

## 構造解析による波形の構造照合について

伊藤泰雅      和田俊和      佐藤誠

東京工業大学      精密工学研究所

あらまし      2つの波形間の対応を求めるという波形の照合問題は、信号処理をはじめとする様々な分野における重要な課題の1つである。従来この問題に対しては、波形上の特徴点を直接対応付けるための手法が、主に検討されてきた。波形の凹凸構造は本来、階層構造を持っている。この階層構造を対応付けることにより、精度の良い、しかも安定した対応付けが可能になると考えられる。

本報告では、波形の階層構造に着目し、この階層構造を対応付ける「構造照合」という問題を新たに提案する。まず、尺度空間フィルタリングにより得られる2次零交差線の、包含関係を用いて波形の階層構造を表わす。そして、この階層構造を構造点の木構造として記述し、波形間の形態の変動構造を確率的に表現することで、波形の構造照合を最尤推定問題として定式化する。さらに、この問題の解法を論じる。

## On a Structural Matching for Waveforms

Yasumasa Itoh      Toshikazu Wada      Makoto Satoh

Research Laboratory of Precision Machinery and Electronics

TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Nagatsuta, Midori-ku, Yokohama-shi

**Abstract**      The pattern matching of waveforms is an important problem in the fields of signal processing, image processing, and so on. Hitherto some methods have been proposed, which match the feature points of waveforms directly. Since the convex and the concave regions of waveform have hierarchical structure, it is necessary for a stable and precise matching to match the hierarchical structure.

In this paper, we propose a structural matching problem that matches the hierarchical structure of scale-space filtered waveforms, and formalize this problem as a likelihood estimation of fluctuation of structure points.

## 1. まえがき

2つの波形間の対応を求めるといふ波形の照合問題は、信号処理をはじめとする様々な分野における重要な課題の1つである。従来この問題に対しては、原波形からエッジなどの特徴点を抽出し、これを直接対応付けるという方法が、主に検討されてきた。このような手法では、次のような問題点が挙げられる。

- 波形構造が本来持っている階層性に基づく照合が行われていないため、局所的な照合の失敗が全体の照合結果に波及しやすい。
- 照合結果自体が十分に構造化されていない。照合操作は、それ自体が階層的な性質を持ち、照合結果にもそれが明示されている必要がある。
- 本来、波形の照合は、扱う対象の波形変動の性質に基づいて行なわれるべきであり、このことが、照合手法の中に明確に取り入れられていない。

これらの問題点に対処するためには、波形の大局的特徴から、局所的特徴までを階層的に表現する必要がある。そして、この階層構造を用いて、波形間で大局的な特徴を照合し、順次、より詳細な特徴を照合していくことにより、局所的な特徴の不一致に左右されることなく、照合操作を安定かつ、効率良く行えると考えられる。この階層構造を用いた照合操作自体が階層的であり、波形間の対応関係を階層的に表現していることになる。また、照合を行なう波形間には、扱う対象に応じた変動構造が存在する。この変動構造を確率的に表現することにより、波形間での変動構造を照合手法の中に積極的に採り入れることができる。

著者らは既に、波形を階層的に表現したときの階層構造の持つ性質や、波形の変形と階層構造の形態変化について報告した<sup>[4]</sup>。本報告では、尺度空間フィルタリング<sup>[1]</sup>により得られる波形の階層構造に着目し、この階層構造そのものを対応付ける「構造照合」という問題を提案する。そして、尺度空間上の2次零交差線の包含関係を構造点を用いて記述し、その変動の確率構造を与えることにより、構造照合を最尤推定問題として定式化する。さらに、この問題の解法について論じ、簡単なモデル例を用いて具体的なアルゴリズムを示す。

## 2. 尺度空間フィルタリングと構造点

### 2.1 一般化波形

波形の階層構造を求めるといふためには、波形を様々な尺度で観測する必要がある。尺度空間フィルタリングとは、波形を様々な尺度でとらえた波形集合に拡張する処理である。この波形集合を一般化波形と定義する。

[定義1] 一般化波形

変数  $x \in (-\infty, \infty)$  上の波形  $f(x)$  に対して

$$f(x, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) w(x - \zeta, \sigma) d\zeta \quad (1)$$

を  $f(x)$  の一般化波形と呼ぶ。ただし関数  $w(x, \sigma)$  は、パラメータ  $\sigma$  を持つガウス関数である。すなわち、

$$w(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right) \quad (2)$$

一般化波形の例を図1に示す。この図から明らかなように、一般化波形上ではパラメータ  $\sigma$  の値が大きくなるにつれて、原波形上の微細な構造が失われていき、おおまかな構造だけが残る。逆に、 $\sigma$  の値を小さくしていくと、波形の細部の構造が鮮明になってくる。このようにパラメータ  $\sigma$  は、波形を観測する際の尺度を表わしている。パラメータ  $\sigma$  の値を0から $\infty$ まで連続的に変えることにより、一般化波形は  $(x, \sigma)$  半平面上で解析的な曲面を形成する。

