$H(k) = |B(k)|^2 : k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (60)$$

そして、 $P(k)$  のエントロピーを  $G_C$  とし、 $H(k)$  のエントロピーを  $G_T$  とする:

$$G_C = - \sum_{k=0}^{n-1} P(k) \log P(k) \quad (61)$$

$$G_T = - \sum_{k=0}^{n-1} H(k) \log H(k) \quad (62)$$

もとの関数が複雑で凸凹が多いと、その関数のパワースペクトルが周波数領域で広がった関数になる。そして、パワースペクトルのエントロピーは大きくなる。すなわちパワースペクトルのエントロピーを関数の複雑さの尺度として採用することができる。

$G_C$  は空間曲線  $C$  の曲率曲線  $P$  の複雑さの尺度と考えることができる。同様に、 $G_T$  は空間曲線  $C$  の振率曲線  $H$  の複雑さの尺度と考えることができる。

従って、

$$G_S = \sqrt{G_C^2 + G_T^2} \quad (63)$$

を、空間曲線が全体としてどれだけ凸凹かを反映した量と考えることができる。そこで、 $G_S$  を曲線の大局的な滑らかさの尺度として採用する。 $G_S$  を空間曲線の曲ゲシュタルト量と呼ぶことにする。

一方、

$$f = \operatorname{arccot} \frac{G_T}{G_C} \quad (64)$$

は振率曲線の複雑さと曲率曲線の複雑さとの比を規格化した量である。曲線  $C$  が空間的に捻れていると、振率曲線の複雑さが増して  $f$  が大きくなる。そこで、 $f$  を曲線の空間的な捻れの尺度として採用する。 $f$  を空間曲線の捻りゲシュタルト量と呼ぶことにする。

$G_S$  と  $f$  とから

$$\Gamma = G_S \exp[i \frac{1}{f}] \quad (65)$$

によって定義される複素量  $\Gamma$  を空間曲線のゲシュタルト量と呼ぶことにする。

エントロピーの対  $(G_C, G_T)$  とゲシュタルト量とは

$$\Gamma = G_C + iG_T \quad (66)$$

なる関係で結ばれている。曲線が  $(x, y)$  平面上の曲線であると、 $\Gamma$  は平面曲線のゲシュタルト量 [5] と一致する。

## 7 空間曲線の整合問題

空間曲線  $K$ :

$$K = \{(x, y, z) \mid x = \hat{x}(s), y = \hat{y}(s), z = \hat{z}(s)\} \quad (67)$$

を回転した曲線を  $\hat{C}$  とする:

$$\hat{C} = \{(X, Y, Z) \mid X = X(s), Y = Y(s), Z = X(s)\} \quad (68)$$

$$\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \\ Z(s) \end{pmatrix} = R(\phi, -\theta) \begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \\ \hat{z}(s) \end{pmatrix} \quad (69)$$

2つの曲線  $C$  と  $\hat{C}$  と間に:

$$\begin{aligned} x(s) &= X(s) \\ y(s) &= Y(s) \\ z(s) &= Z(s) \end{aligned} : 0 \leq s \leq S \quad (70)$$

なる関係が成立しているかを、人間が判断するために要する計算時間を定量的に評価する問題を考察する。

式 (70) が成立することを判断するために人間は局所的な情報量よりも、曲線の大局的な幾何学構造を利用していると考えることができる。ここでは、1つの仮説として、ゲシュタルト量を判断基準とする計算モデルを提案する。

曲線  $K$  のゲシュタルト量は回転角  $\theta$  の関数となる。そこで、座標の回転角を  $\theta$  固定したとき、曲がりゲシュタルト量を  $G_S(\theta)$ 、捻りゲシュタルト量を  $f(\theta)$  と記すことにする。

空間的に回転した曲線ともとの曲線との整合性を判断する際、人間は曲線  $C$  を回転すると曲線の複雑さがどの様に変化するかを、もとの曲線と表示された曲線との間の回転角度の回転曲線全てに対して複雑さの計算を行いながら、どの回転角に対して式 (70) が成立するかを判断していることが推測できる。

さらに、曲線を空間的に回転した場合、人間は、曲がりの変化よりも捻りの変化を敏感に感じ取ることが推測できる。従って、曲線の整合性の判定に要する時間は、個々の角度に対して曲線の捻りの複雑さを計算する時間の全累積時間と考えることができる。

