

平面図形の正則化多角形近似

青木 伸 出口 光一郎

東京大学工学部

あらまし 本論文では、平面上の線図形を折れ線で近似する問題に正則化(regularization)を適用した解析手法を提案する。本手法では近似の評価関数として、折れ線が元の線図形にどれくらい良く適合しているかの項と、近似された折れ線モデルの形状「よさ」として単純さを評価する項との加重和を採用することで、大局的に主要な形状を把握する。このとき評価関数に含まれる近似モデルの「よさ」の項の重みを選ぶことで、どの位の大きさを大局的として見ているかを選ぶことができる。しかし、この重みをいろいろに変えても、近似パターンは何種類かしか生じない。これは元の図形に固有の、その形状を表現するのに適した形状特徴の大きさというものが存在することによる。本手法により図形自身の主要な形状特徴を自動的に見つけることができる。これは線図形の形状の解析や理解のための強力な手法になると期待できる。

Regularized Polygonal Approximation of Planar Contour Figures

Shin Aoki Koichiro Deguchi

Faculty of Engineering, University of Tokyo

7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113 Japan

Abstract This paper describes a new method of polygonal approximation of planar contour figures based on regularization theory. In order to obtain the global feature, we use a criterion function which is a weighted summation of two terms. One term evaluates the fitness of the model for a given contour. And another one does the simpleness of the model itself. In this method, we can change the degree of fitness and simpleness of approximation by setting this weight. However, only a few types of stable model are obtained with the variety of the weight. This means only a few approximation models are suitable to represent the given figure, and this method gives such suitable model, automatically. This will promise a powerful method for analysis and interpretation of planar contour figures.

1. はじめに

平面上の線図形に対する折れ線近似はその形状の認識にとって効果的な表現である[1][2]。この論文では、輪郭閉曲線の折れ線近似の新しい手法について述べる。

折れ線近似のアプローチとしては、与えられた曲線の局所的な形状（曲率の極大点など）に基づき頂点を求め、それらの頂点を結び折れ線とする手法が一般的である[3]。このような手法では、曲線の局所的な複雑さととらわれて、細かすぎる頂点をみつける傾向がある。そこでスムージングパラメータを指定しある大きさ以下の形状特徴を無視する手法が提案されている[6][7]。

ただし、これらの手法ではこのスムージングパラメータの値を解析に先立って天下りの的に与えていた。しかし、どの程度の大きさが局所的な特徴であり無視すべきかということは重要な問題であり、その図形の全体的な形状の認識に先立って決定できるはずはない。

ここで、このときの線図形の形状認識にとって、それ以下の形状特徴を無視してよいという大きさに注目し、それをその図形固有のスケールと呼ぶことにする。

我々の手法では、与えられた線図形をさまざまなスケールの折れ線で近似したとして、そのなかからその図形を表現するに適したスケールを見つけようという考え方を基礎とする。

この問題を解くために、2つの評価基準を組合せて使う。1つは近似の正確さを表し、もう1つは近似多角形の形状の単純さを表す。この2つの評価の加重和を評価関数として採用する。これは、正則化(regularization)の考えによるものである[4][5]。

この2項の重みづけを変えることによって、スケールをかえた多角形近似を得ることができる。ところが実際にはこの重みを変えても、得られる近似多角形の形状が同一で変わらない、安定した範囲が存在する。これは、与えられた図形がその形状を表すのに適したスケールを本来もっていることによると考えられる。したがって、その重みの変化に対しても安定であるような近似多角形が、もとの閉曲線の固有で主要な形状をよく表現しているといえるわけである。

