

測定用専用物体を使用しない
カメラキャリブレーション

深田陽司

ATR視聴覚機構研究所
〒619-02 京都府相楽郡精華町乾谷

カメラキャリブレーションに関するこれまでの研究は、測定用の専用物体を使用し精度を追求することに主眼がおかれていた。しかし移動ロボットを想定すると、これまでの手法は現実的でなく、又対処できない状況も起こり得る。本稿では移動ロボットに搭載されたカメラのキャリブレーションを実現する手法を提案する。ワールド座標軸としては、部屋の隅や建物の角を構成する3本の稜線を採用し、まず回転を算出する。次に、ワールド座標値が既知の点が2つ以上その近辺に存在することを仮定して、平行移動を算出する。最後に、精度測定のための実験を行い、本手法の効果を確かめた。

A Camera Calibration Method
without a Special Object to be Measured

Youji FUKADA

ATR Auditory and Visual Perception Research Laboratories
Inuidani, Seika-cho, Soraku-gun, Kyoto 619-02, Japan

In this paper, a camera calibration method not using a special object to be measured is described. It has been developed for a camera mounted on a mobile robot. 3 edges facing at a corner of a room or a building are adopted as 3 World axes. First, our method calculates the 3 rotational parameters using these 3 edges. Second, the translational 3 parameters are calculated using equal or more than 2 reference points that are assumed to exist near the corner. Last, experiments using a rough object are executed in order to ensure the efficiencies of our method.

1 まえがき

コンピュータビジョンにおける研究は、カメラに関するパラメータは既知のものとして構築されているものが殆どである。理論の構築のみであれば実際の値をしらなくてもよいが、いったん実画像に適用しようとするれば真に既知のものとしなければならない。

カメラパラメータを算出するための研究は、測定用の専用物体を設置し精度を向上させる手法の開発が主眼であった[1][3]。カメラが固定されている状況においては一度測定すればよく、精度が良いにこしたことはない。ところで移動ロボットに搭載されたカメラを考えると、対象となる情景は次々と変わりカメラパラメータは動的に変化するので、その都度キャリブレーションを行なわねばならない。これまでの手法を利用しようとするれば、測定用物体を自ら運搬し、直面している情景の中に設置する必要が生じる。しかしこの方法は現実的でなく、また情景によっては設置できないこともある。

本稿ではこのような状況においてもカメラパラメータが算出できる手法について述べる。移動ロボットに搭載されたカメラを想定し、パラメータ算出のための観測すべき対象は部屋の隅や建物の角等である。

2 カメラパラメータと問題設定

2.1 座標系

本稿では6つの座標系を設定する。即ち、ワールド座標系 $O_w X_w Y_w Z_w$ 、第1カメラ座標系 $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ 、第2カメラ座標系 $O_2 X_2 Y_2 Z_2$ 、第3カメラ座標系 $O_3 X_3 Y_3 Z_3$ 、第4カメラ座標系 $O_4 X_4 Y_4 Z_4$ 、画像座標系 $O_i UV$ である。そのうちの4つを図1に示す。本節ではこれらの座標系間の関係を定式化し、本稿で解くべき問題を明確にする。なお、カメラによる撮像など各カメラ座標系に共通することを述べる時には単純にカメラ座標系 $O_c X_c Y_c Z_c$ と呼ぶ。

これらの座標系は全て左手系で定義されており、それぞれの座標系における点やベクトルの表現を区別するために上に述べた座標系の順に、 (\dots) 、 $\langle \dots \rangle$ 、 $\langle \dots \rangle$ 、 $[\dots]$ 、 $\{\dots\}$ の表記を用いる。本稿では平行移動も線型で扱えるように式の展開には同次座標表現を使用し、単純に点やベクトルを表す時には普通座標表現を用いることとする。

2.2 カメラシステム

まずカメラシステムについて述べる。図2に示すように、カメラはピンホールカメラとみなし、レンズ中心をカメラ座標系の原点として画像面は光軸 (Z_c 軸)

に直交して、前方の焦点距離の位置に設置されているとする。光軸と画像面との交点を画像原点とし、 U 軸と X_c 軸、 V 軸と Y_c 軸は平行とする。図3aに示すように、カメラはシステムに固定の点（以後、回転中心と呼ぶ）を中心にして、自身の軸方向まわりに回転できる機構をもつ。本稿では回転は、全て軸の正方向からみて時計方向とする。焦点距離の変更は図4に示すように、撮像面はカメラシステムに対して不動のままレンズの Z_c 軸方向の移動によって行なわれ、その移動距離は測定できるものとする。撮像面は、論理的に長方形の撮像素子が配列の如く並べられているものとする。