回転角が  $\theta$  の曲線ともとの曲線との整合性を判定するまでに要する全計算時間を  $t(\theta)$  とする。回転角が  $\theta$  である場合の複雑さの計算時間と回転角が  $\theta + \Delta\theta$  である場合の複雑さ計算時間との差は、曲線の捻りの微小変化  $f(\theta)\Delta\theta$  にほぼ比例するであろう:

$$(\theta + \Delta\theta) - t(\theta) \propto f(\theta)\Delta\theta \quad (71)$$

式 (71) を零から  $\theta$  まで積分すると、 $K$  と  $C$  との整合性を判断するために要する全計算時間の理論式を得る。すなわち、 $f(\theta)$  と  $t(\theta)$  との間には

$$t(\theta) = \int_0^\theta f(\sigma) d\sigma : -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (72)$$

なる関係が成立するであろう。ただし、 $c$  は正の定数である。

角度  $\theta$  に関する周期性より、

$$t(\theta + 2\pi) = t(\theta) \quad (73)$$

によって、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$  に対して関数  $t(\theta)$  を定義する。

関数  $t(\theta)$  は、 $\theta = \pi$  において最大となる山状関数になる。関数  $t(\theta)$  の特性は、メンタルローテーションの角度-反応曲線 [6] と良く似た特性を持っている。これは、簡単な空間線図形のメンタルローテーションの角度-反応曲線の特性を、曲線の複雑さの計算に要する時間と曲線の回転角との関係として解釈できることを示している。

## 8 むすび

本論文では、空間開曲線の記述のための新しいフーリエ記述子を提案した。すなわち、曲線を折れ線によって近似し、隣接する折れ線の方向の変化から曲がりと捻りとを決める関数をそれぞれ定義した。次いで、この2つの関数の離散フーリエ変換として、空間曲線のP形フーリエ記述子を定義した。また、フーリエ記述子を利用して空間曲線の複雑さを定量的に評価するための尺度を提案した。提案した尺度によって、空間曲線の視覚心理学的な性質を全て説明できるとは限らない。しかし、3次元空間に存在する曲線や、物体の複雑さを定量的に解析する手がかりを与えている。

今後、提案した空間曲線の複雑さの解析法を3次元物体や3次元自由曲面の複雑さの解明に適用する予定である。

本研究の一部にご協力いただいた金沢大学川田博之氏 (現在、北銀ソフトウェア(株))、安田篤司氏 (現在、YHP(株)) に感謝する。本研究の一部は、文部省からの科学研究費補助金によるものである。

## 参考文献

1. 上坂吉則, 開曲線にも適用できる新しいフーリエ記述子, 信学論 (A), J67-A, pp.166-173, (1984)
2. K. S. Park, N. S. Lee, *A three-dimensional Fourier descriptor for human body representation/reconstruction from serial cross section*, Compt. and Biomed. Res. Vol. 20, pp. 125-140, (1987)
3. U. Shani, B. H. Ballard, *Spline as embeddings for generalized cylinder*, Compt. Vision, Graph., and Image Proc. Vol. 27, pp.129-156, (1984)
4. 小林昭七, 曲線と曲面の微分幾何, 裳華房, (1977)
5. 上坂, 田嶋, 図形文節を説明するためのモデル, 信学論 (D), J59-D pp.1-8, (1976)
6. 高橋陽太郎, 傾いた図形の謎, 東京大学出版会, (1987)

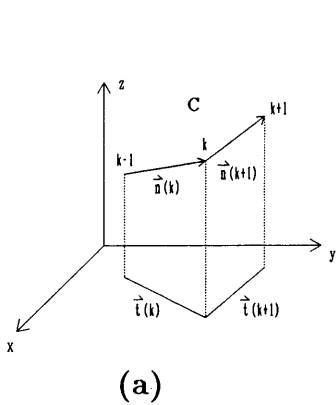


図 1.

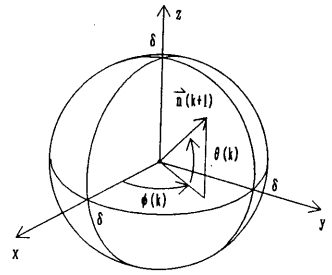
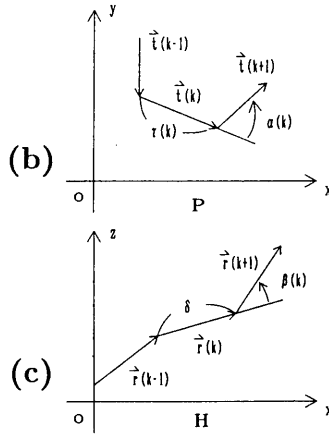


図 2.