このような評価関数を最小化することによって、近似に際して採用すべきスケールを自動的に見つけることができる。

2. 正則化による折れ線近似の原理

平面上の閉曲線に対して、その曲線上に頂点をもつ

多角形で近似をする。

ここでは次のような評価関数を考えそれを最小化する。

$$J = \sum_i s_i - \lambda \frac{\sum_i l_i^2}{(\sum_i l_i)^2} \quad (1)$$

ただしFig.1に示すように s_i は各線分とそれに対応する曲線のずれの面積を、 l_i は折れ線の各線分の長さを表す。

第1項は近似モデルと与えられた曲線の適合の度合いを評価する項である。この項は近似折れ線が曲線の近くを通れば小さくなりよい評価となる。第2項は、より小数の辺からなる単純な形状をもつ近似モデルを得るための項である。この項は折れ線の全長で正規化した各線分の長さの2乗和であり、等長の多数の線分の集りより少数の長い線分をもつモデルの方がよいと評価する。これら2つの項は一般的には両立しない。しかし(1)式のように2項の加重和を評価関数とすることで両方の評価をある程度ずつ満足する近似モデルを得ることができる。

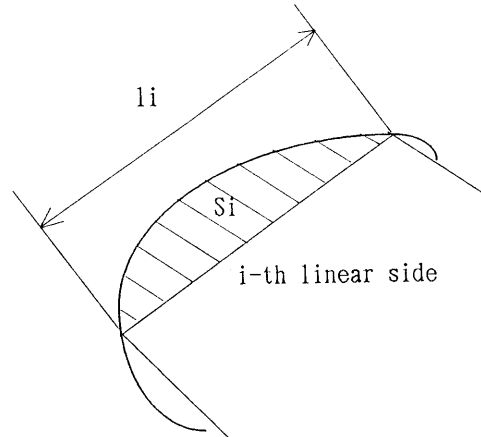


Fig.1 The measures constructing the criterion function (1) of fitness of the polygonal model to the given figure.

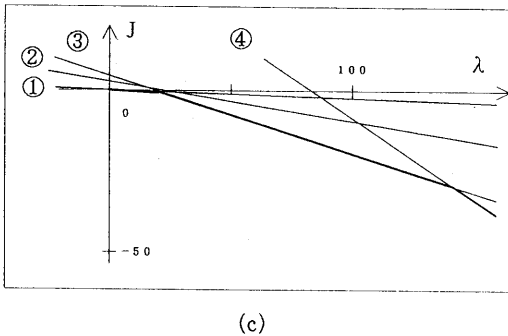
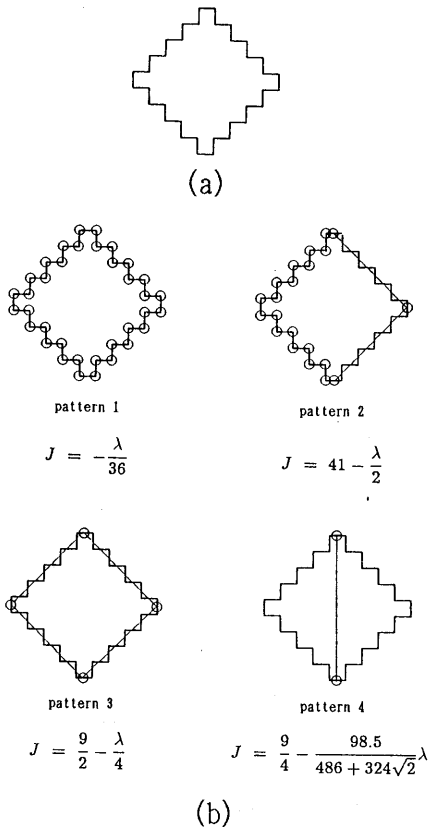


Fig. 2 An example of the polygonal approximation using the proposed criterion function. (a) Original given contour figure. (b) Four types of polygonal approximation with criterion functions for each respective types. (c) The plottings of criterion function J 's listed in (b) for the values of λ . The bold line indicates the minimum values of J for each λ .