カメラパラメータには、カメラシステムに固有のものとして撮像時に動的に変化するものの2種類がある。前者には画像中心（画像原点）と1画素の大きさ（撮像素子の横と縦の長さ）があり、後者には焦点距離（レンズ中心と撮像面との距離）、カメラの回転中心からレンズ中心へのベクトル、ワールド座標系に対する回転・平行移動がある。以下にいくつかのパラメータを定義する。なお、添字 i は第 i カメラ座標系におけるパラメータであることを指し、第 i カメラ座標系で撮像した画像を第 i 画像と呼ぶ。

s_x : 1画素あたりの X_c 軸方向の長さ (mm/pixel)

s_y : 1画素あたりの Y_c 軸方向の長さ (mm/pixel)

f_i : 焦点距離 (mm)

$f_{ix} = f_i / s_x$: X_c 軸方向の焦点距離 (pixel)

$f_{iy} = f_i / s_y$: Y_c 軸方向の焦点距離 (pixel)

$rat = s_y / s_x$: アスペクト比 (無単位)

t_i : カメラ回転中心から O_i へのベクトル (mm)

(以後第 i 回転変位ベクトルと呼ぶ)

T_i : O_w から O_i への平行移動ベクトル (mm)

システム固有のパラメータについては、 s_x と s_y は計算済みとし[1]、画像中心は測定済みとする[3]。

カメラ座標系と画像座標系は、点 $P = [X_c, Y_c, Z_c]$ が $p = [x_c, y_c, f_i] = \{u', v'\}$ に撮像されたとすると、(1) によって関係づけられる。ここで $[P]$ は $\langle P \rangle$ 、 $\langle P \rangle$ 、 $[P]$ のどれかを表す。

$$\begin{aligned} x_c &= f_i X_c / Z_c, & y_c &= f_i Y_c / Z_c, \\ u' &= x_c / s_x, & v' &= y_c / s_y \end{aligned} \quad (1)$$

2.3 第1カメラ座標系

認識などの作業対象となる注目すべき物体を撮像しているカメラ座標系を第1カメラ座標系と呼ぶ。第1カメラ座標系は図1に示すように、ワールド座標系から $T_1 = (T_x, T_y, T_z)$ 平行移動しており、 Y_1 軸、 X_1 軸、 Z_1 軸まわりに β ($-\pi \leq \beta < \pi$)、 α ($-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$)

、 γ ($-\pi \leq \gamma < \pi$) 回転している。この時、点P及びベクトルEは回転行列を R_{1w} 、平行移動行列を T_{1w} とすると (2) の関係を持つ。

$$(P) = \langle P \rangle R_{1w} T_{1w}, \quad (E) = \langle E \rangle R_{1w} \quad (2)$$

ここで、行列の具体的表現は下段に示す。

2. 4 第2カメラ座標系

第2カメラ座標系は、観測すべきワールド座標軸やそのワールド位置座標が既知の点(参照点と呼ぶ)が撮像できるように、回転中心を中心にして第1カメラ座標系を Y_1 まわりに ν 、 X_1 まわりに μ 回転したカメラ座標系である。これらの回転角は与えられるものとする(例えば自走ロボットでは、第1カメラ座標系とワールド座標系の間のおおよその関係は分かっており、 ν と μ を決めることができる)。焦点距離は不変である。

カメラ座標系原点と回転中心との位置関係は不変なので回転変位ベクトルの大きさは同じである、つまり $t_1 = \langle t_x, t_y, t_z \rangle$ の時 $t_2 = \langle t_x, t_y, t_z \rangle$ (図3b参照)。よって第1カメラ座標系と第2カメラ座標系とは回転行列を R_{m1} とすると (3) の関係にある。

$$\langle P \rangle T_{12} = \langle P \rangle T_{12} R_{m1}, \quad \langle E \rangle = \langle E \rangle R_{m1} \quad (3)$$

ここで、

$$T_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{m1} = \begin{pmatrix} \cos \nu & 0 & -\sin \nu & 0 \\ \sin \mu \sin \nu & \cos \mu & \sin \mu \cos \nu & 0 \\ \cos \mu \sin \nu & -\sin \mu & \cos \mu \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