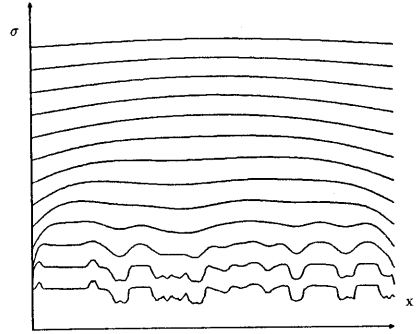


図1. 一般化波形

一般化波形の導関数には、次のような関係が成り立つ。

[定理1] 基礎方程式

一般化波形  $f(x, \sigma)$  は次の偏微分方程式を満足する。

$$\left(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f(x, \sigma) = 0 \quad (3)$$

この方程式を一般化波形の基礎方程式と呼ぶ。

### 2.2 零交差線と構造点

一般化波形  $f(x, \sigma)$  について、

[定義2] 一般化波形の  $n$  次零交差線

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, \sigma) = 0 \quad (4)$$

の解集合として与えられる曲線を  $f(x, \sigma)$  の  $n$  次零交差線と呼ぶ。

2次の零交差線を用いると、一般化波形の山と谷の領域を表わすことができる。2次零交差線は一般化波形の変曲点の集合であり、この曲線によって波形上の凹構造と凸構造が分割される。この2次零交差線によって区切られる領域の包含関係は、波形の凹凸領域の階層構造を表わしている。

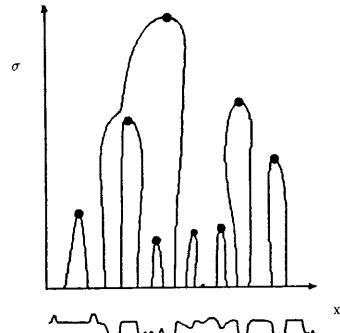


図2. 一般化波形の2次零交差線

パラメータ $\sigma$ の値を小さくしていくとき、新たに2次零交差線で区切られる領域が現われる点は、一般化波形上で凹構造、または凸構造が発生する点である。この点を波形の構造点として次のように定義する。

**【定義3】 構造点**

$$f_{xx}(x_0, \sigma_0) = f_{xx}(x_0, \sigma_0) = 0 \quad (5)$$

を満足するとき、 $(x_0, \sigma_0)$ を一般化波形の構造点と呼ぶ。

ここで、構造点における2次零交差線の曲率を調べてみる。 $\sigma(x)$ によって2次零交差線を表わしたとき、その2次微分 $d^2\sigma/dx^2$ は、構造点において、

$$\frac{d^2\sigma(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\sigma} < 0 \quad (6)$$

となる。このことから、構造点では2次零交差線は上に凸、すなわち上に閉じていることがわかる。これを、A.L.Yuille<sup>[2]</sup>らは、次に示す「単調性」と呼ばれる定理として明かにした。

**【定理2】 零交差の単調性**

パラメータ $\sigma$ の値が大きくなると、一般化波形の零交差線の本数が増加することはない。すなわち零交差線は上に閉じており、下に閉じることはない。

### 2.3 波形構造の階層的表現

波形の尺度空間における凹凸構造は、2次零交差線によって表現できる。2次零交差線は図3のように、凹構造と凸構造が交互に入れ子構造をなしている。これは、図4のように構造点の木構造として表現することができる。すなわち、この木構造の節点（構造点）の接続関係は、それぞれの構造点から伸びている2次零交差線ではさまれた原波形上の凹凸区間の入れ子関係を表わしている。

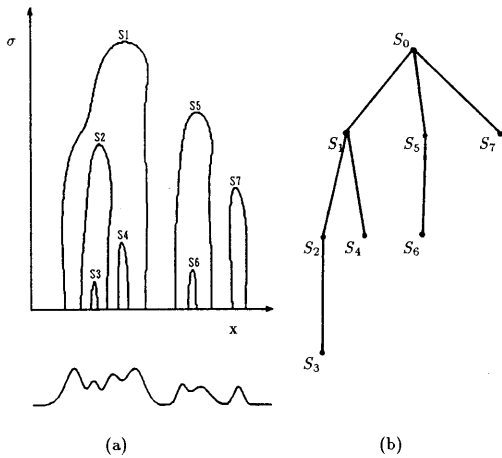


図3. 2次零交差線の入れ子構造と構造点の木構造

この階層表現では、例えば、 $S_1, S_5, S_7$ が同一の階層として、とえられている。文献[4]には、これらの構造点の間にさらに階層構造を導入するための「構造木」という、より高次の階層表現が報告されているが、今回は、2次零交差線の包含関係から作られる階層構造にのみ着目する。

### 3. 波形構造の形態変化

波形の形態変化に応じて、尺度空間上の2次零交差線の形態も変化する。波形の凹凸構造の形態変化は、1. 移動、2. 増大・縮小、3. 融合・分離の3つのタイプに大別される。凹凸構造が単独で変動する場合は、2次零交差線の移動や増大・縮小を引き起こすが、この変動が他の凹凸構造に影響を及ぼす場合には、2次零交差線の融合・分離が起こり、階層構造が変化する。凹凸構造の変化による2次零交差線の形態変化を以下に示す。