この手法の基本となる考えは、次のような評価関数を最小化することである。

$$J = (\text{fitness of the model}) + \lambda (\text{simpleness of the model}) \quad (2)$$

これはモデル適合問題に対する正則化の考えと同じものである[4][5]。

この(2)式の評価関数では、 λ の値が大ききときは、モデルの単純さに評価の重みが置かれ、より単純な大局的なモデルが得られることになる。逆に λ の値が小さいときはモデルの適合の程度の評価に重みがおかれより正確なモデルが得られる。

このことを具体的に簡単な図形を例にとって示す。すなわち、評価関数(1)の重みの意味、 λ の値を変えたときに得られる近似多角形の形状がどのように変わるかを見てみる。原図形としてFig. 2(a)に示す形を考える。これは大局的には正方形で、しかし個々の辺はギザギザに折れ曲った形である。この図形に対しFig. 2(b)に示す4つの折れ線近似モデルを考える。

パターン1は原図形と完全に一致する最も正確な近似モデルである。次に半分はパターン1と同様で残りの半分が長い2本の直線分からなる近似モデルがパターン2である。パターン3は大きな正方形の形のモデルで、パターン4は2個の頂点と2本の線分からなる最も単純なモデルである。各パターンに対応する評価関数 J をそれぞれの下に示した。

ここで評価関数の最小化を考える。Fig. 2(a)の原図形に対しパラメータ λ を決めたときパターン1~4のうち評価関数(1)が最小となるモデルが得られることになる。この場合の各パターンに対応する評価関数 J は解析的に表現できて、それをFig. 2(c)に示す。

この図から評価関数 J を最小化することによって、パラメータ λ の値にしたがってパターン1、3、4の近似モデルのいずれかが得られることがわかる。また「不完全な」近似モデル、パターン2はどのような λ の値に対しても評価関数を最小化する事はない。つまり λ が0から20.25までの間はパターン1が得られ、20.25から146まではパターン3が146以上ではパターン4が得られる。

この例から3つの重要な性質がわかる。1つは、 λ が大きくなるとより単純な、原図形の大局的な特徴を捉えた近似モデルが得られるということである。このときパラメータ λ は対象を観察する際のスケールに対応する量とみなすことができる。

もう1つは、ある範囲の λ に対しては安定な近似モデルが得られるということである。いいかえれば、得られる近似モデルの形状は、 λ の変化につれ不連続的にしか変化しないことがわかる。このある範囲の λ で安定なモデルは、原図形が本来もっていた形状特徴を反映していると考えられる。

3つめの重要な性質は評価関数を最小化するモデルは3つのパターンだけに限られるということである。これは原図形の形状特徴をうまく表現するような近似モデルはそれほど多数存在する訳ではないというFig. 2(a)に対する直感的な観察にあった結果である。

3. 繰返しによる極小化アルゴリズム

前章の例では評価関数が解析的に与えられたが、実際には原図形は座標の点列データとして与えられるので、評価関数の最小値を直接求めることは困難である。そこで、近似多角形の頂点の候補点を原図形上に多数配置し、その後各候補点を評価関数が小さくなる方向へ反復的に移動、統合し極小化していくアルゴリズムによって、準最適な近似多角形を求める。