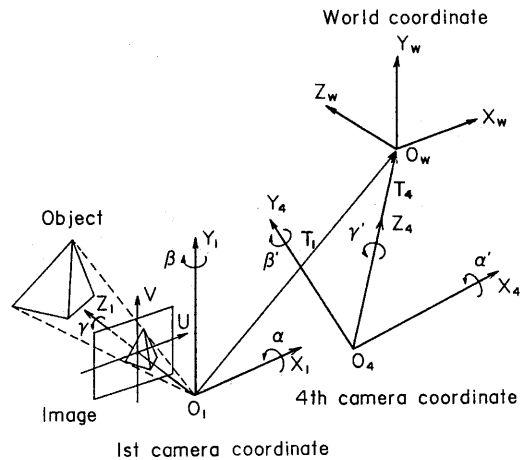


図1. 座標系の設定

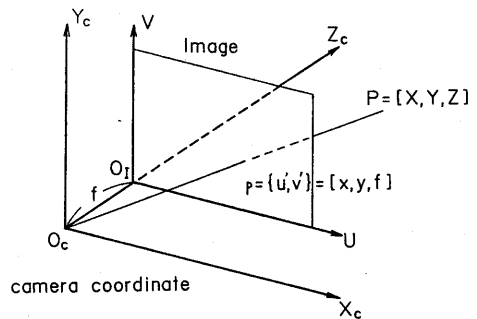
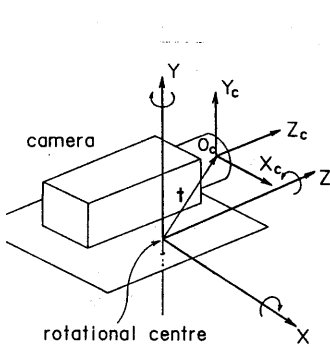
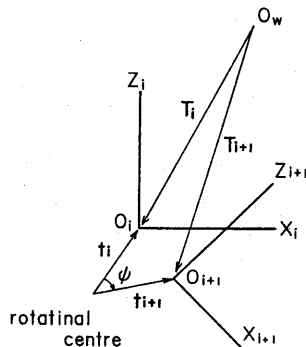


図2. 中心投影



a. 俯瞰図



b. Y軸まわりの回転

図3. カメラの回転

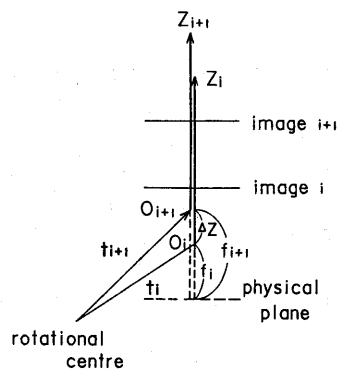


図4. 焦点距離の変更

$$T_{1w} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{1w} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & 0 \\ -\cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5 第3カメラ座標系

第3カメラ座標系は、第2カメラ座標系の姿勢を保ちつつ、観測すべきワールド座標軸や参照点に焦点をあわせた座標系である。これらの軸と点の像は画像理解手法やオペレータの指示によって同定できるものとする。

焦点距離を変更することはレンズ中心の Z_c 方向への平行移動のみだから、第2カメラ座標系の原点から第3カメラ座標系の原点へのベクトルを t_{23} ($=t_3-t_2$) とすると、 $t_{23} = \langle 0, 0, \Delta z \rangle = [0, 0, \Delta z]$ であり、2つの座標系の間には(4)の関係がある。

$$\langle P \rangle = [P] T_{32}, \quad \langle E \rangle = [E] \quad (4)$$

ここで、 $T_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta z & 1 \end{pmatrix}$

焦点距離は図4に示すように、 $f_3 = f_2 + \Delta z$ である。

2.6 第4カメラ座標系

ワールド座標系の原点が Z_4 軸上についているカメラ座標系を第4カメラ座標系と呼ぶ。第4カメラ座標系は、第3カメラ座標系を回転中心を中心にして、 Y_3 軸方向まわりに ϕ 、 X_3 軸方向まわりに θ 回転して得られたとする。焦点距離は第3カメラ座標系と同じ($f_4 = f_3$)である。