#### 1. 波形構造の移動 (図4 (a).)

波形構造の移動につれて、構造点がx軸方向に移動する。

#### 2. 波形構造の増大, 縮小 (図4 (b).)

波形構造の増大, 縮小は構造点の $\sigma$ 軸方向の変動を引き起こす。この変動の極限として、構造の生成, 消滅が起こる。なお消滅の際には、必然的に下層の構造点も失われる。

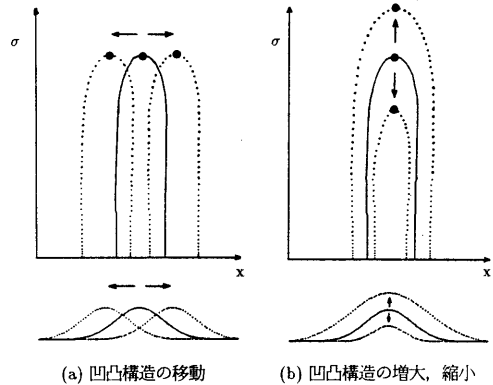


図4. 波形の変形と2次零交差線

#### 3. 波形構造の融合, 分離

波形構造の融合・分離は凹凸構造が移動する場合と、凹凸構造が増大・縮小する場合に共に生じる。波形構造の移動につれて、構造点も移動する。この際、隣接する凹凸構造との干渉により、2次零交差線は図5 (a)のように融合, 分離を起こし、構造点の階層構造が変化する。同様に、波形構造の増大, 縮小は構造点の $\sigma$ 軸方向の変動に加えて、2次零交差線が図5 (b)のように融合, 分離を起こし、構造点の階層構造が変化する。

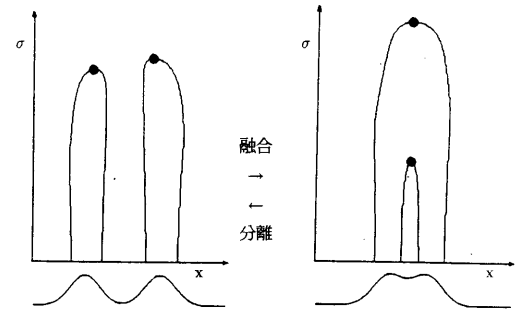


図5 (a). 移動による凹凸構造の融合, 分離

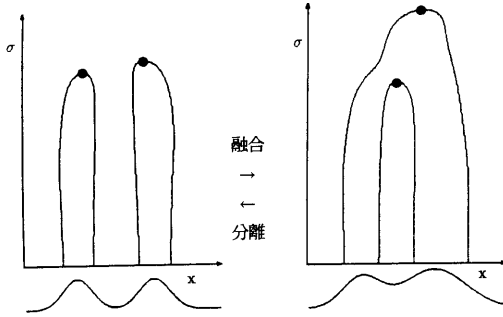


図5 (b). 増大, 縮小による凹凸構造の融合, 分離

凹凸構造が移動, 増大・縮小する場合には, 構造点は尺度空間上で微小変動する。さらに, 隣接する凹凸構造と干渉が起こる場合には, 2次零交差線の階層構造が変化する。以上のことから, 波形間の構造の形態変化は, 構造点の階層構造の変化という定性的特徴と, 尺度空間上の構造点の移動という定量的特徴の2つによってとらえることができる。

波形間の構造点の階層構造の変化の特徴は, 構造点の木構造の形態変化を制限することによって表現することができる。制限条件としては例えば, 以下のようなものが考えられる。

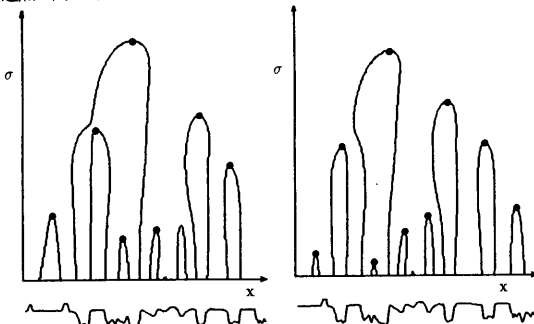
1. 構造の生成, 消滅の制限。
2. 構造点の左から右への順序関係の保存。
3. 2次零交差線の融合・分離の回数の制限。

一方, 構造点の移動は, 構造点が尺度空間上の点  $(x_1, \sigma_1)$  から, 点  $(x_2, \sigma_2)$  に移動する確率  $P((x_1, \sigma_1) \rightarrow (x_2, \sigma_2))$  を与えることにより, 確率空間上で表現することができる。Pのことを構造点の移動確率と呼ぶことにする。

## 4. 波形の構造照合

### 4.1 構造照合問題

構造照合問題とは, 波形の階層構造そのものを対応付ける問題である。2つの波形間の照合問題は, 2次零交差線の階層構造(木構造)の対応付けとして扱うことができる。そしてこの問題は, 2つの波形の構造点の間の対応付け問題に帰着する。