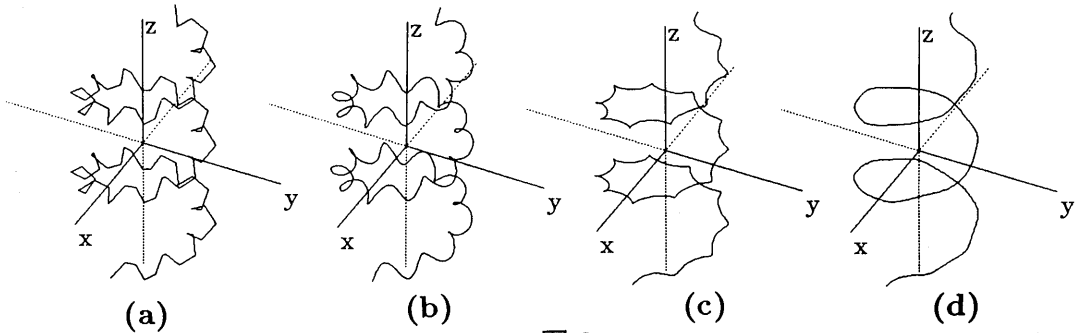
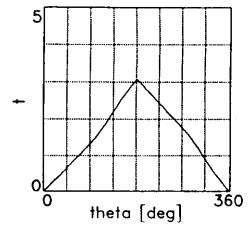
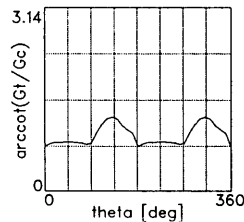
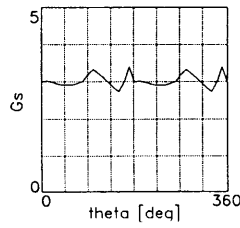
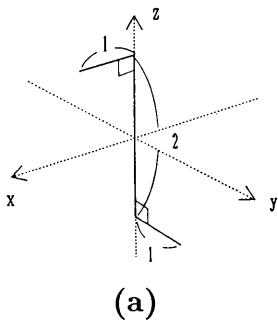


図 3.



(a)

(b)

図 4.

(c)

(d)

図 1. 空間曲線  $C$  の, (a)  $(x, y)$  平面への射影曲線  $P$  が  $C$  の曲率曲線である. 曲線  $C$  の  $(x, z)$  平面への展開曲線  $H$  が  $C$  の振率曲線である. (b) 曲線  $P$  の偏角関数  $\alpha(k)$  は曲線  $C$  の  $z$  軸の回りの変化を反映している. (c) 仰角関数  $\beta(k)$  は振率曲線  $H$  の偏角関数である.

図 2. ベクトル  $\{\vec{n}(k)\}_{k=0}^n$  を半径  $\delta$  の球に埋め込むと, 全曲率関数  $\phi(k)$  はベクトル  $\vec{n}(0)$  からベクトル  $\vec{n}(k+1)$  に至る方位角の変化の累積であり, 全振率関数  $\theta(k)$  はベクトル  $\vec{n}(0)$  からベクトル  $\vec{n}(k+1)$  に至る仰角の変化の累積である.

図 3. 螺旋  $x = (a + b \cos ut) \cos vt$ ,  $y = (a + b \cos ut) \sin vt$ ,  $z = ct + b \sin ut$  ( $a = 1, b = 1/5, c = 1/25, u = \pi/2, v = \pi/20$ ) の  $-2 \leq z \leq 2$  の部分の表示. (a) 512 点の標本点を折れ線でつないだ曲線, (b) 30 次の再生曲線, (c) 25 次の再生曲線 (d) 20 次の再生曲線. 記述子の通過帯域幅を狭くしていくと, 空間曲線の大局的な情報を抽出できる.

図 4. (a) の空間曲線を  $\phi = 0$  として  $\theta$  を変化させた際の (b) 曲グシュタルト量  $G_s(\theta)$ , (c) 捻りグシュタルト量  $f(\theta)$ , および (d) 整合判断の全計算時間  $t(\theta)$  ( $c = 1$ ) の角度依存特性.  $t(\theta)$  の形状とメンタルローテーションの角度一反応特性 [6] とが同様の形状をしている.