2.4と同様に、 $t_3 = [t_x', t_y', t_z']$ とすると、 $t_4 = [t_x'', t_y'', t_z'']$ である。すると、 $t_3 = t_2 + t_{23}$ の両辺を(4)を用いて第2または第3カメラ座標表現で表すと、回転変位ベクトルの要素には以下の関係が成り立つことが分かる。

$$t_x' = t_x, \quad t_y' = t_y, \quad t_z' = t_z + \Delta z \quad (5)$$

第3と第4のカメラ座標系間には(6)の関係がある。

$$[P] T_{34} = [P] T_{34} R_{43}, \quad [E] = [E] R_{43} \quad (6)$$

ここで、 $T_{34} = R_{43} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x' t_y' t_z' 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta & 0 \\ \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第4カメラ座標系とワールド座標系の間には(2)と同様の(7)の関係がある。

$$\langle P \rangle = [P] R_{4W} T_{4W}, \quad \langle E \rangle = [E] R_{4W} \quad (7)$$

ここで、 $T_4 = (T_x', T_y', T_z')$ とおく時、 T_{4W} は T_{1W} における T_x, T_y, T_z を T_x', T_y', T_z' に、 R_{4W} は R_{1W} における α, β, γ を α', β', γ' にそれぞれおきかえた行列である。

第1カメラ座標系の変数 $\alpha, \beta, \gamma, T_x, T_y, T_z, f_1$ (または f_{1x} か f_{1y}) が本稿で算出すべきパラメータであり、(1)~(7)の関係式を用いて解く。

3 カメラ固有パラメータ

レーザを用いて画像中心を正確に測定する方法もあるが[1]、図5に示すハードウェア構成により画像中心とアスペクト比を測定することができる[3]。

3.1 画像中心

画像原点が既知とすると、ターゲット上の1つの参照点の画像座標値の比は(1)より、

$$v'/u' = (1/rat)Y/X \quad (8)$$

なる関係にあるから、 X, Y が一定であれば f や Z によらず一定であり画像原点を通る直線である。つまり、 f 又は Z を変更して測定した参照点の画像軌跡は画像原点を通るので、複数の参照点の画像上の軌跡の交点が画像原点である。

3.2 アスペクト比

カメラに正対させたターゲット上の2つの参照点を P, Q 、それらの像を p, q とし、これらのカメラ及び画像座標値は以下のごとく与えられるとする。

$$P = [X_p, Y_p, Z], \quad Q = [X_q, Y_q, Z]$$

$$p = \{u_p', v_p'\}, \quad q = \{u_q', v_q'\} \quad (9)$$

この時の焦点距離を f とするとこれらの値には(1)より次ぎの関係が成り立つ。

$$u_p' = f_x X_p / Z, \quad v_p' = f_y Y_p / Z$$

$$u_q' = f_x X_q / Z, \quad v_q' = f_y Y_q / Z \quad (10)$$

(10)の上下の2式の差をとると、

$$u_p' - u_q' = f_x (X_p - X_q) / Z = f_x \Delta X / Z$$

$$v_p' - v_q' = f_y (Y_p - Y_q) / Z = f_y \Delta Y / Z \quad (11)$$

(11)の2式の比をとり整理することにより、

$$rat = \Delta Y (u_p' - u_q') / \Delta X (v_p' - v_q') \quad (12)$$

4 回転角の算出

4.1 第3画像による回転角の算出

画像上の直線 l_i とカメラ原点とでできる平面 Γ_i の法線ベクトル N_i は、 $l_i: a_i X + b_i Y + c_i = 0$ とカメラ座標表現されている時、 $N_i = [a_i, b_i, c_i / f_3]$ である(付録A参照)。つまり、カメラ座標軸上の単位ベクトルを E_x, E_y, E_z とおくと、

$$N_i = a_i E_x + b_i E_y + c_i / f_3 E_z \quad (13)$$

l_i が3D空間のベクトル L_i の像とすると、 L_i は Γ_i 上に存在するから、 $N_i \cdot L_i = 0$ 即ち、

$$a_i E_x \cdot L_i + b_i E_y \cdot L_i + c_i / f_3 E_z \cdot L_i = 0 \quad (14)$$

ここで、 L_i はワールド座標系の座標軸単位ベクトル($i=1, 3$)とすると、(L_i)は既知なので(14)より(E_x), (E_y), (E_z)に関する3つの式が得られ、焦点距離 f_3 が既知ならば解くことができる[2], [3]。しかし本