ここではこのアルゴリズムとその結果の意味を考える。本研究で用いた極小化のアルゴリズムは次のようなものである。

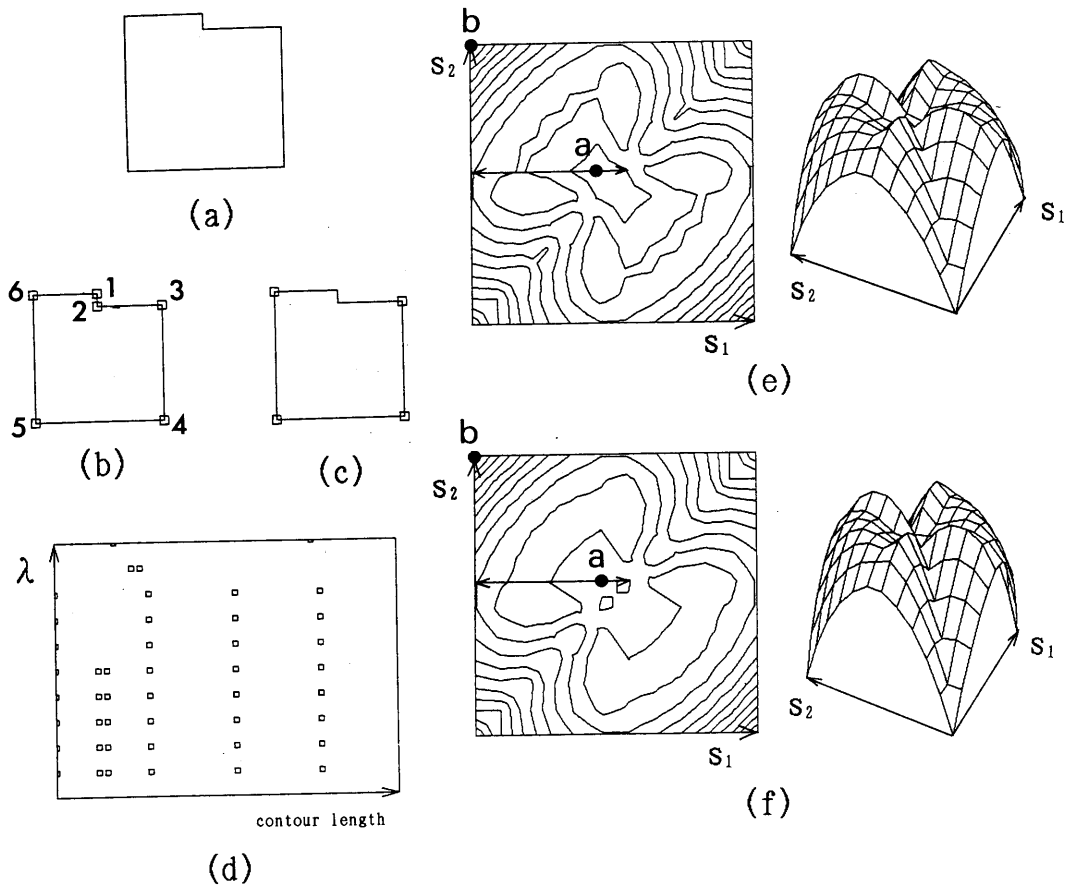


Fig. 3 Results of proposed polygonal approximation method for a artificial simple contour figure of (a). (b) Obtained polygon with $\lambda=2.5$, and (c) with $\lambda=3.0$. (d) The vertex positions of the approximating polygon in 'scale space' with contour length and λ coordinates. (e) Profile of criterion function J for positions of vertex 1 and 2 with $\lambda=2.5$, shown with perspective view and contour map. (f) Same as (e) but with $\lambda=3.0$.

I. まず初期値として多数の頂点の候補を与えられた曲線上におく。

II. 現在の頂点位置を使って評価関数を計算する。

III. 注目している1つの頂点を前後両方向に微小距離動かし、それぞれの位置に頂点を置いたときの評価関数を計算する。もし動かし方がII. での値より評価関数が小さくなれば、その位置に頂点を移動する。そしてその隣の頂点を選びIII. を繰り返す。

IV. もし両隣の位置での評価関数が大きければ、さらに遠くの位置について次つぎに評価関数を計算する。元の位置より評価関数が小さくなるような位置があればその位置に頂点を移動し、隣の頂点を選びIII. から繰り返す。

V. 両隣の頂点の間にその位置より評価関数を小さくする点が存在しなければ元の位置に頂点を置き、隣の点についてIII. から繰り返す。また、その頂点が隣の頂点位置と一致したときが評価関数が小さくなる、つまりその頂点がないほうが良いとき、その頂点を消去する。

VI. 曲線上のすべての頂点が評価関数の極小位置で動かなくなったとき繰り返しを終了する。

ただし上記のIV. V. は、ごく局所的な極小点に止ることを防ぐための処理である。

このアルゴリズムで極小化がどのように進むか、またそれが近似モデルのパターンの変化にどのように影響するか、単純な図形を例に考える。Fig. 3(a)のような長方形の1辺に段状の角がある原図形をとる。

$\lambda = 2.5$ と 3.0 のときにこの極小化アルゴリズムによって得られる多角形をFig. 3(b), 3(c) に示す。またこの図形についての λ と得られる頂点の位置の関係をFig. 3(d)に示す。この図では、横軸に原点から曲線に沿った長さで頂点の位置を示し、縦軸に λ の値をとっている。図中の□が、 λ がある値の時の近似多角形の頂点の位置を表している。(このように曲線上での位置と λ の値とを座標とした平面を scale space と呼ぶ。)