(a)  $f_1(x)$  (b)  $f_2(x)$

図6. 波形の2次零交差線

### 4.2 確率的定式化

波形  $f_1(x)$  を波形  $f_2(x)$  に対応付けるという問題を考える。それぞれ波形の構造解析を行ない, 得られる構造点の集合  $K_1, K_2$  を次のように表わす。

$$K_1 = \{(x_i^{(1)}, \sigma_i^{(1)}) \mid i = 1, 2, \dots, N_1\} \quad (7)$$

$$K_2 = \{(x_j^{(2)}, \sigma_j^{(2)}) \mid j = 1, 2, \dots, N_2\} \quad (8)$$

いま,  $K_1$  中の  $n$  個の構造点が,  $K_2$  中の  $n$  個の構造点に対応付けているとする。このときは,  $f_1(x)$  から  $f_2(x)$  への対応において,  $(N_1 - n)$  個の構造点が消滅,  $(N_2 - n)$  個の構造点が生成したことになる。消滅, 生成については次のようにして仮想的な構造点を追加する。

- 凹凸構造が消滅する場合

$$\max P\left(\left(x_i^{(1)}, \sigma_i^{(1)}\right) \rightarrow (x, 0)\right) \quad (9)$$

となる  $x = x_j^{(2)}$  ( $N_2 + 1 \leq j$ ) を求め,  $K_2$  に構造点  $(x_j^{(2)}, 0)$  を追加して, この点に移動したのとして対応付ける。

- 凹凸構造が生成する場合

$$\max P\left((x, 0) \rightarrow \left(x_j^{(2)}, \sigma_j^{(2)}\right)\right) \quad (10)$$

となる  $x = x_i^{(1)}$  ( $N_1 + 1 \leq i$ ) を求め,  $K_1$  に構造点  $(x_i^{(1)}, 0)$  を追加して, この点から移動したのとして対応付ける。

この仮想的な構造点の追加により, 構造点の数は  $K_1, K_2$  とともに,

$$N = n + (N_1 - n) + (N_2 - n) = N_1 + N_2 - n \quad (11)$$

となる。構造点の対応付けは,  $K_1$  から  $K_2$  への1対1の対応付け関数  $C$  を与えることである。ここでは, この関数  $C$  を構造対応関数と呼ぶことにする。構造照合問題は, 第3章で述べた波形間の変動構造に基づいて, 最適な構造対応関数  $C$  を求める最尤推定問題として扱うことができる。構造点の木構造の形態変化の制限から, 構造対応関数  $C$  には制限が生じ, 許される構造対応関数の集合を  $\Sigma_C$  で表わす。構造点の移動確率  $P$  が与えられ, 各構造点の変動確率が互いに独立であるとすれば, 構造対応関数  $C$  による波形の構造照合の尤度  $L(C)$  は, 次のように表わすことができる。

$$L(C) = \prod_{i=1}^N P\left(\left(x_i^{(1)}, \sigma_i^{(1)}\right) \rightarrow \left(x_{C(i)}^{(2)}, \sigma_{C(i)}^{(2)}\right)\right) \quad (12)$$

波形間の構造照合問題は, この尤度  $L(C)$  を最大にするような構造対応関数  $C$  を, 許容集合  $\Sigma_C$  の中から求めるという最尤推定問題として定式化することができる。すなわち,

[ 波形の構造照合問題 ]

波形の構造照合問題は, 構造対応関数の許容集合  $\Sigma_C$  の中から次式を満足する  $C^*$  を求めることである。

$$L(C^*) = \max_{C \in \Sigma_C} L(C) \quad (13)$$

なお, 式(12)の対数をとっても,  $L(C)$  の値を最大にする  $C$  は変わらない。つまり対数尤度  $\log L(C)$

$$\log L(C) = \sum_{i=1}^N \log F \left( \left( x_i^{(1)}, \sigma_i^{(1)} \right) \rightarrow \left( x_{C(i)}^{(2)}, \sigma_{C(i)}^{(2)} \right) \right) \quad (14)$$

を用いれば、結局、構造照合問題は

$$\log L(C^*) = \max_{C \in \Sigma_C} \log L(C) \quad (15)$$

を満足する構造対応関数  $C^*$  を求める問題となる。

### 4.3 構造照合問題の解法

構造照合問題は  $\Sigma_C$  の中から最適な構造対応関数  $C^*$  を求めるという組合せ最適化問題である。一般に、このような組合せ最適化問題の有効な解法として、分岐限定法がある。これは、もとの推定問題をより小さな部分問題に分割していくとき、ある部分問題およびそれから生成される部分問題が、もとの問題の最適解を与えないことが結論できれば、その部分問題を終端するというものである。分割された全ての部分問題が終端されたときに、最適解が求められる。

具体的には、個々の構造点の対応を調べていく過程で、ある構造点の組を含む対応付けが、最適な対応付けにはなりえないことがわかれば、その構造点の組を部分対応として含む、全ての対応付けの候補を棄却するということである。