稿では変数としているので、第3画像からは (E_x) , (E_y) , (E_z) について解くことはできない。

4.2 第4画像による回転角の算出

第4画像では l_i ($i=1,3$) は画像原点を通過しているので、(14)は(15)の如く簡略化される。

$$a_i E_x \cdot L_i + b_i E_y \cdot L_i = 0 \quad (15)$$

すると付録Aより係数 a_i , b_i には変数は含まれないので、 $E_x = (E_{x1}, E_{x2}, E_{x3})$, $E_y = (E_{y1}, E_{y2}, E_{y3})$, $E_z = (E_{z1}, E_{z2}, E_{z3})$ とおくと、 $L_1 = (1, 0, 0)$, $L_2 = (0, 1, 0)$, $L_3 = (0, 0, 1)$ を代入することによって3つの線型式(16)がえられる。

$$a_i E_{xi} + b_i E_{yi} = 0 \quad (16)$$

ところで、 $E_x = [1, 0, 0]$, $E_y = [0, 1, 0]$, $E_z = [0, 0, 1]$ だから R_{4W} の左上 3×3 行列を $(R_{4W})_{3 \times 3}$ と表すと(7)より

$$(R_{4W})_{3 \times 3} = ((E_x)^T, (E_y)^T, (E_z)^T)^T \quad (17)$$

ここで、肩付き T は転置を表す。つまり $(R_{4W})_{3 \times 3}$ の1, 2, 3行がそれぞれ (E_x) , (E_y) , (E_z) である。

(16)と(17)より第4カメラ座標系のワールド座標系に対する回転角 α' , β' , γ' が一意に解ける(付録B)ので、 R_{4W} が一意に算出できる。すると、(2), (3), (4), (6)より $(E) = [E] R_{43} R_{mn} R_{1W}$ だから(7)との比較により、

$$R_{1W} = R_{mn}^{-1} R_{43}^{-1} R_{4W} \quad (18)$$

回転角 ϕ , ϕ , ψ , μ を代入することによって R_{1W} が一意に求まる。すると、 α の存在範囲が限定されているので、 R_{1W} の(3,2)要素より α が一意に決定し、 β , γ も順次一意に決定できる。

4.3 ϕ と ϕ の決定

焦点距離 f_3 が既知ならば、注目点の像が原点にくるような仮想的な画像を生成するための回転角は、注目点の画像座標値から算出できるので((19)に ϕ の算出法、また角度のとり方は異なるが文献[4])、本稿における第4カメラ座標系を用いなくても、つまり実際に回転しなくても仮想的に画像を生成することができ、4.2の結果が使える(ただし(19)や[4]における回転中心は原点であり、仮想画像座標系の原点は O_3 と一致しているので、 $t_3 = t_4 = 0$ である)。更に4.1で述べたように、 f_3 が既知ならば仮想画像を生成するまでもなく(14)を解くことができ、いずれにしても ϕ と ϕ の回転は不要である。しかし本稿では未知としているので、回転せざるをえない。

オペレータが介入できる場合には、ワールド座標系原点 O_w の像が V 軸上にくるまで Y_3 軸まわりにカメラを回転させる。次いで同様の作業を X_3 軸まわりで行なってワールド座標系原点を画像原点に一致させ、

この時のそれぞれの回転角 ϕ , ϕ を計測すればよい。

オペレータが介入できない場合には、次のようにして算出する。第3カメラ座標系からカメラを Y_3 軸まわりに $\Delta\phi_a$, $\Delta\phi_b$ と2度回転して撮像したそれぞれの画像における O_w の像の画像座標値を計測すれば、算出すべき角度 (O_w が V 軸上にくるまでの角度) ϕ は算出できる(付録C)。 ϕ についても同様に算出できる(付録D)が、 ϕ と同時に f_3 も算出できるので、 ϕ 回転した画像における O_w の画像座標値を $\{0, v'\}$ とすると、以下のごとく簡単に計算できる(ただし回転中心はカメラ座標系原点)。

$$\phi = \tan^{-1}(-v'/f_{3y}) \quad (19)$$

f_3 が算出できると、4.1で述べたように第4画像を生成するまでもなく第3画像を用いて最終目的のカメラ回転角は算出できるが、他の手段で ϕ を求めたために f_3 が未知の場合を考慮して、本稿では第4画像を生成することとする。

5 平行移動と焦点距離の算出

5.1 第4カメラ座標系の平行移動と焦点距離

第4画像内の参照点像を利用して、平行移動 T_4 を算出する。(7)の点に関する式より、

$$[P] = (P) T_{4W}^{-1} R_{4W}^{-1} \quad (20)$$

(T_4) を用いて右辺の行列を具体的に示すと、

$$T_{4W}^{-1} R_{4W}^{-1} = \begin{pmatrix} r_1^T & r_2^T & r_3^T & 0^T \\ -T_4 \cdot r_1 & -T_4 \cdot r_2 & -T_4 \cdot r_3 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、 r_i は $(R_{4W}^{-1})_{3 \times 3}$ の i 列を要素とするベクトル、 0 はゼロベクトル、肩付き T は転置を表す。