ここで、頂点の位置により評価関数がどのように変化するかを調べるため、頂点を6個とり1から6まで番号をつける。そのうち3から6の頂点をFig. 3(b)に示す位置に固定し、頂点1, 2を頂点3と6の間で動かしてみた。

この時の頂点1, 2の位置に対する評価関数の値を

$\lambda = 2.5, 3.0$ について示したのがそれぞれFig. 3(e), 3(f)である。 s_1, s_2 がそれぞれ頂点1, 2の位置を、頂点6からの曲線上の道のりで表した軸であり、J軸方向にその位置での評価関数の値をプロットした。それぞれ右がその透視図、左が等高線表現である。Fig. 3(b)にあたる頂点配置を、図中点aに、Fig. 3(c)にあたる頂点配置を点bに示す。Fig. 3(e), 3(f)に示した λ ではどちらも点aは局所的な極小点に、また点bは全体での最小点になっている。そして点aから上記のアルゴリズムIV. に従って矢印方向に探索を進めるとする。 $\lambda = 3.0$ の時には点cに移動するが、 $\lambda = 2.5$ の時には点aより評価関数の小さくなる点が探索範囲にないので、点aで止ってしまう。その結果 $\lambda = 2.5$ では点aが、 $\lambda = 3.0$ では点bが極小点として求まる。

このような極小化によって2章で述べた最小化とは異なる結果が得られる場合もあるが、やはり得られる近似モデルの形状はパラメータ λ について不連続的にしか変化せず、それぞれ直感的にも意味のある近似多角形が得られていることがわかる。

4. 多角形近似の実験結果

より複雑な曲線に対して本手法を適用してみた。Fig. 4(a)は、鍵の輪郭図形である。この曲線に対して評価関数Jを最小化する多角形を、前章で述べたアルゴリズムを用いて求めた。Fig. 4(b)は反復法の初期状態である。

Fig. 4(c)は、 $\lambda = 0.05$ の時の反復の最終状態の頂点の位置を原図形に重ねて示す。一方Fig. 4(d)は、 $\lambda = 0.09$ の時の結果を示す。それぞれ、原図形の細かい形状をとらえたものと粗い特徴をとらえたものが得られている。

Fig. 4(e)は頂点の scale space 上での位置を表す。すなわち、横軸に原点から曲線に沿った長さで頂点の位置を示し、縦軸に λ の値をとって、図中の□が、 λ がある値の時の近似多角形の頂点の位置を表している。

この図は重要な結果を示している。つまりさまざまな λ の値に対して得られる近似多角形がこの場合は2つのタイプだけに限られるということである。ひとつは λ が小さい時に得られるFig. 4(c)のような、原図形の細かな凹凸に沿った多角形で、もうひとつは λ が大きい時の、Fig. 4(d)のような大局的な特徴を表した単純な三角形である。