探索の過程で、尤度の大きな対応付けが見つければ、それ以降の部分問題の探索は終端されやすくなる。そのため、探索のできるだけ早い段階で、尤度の大きい対応付けを見つける必要がある。はじめに大局的な特徴を対応付けて、順次、局所的な特徴を対応付けていくことにより、尤度の大きい対応付けが早く見つかることが期待できる。これは、 $(\sigma$  座標値の) 大きい構造点から対応付けを調べることに相当する。

### 4.4 構造照合アルゴリズム

構造照合のアルゴリズムを以下に示す。

1. 尺度空間フィルタリングを用いて、照合を行なう2つの波形をそれぞれ構造解析し、2次零交差線と構造点を求める。
2. それぞれの構造点を併せて、 $\sigma$  座標値の大きい順にソーティングし、テーブル  $K$  に登録する。2つの波形の構造点の数の和を  $N$  とする。  $K[1]$  は  $\sigma$  座標値が一番大きい構造点、  $K[N]$  は  $\sigma$  座標値が一番小さい構造点を表わす。
3.  $\sigma$  座標値の大きい構造点から、対応する構造点を選び、その尤度を計算する。
  - (a) ある構造点を選んだことを記録するテーブル  $S$  を用意する。  $S[i]=1$  なら、  $K[i]$  の構造点は既に対応付けられたとし、  $0$  ならば対応付けられていないとする。既に対応付けられた構造点の数を  $step$  で表わすことにする。 ( $0 \leq step \leq N$ ) また、その探索の時点までの最大尤度を  $L'$ 、  $L'$  を与える構造対応関数を  $C'$  で表わすことにする。
  - (b)  $step=N$  であれば、構造対応関数の対応付けを調べたことになるので、その対応付けの尤度  $L$  と  $L'$  を比較して、  $L > L'$  であれば、  $L'$  と  $C'$  を更新する。(再帰処理の終了判定と最適解候補の更新) そして、次の組合せを調べる。
  - (c) テーブル  $S$  をみて、まだ対応付けられていない構造点  $K[i]$  を  $\sigma$  大の順に1つずつ選んでいながら、次の処理をする。

(1)  $K[i]$  と対応付け可能な構造点を、  $nil$  も含めて尤度の大きい順にテーブル  $node$  に登録する。これは、  $K[i]$  と同じ波形の構造点であってはならない。また、構造対応関数の制限条件を満たしていなければならない。

(2)  $node$  に登録されている中の構造点  $K[node[j]]$  と  $K[i]$  との対応付け尤度を求めて累積する。この時点までで累積される尤度  $L$  が  $L > L'$  のとき、(b) より再帰的に処理を繰り返す。

3. のアルゴリズムを  $C$  言語に準拠した形で図7に示す。ただし、変数の定義や転送命令、一部のサブルーチンは省略、もしくは簡略化している。

```

match()
{
    if ( step >= N ) {
        if ( L > L' ) {
            L' = L; C' = C; /* 最適解候補の更新 */
        }
        return; /* 再帰処理の終了 */
    }
    i = 1;
    while ( S[i] == 1 ) i++;
    S[i] = 1; step++;
    K[i] と対応可能な構造点を、尤度の大きい順に
    テーブル node に登録し、その数を n に入れる;
    for ( j=1; j<=n; j++ ) {
        if ( S[node[j]] == 0 || K[node[j]] == nil ) {
            if ( K[node[i]] != nil ) {
                S[node[j]] = 1; step++;
            }
            K[i] と K[node[j]] の対応付けの尤度を調べて、
            これまでの尤度に累積し、これを L とする;
            k = j;
            if ( L > L' ) match();
            /* 再帰的に対応付けを調べる */
            else j = n + 1;
            S[node[k]] = 0; step--;
        }
    }
    S[i] = 0; step--;
}

```

図7. 構造照合アルゴリズム

構造照合の具体的な処理手順について述べる。図8のような波形  $f_A(x)$  と波形  $f_B(x)$  とを照合する場合を例にとる。

それぞれの波形の構造点の集合を  $K_A$ 、  $K_B$  とし、それぞれの構造点  $A_i$ 、  $B_j$

$$A_i = (x_i^A, \sigma_i^A), \quad B_j = (x_j^B, \sigma_j^B) \quad (16)$$

の座標値が次のように与えられるとする。

$$A_1 = (3, 7), \quad A_2 = (2, 4), \quad A_3 = (5, 1) \quad (17)$$

$$B_1 = (2, 2), \quad B_2 = (5, 6), \quad B_3 = (5, 4), \quad B_4 = (8, 1) \quad (18)$$

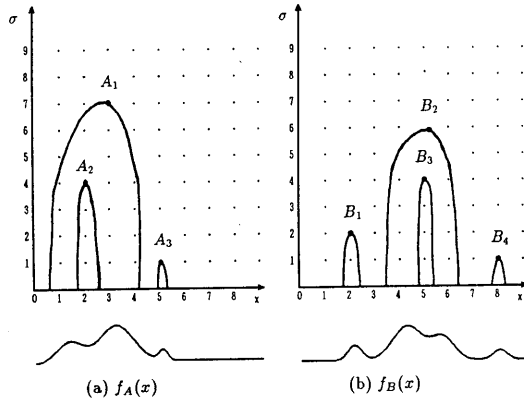


図8. 波形と2次零交差線

$K_A$  と  $K_B$  間の構造対応関数は、全部で73通り存在する(付録A参照)。しかし、扱う問題の性質から、存在し得ない構造対応関数がわかっている場合には、調べるべき構造対応関数の数を減らすことができる。例えば、