参照点 P の位置ベクトル X のワールド表現 (X) に対して、(20)と(1)より P の第4画像座標値 $\{u_4', v_4'\}$ に関する以下の関係式が得られる。

$$u_4' = f_{4x} X_c / Z_c$$

$$v_4' = f_{4y} Y_c / Z_c = (f_{4x} / \text{rat}) Y_c / Z_c$$

$$u_4 = u_4', \quad v_4 = v_4' \cdot \text{rat} \quad \text{とおいて上式を書き改めると、}$$

$$u_4 = f_{4x} (X \cdot r_1 - T_4 \cdot r_1) / (X \cdot r_3 - T_4 \cdot r_3)$$

$$v_4 = f_{4x} (X \cdot r_2 - T_4 \cdot r_2) / (X \cdot r_3 - T_4 \cdot r_3) \quad (21)$$

参照点としてワールド座標系の原点を採用すると、 $X = (0, 0, 0)$, $u_4 = 0$, $v_4 = 0$ だから

$$T_4 \cdot r_1 = 0, \quad T_4 \cdot r_2 = 0$$

であり、原点以外の参照点に対して(21)より、

$$\sqrt{u_4^2 + v_4^2} = f_{4x} (\sqrt{X_c^2 + Y_c^2}) / (X \cdot r_3 - T_4 \cdot r_3) \quad (22)$$

任意の参照点に対して $X_c = X \cdot r_1$ と $Y_c = X \cdot r_2$ は算出できるから、(22)は f_{4x} と $T_4 \cdot r_3$ に関する線型式であり、原点以外の2点の対応より算出できる。その結果、 $(T_4) R_{4W}^{-1} = (T_4 \cdot r_1, T_4 \cdot r_2, T_4 \cdot r_3, 1)$ より

$$(T_x', T_y', T_z', 1) = (0, 0, T_4 \cdot r_3, 1) R_{4W} \quad (23)$$

5. 2 第3カメラ座標系の平行移動

第3カメラ座標系の平行移動 T_3 は図3 bより、

$$T_3 = T_4 + (t_3 - t_4) \quad (24)$$

よって (t_3) , (t_4) を算出すればよい。(6) より

$$[P] = [P] T_{34} R_{43} T_{34}^{-1} \quad (25)$$

(25) の行列を $[t_3]$ を用いて具体的に示すと、

$$T_{34} R_{43} T_{34}^{-1} = \begin{pmatrix} r_1^T & r_2^T & r_3^T & 0^T \\ t_3 \cdot (r_1 - i_1) & t_3 \cdot (r_2 - i_2) & t_3 \cdot (r_3 - i_3) & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、 r_i は $(R_{43})_{3 \times 3}$ の、 i_i は 3×3 の単位行列 I の第 i 列を要素とするベクトルである。

参照点 P の第4カメラ座標表現を $[X]$ 、第3画像座標値を $\{u_3', v_3'\}$ とすると、(21) と同様に

$$u_3 = f_{3x} (X \cdot r_1 - t_3 \cdot (i_1 - r_1)) / (X \cdot r_3 - t_3 \cdot (i_3 - r_3))$$

$$v_3 = f_{3x} (X \cdot r_2 - t_3 \cdot (i_2 - r_2)) / (X \cdot r_3 - t_3 \cdot (i_3 - r_3)) \quad (26)$$

が得られるから2つの式の比をとると、

$$u_3 / v_3 = (X \cdot r_1 - t_3 \cdot (i_1 - r_1)) / (X \cdot r_2 - t_3 \cdot (i_2 - r_2)) \quad (27)$$