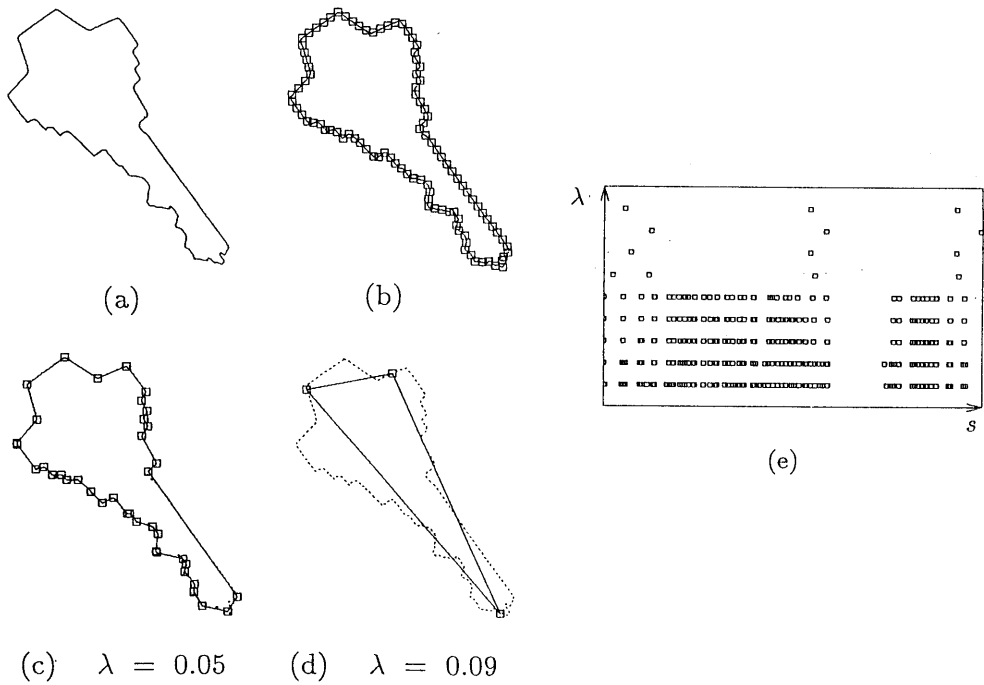


Fig.4 Experimental results of proposed polygonal approximation method for a silhouette contour of a key of (a). (b) Initial vertex settings for iterative minimization of the criterion. (c) Obtained vertices of polygon with $\lambda=0.05$ and (d) with $\lambda=0.09$. (e) The vertex positions in 'scale space'.

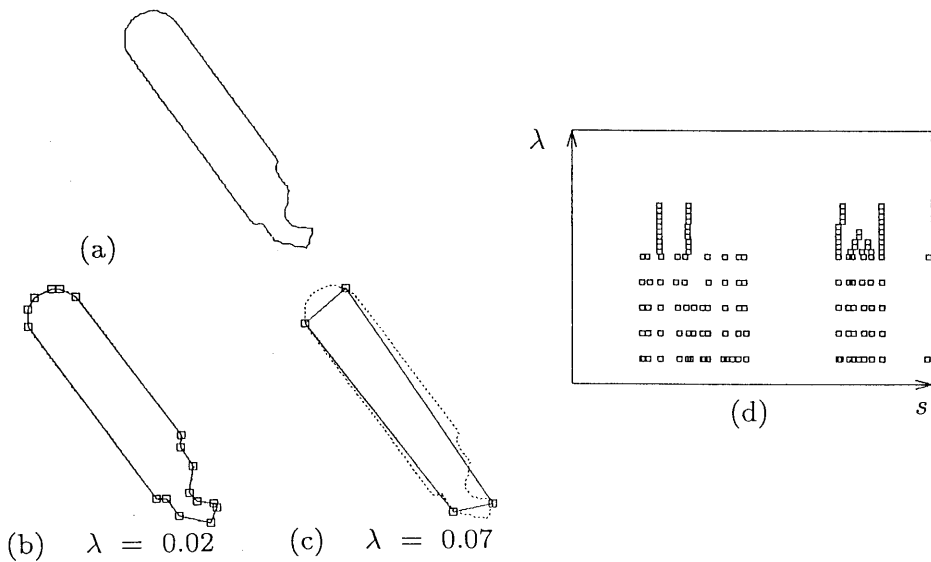


Fig.5 Another example for a tool. The experimental results are shown with the same fashion as previous figures.

また、 λ の変化によるこの近似モデルの2つのタイプの間の変化は不連続的におきている。

これらの結果は前章で指摘した本手法の性質を示すものである。

Fig. 5は、別の図形に対する実験結果である。Fig. 5(b)と5(c)はそれぞれ $\lambda = 0.02, 0.07$ の時の結果である。Fig. 5(d)はFig. 4(e)と同様に λ に対する近似多角形の頂点の位置を scale space 上で示した図である。この図でもFig. 4(e)と同様に細かいものと粗いもの2つのタイプの近似モデルだけが得られている。