1. 「 $A_1, B_2$ は消滅、生成しないとする。」

この条件を適用すると、調べるべき構造対応関数  $C$  の数は、31通りになる。(付録A参照)

2. 「構造の左右関係は入れ替わらない」

この条件を1.と併せて用いると、調べるべき構造対応関数  $C$  の数は、17通りになる。(付録A参照)

尺度空間上の点  $(x_1, \sigma_1)$  が点  $(x_2, \sigma_2)$  に移動するときの移動確率分布  $P$  が次式で与えられるとする。

$$P = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{2} - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{2}\right) \quad (19)$$

このとき、対数尤度  $\log L(C)$  は

$$\log L(C) = -N \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( (x_i^A - x_{C(i)}^B)^2 + (\sigma_i^A - \sigma_{C(i)}^B)^2 \right) \quad (20)$$

となり、これを最大にするような構造対応関数  $C$  を求めることは、次式で示される、対応する構造点間の距離の2乗和  $D$  を最小にする構造対応関数  $C$  を求める問題に帰着する。

$$D = \sum_{i=1}^N \left( (x_i^A - x_{C(i)}^B)^2 + (\sigma_i^A - \sigma_{C(i)}^B)^2 \right) \quad (21)$$

ここでは、構造点間の距離の2乗値をコストと呼ぶことにしよう。式(17)と式(18)の構造点の間の対応付けコストは、表1のようになる。nilとは、対応する構造点がない場合のコストである。

$B_j$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	nil
$A_1$	26	5	13	61	49
$A_2$	4	13	9	45	16
$A_3$	10	25	9	9	1
nil	4	36	16	1	x

表1. 構造点の対応付けコスト

まず、構造点を  $\sigma$  座標値の大きい順にソーティングする。

$$A_1 > B_2 > B_3 > A_2 > B_1 > B_4 > A_3 \quad (22)$$

この順に構造点の対応付けを、深さ優先の縦型探索を用いて調べる。このときの探索の様子を図9に示す。図9で、

- 各節の○内は、累積されるコストと対応付けを調べる構造点であり、構造点がeの場合は節の終端を表わしている。
- 各枝の/の前は、○内の構造点に対して対応付けられる構造点。
- 各枝の/の後の数字は、その対応付けコスト。
- 各枝の)の前の数字は、深さ優先探索により、その対応付けが調べられる順番。

を示している。例えば、8)では  $A_2$  が  $B_1$  に対応付けられており、このときのコストは4である。また、累積されたコストが既に14あり、この対応付けの後の累積コストが18になるということである。

図9からわかるように、 $\sigma$  座標値の大きいところから対応付けを調べることにより、調べる対応付けが7通りにまで減少している。しかも、このうちの大半は、初期の枝刈りにより終端している。

以下に図9の最適化の手順を簡単に説明する。

式(22)の順に対応付けを調べる。1)まず、 $A_1$ の対応付けを調べる。 $B_1$ から $B_4$ の構造点及びnilの中で、コストの最も小さい $B_2$ に対応付ける。2)そこで次は、 $B_3$ の対応付けを調べる。同様にして $A_2$ が対応付けられる。以下、3)→4)→5)と探索が進んで対応付けが

$$A_1 \leftrightarrow B_2, A_2 \leftrightarrow B_3, A_3 \leftrightarrow \text{nil}, B_1 \leftrightarrow \text{nil}, B_4 \leftrightarrow \text{nil} \quad (23)$$

のときのコストは20となる。このコストと対応付けの系列を、最適解(最適な対応付け)候補として記憶しておく。次に調べられるのは、6)である。6)で $B_4$ が $A_3$ と対応付くときのコストは9であり、累積されるコストは27となる。この枝の先を探索して得られる対応付けは、現在までの最小コスト20よりも小さくなりえないから、この枝の先の探索を終端して、別の枝の探索に移る。次に探索が行なわれるのは、7)である。 $B_3$ と $A_3$ の対応付けが調べられる。対応コストは9であり、累積されるコストは14である。この枝の先を探索して得られる対応付けは、現在までの最小コスト20よりも小さくなる可能性があるから、探索を続ける。この枝の探索の結果、1)→7)→8)→9)という対応付けのコストは19となり、現在までの最小コスト20よりも小さいので、最適解候補を、このコストと対応付けの系列に更新する。このように、探索を進めていく過程で順次、より小さいコストを与える対応付けを見つけていき、その時点までの最小コストが動的に更新されていく。この暫定的な最小コストを用いて探索の枝刈りが行なわれる。