ところで (20) によって $[X]$ は計算できるので、上式は $t_3 \cdot (i_1 - r_1)$, $t_3 \cdot (i_2 - r_2)$ に関する線型式であり、2点の対応により解ける。この後 f_{3x} と $t_3 \cdot (i_3 - r_3)$ は (24) と同様の式で算出できる ($f_{3x} = f_{4x}$ を利用すれば、(26) のどちらかの式より $t_3 \cdot (i_3 - r_3)$ が算出できる)。すると、5.1 と同様にして $t_3 = [t_x', t_y', t_z']$ が算出でき、結果として $t_4 = [t_x', t_y', t_z']$ が算出できる。これらのワールド表現は (6), (7) より以下のように算出できる。

$$(t_4) = [t_4] R_{4w} \quad (28)$$

$$(t_3) = [t_3] R_{43}^{-1} R_{4w} \quad (29)$$

5. 3 第2カメラ座標系の平行移動と焦点距離

第2カメラ座標系の平行移動 T_2 は図4より、

$$T_2 = T_3 - t_{23} \quad (30)$$

よって、 (t_{23}) を算出すればよい。ここで Δz は計測されているので $[t_{23}]$ は既知であり、(29) による (t_3) と同様にして計算できる。

焦点距離については、 $f_2 = f_3 - \Delta z$ より容易に算出できる。

5. 4 第1カメラ座標系の平行移動

第1カメラ座標系の平行移動 T_1 は図3 bより、

$$T_1 = T_2 + (t_1 - t_2) \quad (31)$$

よって (t_1) , (t_2) を算出すればよい。

ところで $t_2 = t_3 - t_{23}$ であり、右辺のワールド表現は既に算出されているので、 (t_2) は計算できる。

t_2 の第2カメラ座標表現 $\{t_2\}$ は、(4), (6), (7) より導出される以下の式

$$\{E\} = \{E\} R_{4w}^{-1} R_{43} \quad (32)$$

を用いれば計算できるので、要素の大きさが同じである t_1 の第1カメラ座標表現 $\langle t_1 \rangle$ が定まる。よって (2) を用いて (t_1) を算出することができる。

6 実験結果

実験は、カメラは三洋社製の 2/3型 CCD 個体撮像素子使用の VC-D300、外部同期は ADS社製 PIP-4000 によって与えられるシステム構成の OGIS 社製 RFX-IV を用いて行なった。画像の縦横サイズは、480 X 512 である。

カメラ固有パラメータの計測には図5の構成を用い、その他の動的パラメータの計測には図6に示す構成を用いた。

6. 1 画像中心

図5に示すターゲット上の8点をレール上異なる3地点で撮影した。各点の軌跡を直線近似し、2本ずつの直線の交点を算出し、その平均を画像中心とした。そのうちの3本の直線の交点を以下に示す。値は画像の左上隅が (1, 1) である。

$$\text{交点1 } (u_1', v_1') : 282.6840, \quad 219.8456$$

$$\text{交点2 } (u_2', v_2') : 282.3361, \quad 219.4593$$

$$\text{交点3 } (u_3', v_3') : 282.0276, \quad 219.8225$$

$$\text{平均 } (u_c', v_c') : 282.3459, \quad 219.7091$$

(ここで図5の構成においては、カメラを正規の使用とは天地逆にしてしているので、正規の中心は $(512 - u_c', 480 - v_c')$ である。)

6. 2 アスペクト比

3地点において撮像した2点の観測値から、(12) により以下の結果を得た。

$$\text{画像1} : 0.939849 \quad \text{画像2} : 0.939991$$

$$\text{画像3} : 0.940780$$

$$\text{平均} : 0.940206$$

以下の実験では $\text{rat} = 0.94$ とする。

6. 3 回転・平行移動の算出と誤差解析

本稿における展開の本質的な部分を確認するために、第1、第2及び第3カメラ座標系が一致している状況を想定し実験を行なった。つまり、(3), (4) において

$$T_{12} = R_{nn} = T_{32} = I$$

とし、第4及び第3カメラ座標系のワールド座標系に対する回転と平行移動を求める実験を行なった。

実験に際してエッジや参照点(連結領域の中点)抽出の誤差を考慮し、図6に示すように市販(精度のよくない)の発砲スチロールの 20cm 立方体を使用した。立方体上に黒いラベルでマークし、その中心を参照点

としている。立方体のエッジ（参照点の2組から成る3本のベクトル (1,2), (3,1), (1,4)）をワールド座標軸として回転を算出し、22個の参照点のうちの2つを用いて平行移動を算出した。

第3から第4カメラ座標系への回転は、モニタを見ながら手動で行なった。従って第4画像におけるワールド原点 0_w の座標値 $\{u_0', v_0'\}$ は $\{0, 0\}$ ではないので、第4画像における参照点の観測値 $\{u', v'\}$ はあたかも $\{u' - u_0', v' - v_0'\}$ と観測されたとして回転の算出を行なっている。