このような一般的な曲線ではこの評価関数を最小化する近似モデルは限られた数しか存在しないということが重要な性質である。

ここで本手法の特徴を明らかにするため、以前に提案された同様の手法と比較してみる。

ひとつはRosenfeld-Weszka[6]によるもので、この方法では1つのスムージングパラメータ s を指定する必要がある。もうひとつはFreeman-Davis[7]の方法でこれは2つのやはりスムージングに関するパラメータ s, m をとる。

Fig. 6(a)の図形に対してこれらの手法を適用した結果を示す。Fig. 6(b)は $s = 6$ でのRosenfeldの手法の結果と、Fig. 4(e)と同様な scale space 上の頂点の位置を示す。Fig. 6(c)はFreemanの手法の結果である。ここで比較のため、Fig. 6(a)の図形に本手法を適用した結果を、 $\lambda = 0.02$ の時の近似多角形と scale space 上の頂点位置で、Fig. 7に示す。また、Fig. 5(a)の図形にこれらの手法を適用した結果をFig. 8に示す。Fig. 8(a)はRosenfeldの手法で $s = 50$ の時の結果と scale space 図を示し、Fig. 8(b)はFreemanの手法でパラメータは $s = 30, m = 3$ である。

Fig. 6(b), 6(c)から、これらの手法ではスケールパラメータを大きくとれば得られる頂点の数は減り単純な形となるが、その変化は連続的に起りFig. 4(e)に示される本手法の結果のような安定な形状は存在しないことがわかる。逆にFig. 7ではこの図形に対して本手法でも安定な形状をひとつしか示さないが、これはこの原図形がFig. 4(a)のような図形と違い、複数のスケールの特徴を持たないことによると思われる。

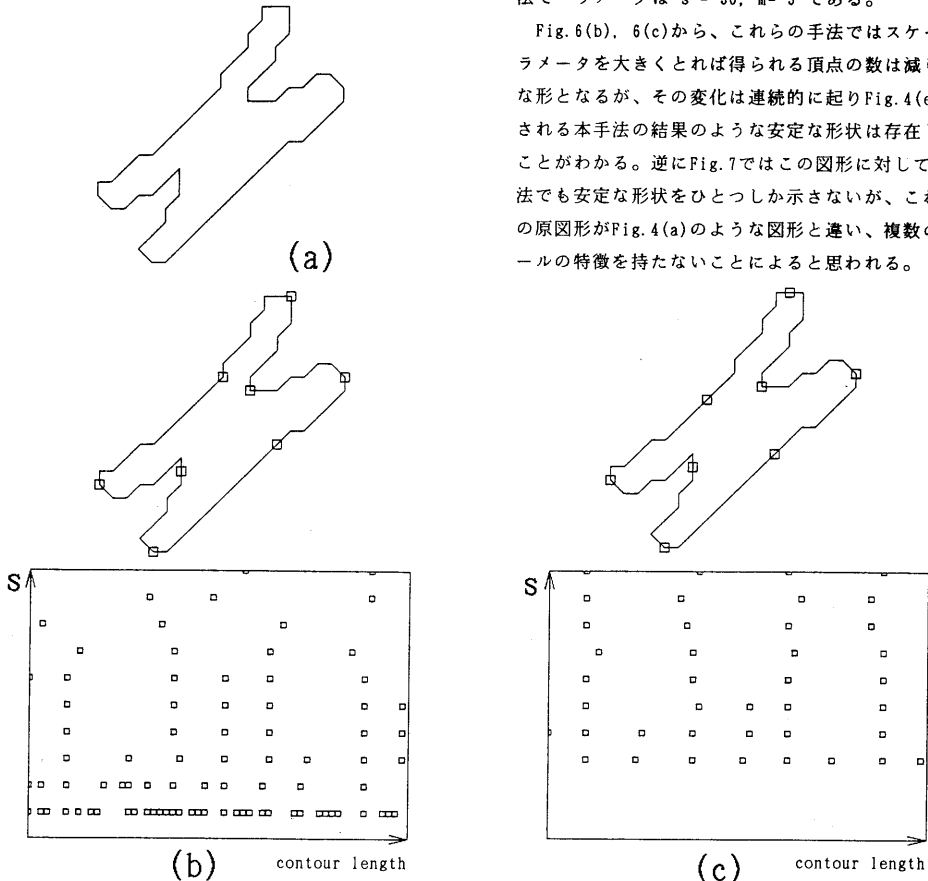


Fig. 6 Experimental results of conventional methods as comparisons. (a) Original figure. (b) Vertices of approximating polygon obtained by Rosenfeld-Weszka's method with $s=6$, and their positions with 'scale space'-like representation. (c) result of Freeman-Davis's method with $s=3, m=2$ shown with the same fashion of (b).