また13)のところで、 $B_2$ に対しては、 $A_2$ の他に $A_3$ との対応付けが可能である。しかし、個々の構造点の対応付けは、対応可能な構造点の中から、コストの小さい順に調べられるため、 $B_2$ と $A_3$ の対応付けよりコストの小さい $B_2$ と $A_2$ の対応付けが終端されれば、必然的に $B_2$ と $A_3$ との対応付けも終端されることになるため、 $B_2$ と $A_3$ との対応付けは調べなくて良い。

このようにして行なわれる探索が全て終了したとき、最小のコストを与える対応付けが最適な対応付けとなる。結果として得られる最適な対応付けは

$$A_1 \leftrightarrow B_2, A_2 \leftrightarrow B_1, A_3 \leftrightarrow B_3, B_4 \leftrightarrow \text{nil} \quad (24)$$

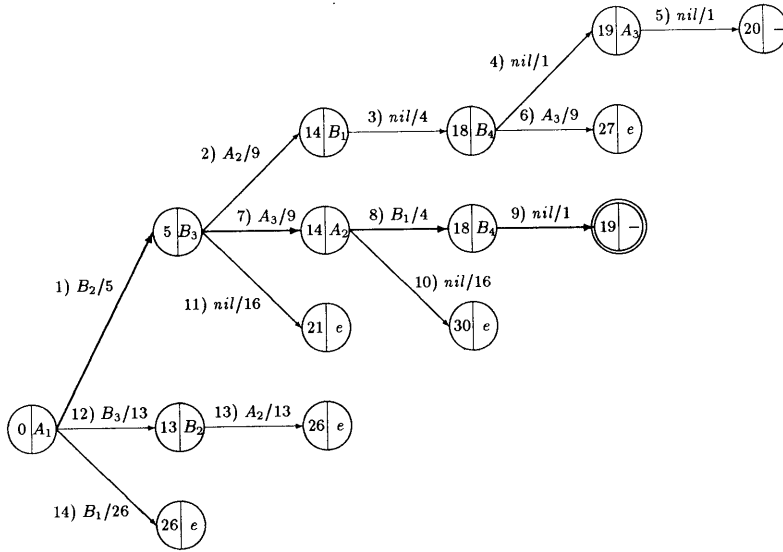


図9. 探索木と枝刈り

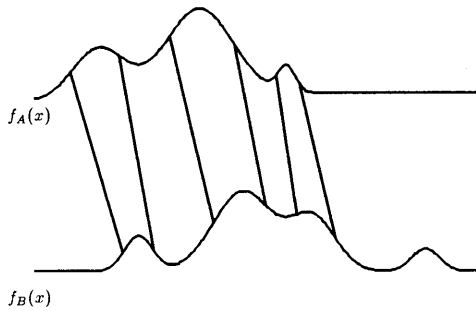


図10. 波形の照合結果1

となる。

この照合結果から、 $A_1$ は $B_2$ と対応付き、 $A_2$ は $A_1$ の構造から分離して $B_1$ と対応付いている。また、 $A_3$ は $A_1$ と融合して $B_3$ と対応付いている。 $B_4$ に対応する構造点は無く、 $f_A(x)$ から $f_B(x)$ への対応において、 $B_4$ で表される構造が生成したことがわかる。このように構造照合の結果は、凹凸構造の対応関係を階層的に表現している。以上を考慮して波形上の対応点を求めると図10のようになる。原波形の変曲点の対応する点を直線で結んでいる。

ここでは尺度空間上の構造点の移動確率 $P$ を、式(19)のように設定したが、例えば

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{2}\right) \quad (25)$$

とすれば、対数尤度  $\log L(C)$  は、

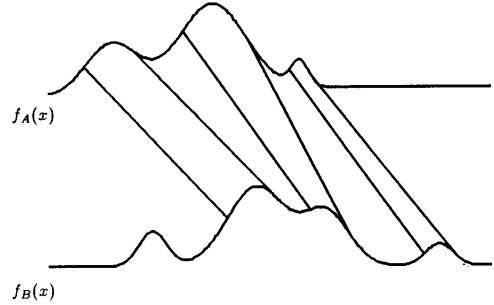


図11. 波形の照合結果2

$$\log L(C) = -N \log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_i^A - \sigma_{C(i)}^B)^2 \quad (26)$$

となる。これから対応付けコスト  $D$  は次式のようになる。

$$D = \sum_{i=1}^N (\sigma_i^A - \sigma_{C(i)}^B)^2 \quad (27)$$

これを用いて構造照合を行なうと、構造点の対応結果は

$$A_1 \leftrightarrow B_2, A_2 \leftrightarrow B_3, A_3 \leftrightarrow B_4, B_1 \leftrightarrow \text{nil (生成)} \quad (28)$$

となる。

式(25)は、波形間で凹凸構造は、 $x$ 軸方向には自由に移動し得るが、凹凸構造の増大、縮小という変動は少ないという評価になっている。この結果から波形上の対応結果は図11のようになる。

一般に波形を照合するときの基準は、扱う問題に応じて異なる。このように、波形の照合問題が本来持っている多義性に対して、波形の構造照合問題では、構造点の移動確率分布と構造対応関数の許容集合の与え方を変えることで対処できることがわかる。

## 5. まとめ

尺度空間上での構造解析をもとにした波形の構造照合問題を提案し、確率論の立場から定式化した。これにより、構造照合が波形間の構造点の組合せ最適化問題として扱えることを示した。この照合方法の特徴をまとめると次のようになる。

- 波形の凹凸構造を持つ階層性に基づく構造照合方法である。波形の階層構造を構造点を用いて記述し、構造点間の対応付けを階層的に行なうことにより、安定した波形の構造照合が可能である。
- 構造照合問題は組合せ最適化問題である。分枝限定法を用いることにより、この問題は、極めて効率良く解くことができる。
- 波形間の変動構造を確率的に表現し、確率論的手法を用いることにより、変動構造を積極的に照合手法の中に採り入れることが可能である。
- 照合結果自体が階層性を持つため、照合結果から2つの波形を、定性的に比較することが可能になる。これにより、個々の凹凸構造の変形に意味付けをして、扱う対象を認識、理解するというような知識情報処理への融合が可能になると考えられる。

今後は、構造点の対応付けの探索効率、精度の向上や、コンピュータ・ビジョンへの応用が課題として残されている。

なお本研究の一部は、文部省科学研究費補助金によるものである。

## 6. 参考文献

- [1] A.P.Witkin : "Scale Space Filtering", Proc. of 8th International Joint Conference on Artificial Intelligence, pp.1019-1022, Karlsruhe, 1983
- [2] A.L.Yuille, T.poggio : "Scaling Theorems for Zero Crossings", IEEE Trans. Pattern Analysis. Machine Intell., PAMI-8, pp.15-25, 1986
- [3] J.Babaud, A.P.Witkin, M.Baudin : "Uniqueness of the Gaussian Kernel for Scale Space Filtering", IEEE Trans. Pattern Analysis. Machine Intell., PAMI-8, pp.26-33, 1986
- [4] 佐藤, 和田 : "構造線による一般化波形の階層表現", 信学論 (D), J70-D, 11, pp.2154-2159, 1987
- [5] 茨木 : "組合せ最適化の理論", 電子情報学会編, コロナ社, 1979

## 7. 付録

### A. 構造対応関数の数

2つの波形で、一方の波形の構造点の数を $m$ 個、他方を $n$ 個とすると、波形間で構造対応関数の数 $|\Sigma_C|$ は、式(29)で計算される。

$$|\Sigma_C| = \sum_{i=0}^{\min\{n, m\}} m C_i \cdot n C_i \cdot i! \quad (29)$$

4.4節では、 $f_A(x)$ の構造点の数が3個、 $f_B(x)$ の数が4個のモデルを用いた。また、それぞれの構造点の集合を $K_A, K_B$ で表わした。そこで、

1. 波形間で構造対応関数に何も制限がない場合は、

$$|\Sigma_C| = \sum_{i=0}^3 {}_3C_i \cdot {}_4C_i \cdot i! = 73 \quad (30)$$

から、73通り存在する。

2. 「 $A_1, B_2$ は生成、消滅しないとする」という条件を用いた場合は、

(a).  $A_1$ と $B_2$ が対応付く場合、残された構造点間の組合せは

$$\sum_{i=0}^2 {}_2C_i \cdot {}_3C_i \cdot i! = 13 \text{ 通り} \quad (31)$$

(b).  $A_1$ と $B_2$ が対応付かない場合、 $A_1$ が $K_B$ の中の、 $B_2$ 以外のいずれかと対応付き、 $B_2$ が $K_A$ の中の、 $A_1$ 以外のいずれかと対応付く組合せは6通り存在する。また、このとき、残された構造点は $K_A$ は1個、 $K_B$ は2個であり、これらの間の組合せは、

$$\sum_{i=0}^1 {}_1C_i \cdot {}_2C_i \cdot i! = 3 \quad (32)$$

であるから、 $6 \times 3 = 18$ 通り存在する。

そこで(a)と(b)の合計で、 $|\Sigma_C| = 31$ となる。

3. 「構造の左右関係は入れ替わらない」という条件を用いたときは、構造点の数が同じでも、階層構造によって組合せ数は異なり、一般的な評価式を求めるのは困難である。図8のような場合は、表2に示す17通りが、この条件に当てはまる組合せである。

	$A_1$	$A_2$	$A_3$
1	$B_2$	$B_3$	$B_4$
2	$B_2$	$B_3$	nil
3	$B_2$	$B_1$	$B_3$
4	$B_2$	nil	$B_3$
5	$B_2$	$B_1$	$B_4$
6	$B_2$	$B_1$	nil
7	$B_2$	$B_4$	nil
8	$B_2$	nil	$B_4$
9	$B_2$	nil	nil
10	$B_3$	$B_2$	$B_4$
11	$B_3$	$B_2$	nil
12	$B_3$	$B_1$	$B_2$
13	$B_3$	nil	$B_2$
14	$B_1$	$B_2$	$B_3$
15	$B_1$	$B_2$	$B_4$
16	$B_1$	$B_2$	nil
17	$B_4$	$B_2$	nil

表2. 構造点の対応関係