5. おわりに

正則化理論に基づいた曲線の折れ線近似の新しい手法を提案した。本手法では、評価関数中の1つのパラメータで近似の程度を変えることができる。しかしこのパラメータを変えても与えられた1つの図形に対しては安定な近似モデルは極く少数しか存在しないことが明らかになった。

これらの安定なモデルは元の図形に固有の形状特徴を表すに適したスケールをもつものと考えられる。本手法ではこのような近似モデルを自動的に導くことができる。

これは線図形の形状の解析や理解のための強力な手法になると期待できる。

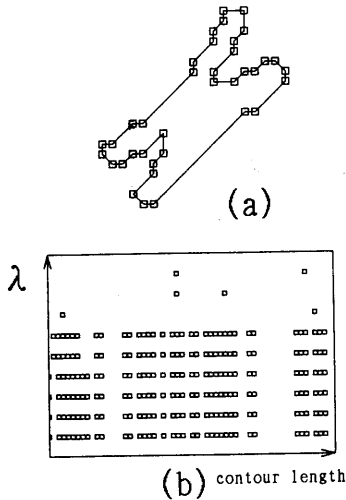


Fig. 7 (a) Results of proposed method for a contour of Fig. 6a, and (b) 'scale space' diagram of the vertex positions.

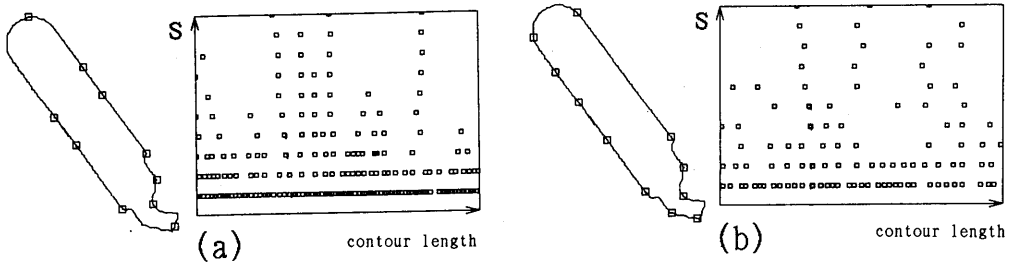


Fig. 8 (a) Experimental results with Rosenfeld's method for Fig. 5(a), shown with the same fashion of Fig. 6, and (b) with Freeman's method.

参考文献

- [1] T. Pavlidis, "Algorithms for shape analysis and waveforms," IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. PAMI-2, pp. 301-312, July 1980.
- [2] J. L. Dunham, "Optimum uniform piecewise linear approximation of planar curves," IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. PAMI-8, pp. 67-75, Jan. 1986.
- [3] C. Ten and R. T. Chin, "On the detection of dominant point on digital curves," IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. PAMI-11, pp. 859-872, Aug. 1989.
- [4] M. B. Bertero, T. A. Poggio and V. Torre, "Ill-posed problems in early vision," Proceedings of the IEEE, vol. 76, no. 8, pp. 869-889, Aug. 1988.
- [5] J. Aloimonos, "Shape from pattern: Regularization," Int. J. Computer Vision, vol. 2, pp. 171-187, 1988.
- [6] A. Rosenfeld and J. S. Weszka, "Angle detection on digital curves," IEEE Trans. Comput., vol. C-22, pp. 875-878, Sept. 1973.
- [7] H. Freeman and L. S. Davis, "A corner-finding algorithm for chain-coded curves," IEEE Trans. Comput., vol. C-26, pp. 297-303, Mar. 1977.