算出された回転角、平行移動と焦点距離の値そのものの評価は難しいので、これらの値を使用した計算による参照点の画像座標値（図7～10における+印）と計測された座標値との差（単位は画素）を以下に示し、相対的評価とする。以下における平均誤差は、誤差画素数の絶対値の平均である（即ちずれの平均である）。更にこの実験を複数の参照点の組のそれぞれに対して行い、平均ずれ誤差の平均を算出した。実験は2回行なった。

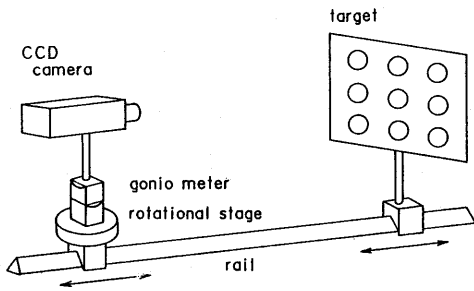


図5. 実験構成1

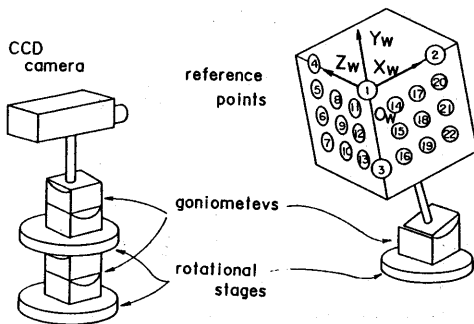


図6. 実験構成2

実験1:

$\phi = -1.25'$, $\phi = -1.50'$, 参照点の組 (14, 17)
 $\{u_0', v_0'\} = \{-4.103, 3.331\}$ に対して

第4画像（図7参照）

$\alpha' = 10.14'$, $\beta' = 39.85'$, $\gamma' = 1.29'$

$T_4 = (-1613.474, 448.988, -1932.000)$

$f_{4x} = 4150.030$

最大誤差 $\Delta u = -4.746$ (参照点 4)

$\Delta v = -7.219$ (参照点 3)

最小誤差 $\{0.0, 0.0\}$ (参照点 14 & 17)

平均ずれ誤差 $\{1.350, 2.900\}$ (全参照点)

第3画像（図8参照）

$\alpha = 11.94'$, $\beta = 41.34'$, $\gamma = 1.60'$

$T_3 = (-1613.010, 448.851, -1931.439)$

$f_{3x} = 3441.013$

最大誤差 $\Delta u = -3.482$ (参照点 4)

$\Delta v = -7.985$ (参照点 3)

最小誤差 $\{0.0, 0.0\}$ (参照点 14 & 17)

平均ずれ誤差 $\{0.969, 2.484\}$

参照点の組: (3, 4), (4, 8), (4, 11), (4, 12)

, (8, 12), (8, 14), (8, 17), (11, 17), (14, 17)

の9組における全参照点のずれ平均

第4画像における平均ずれ誤差 $\{3.065, 2.301\}$

第3画像における平均ずれ誤差 $\{2.297, 2.361\}$

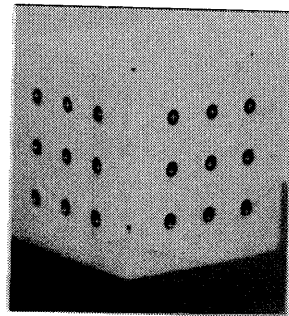


図7. 第4画像（実験1）

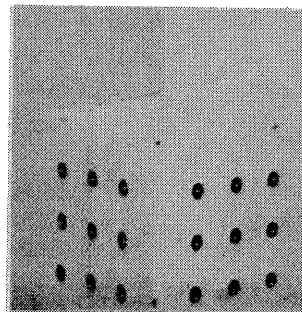


図8. 第3画像（実験1）

実験 2 :

$\phi = -1.20'$, $\phi' = -1.50'$, 参照点の組 (4, 14)

$\{u_a', v_a'\} = \{-3.758, 4.561\}$ に対して

第 4 画像 (図 9 参照)

$\alpha' = 10.24'$, $\beta' = 39.31'$, $\gamma' = 0.53'$

$T_4 = (-1408.029, 401.650, -1718.802)$

$f_{4x} = 3608.869$

最大誤差 $\Delta u = 2.358$ (参照点 5)

$\Delta v = -4.070$ (参照点 3)

最小誤差 $\{0.0, 0.0\}$ (参照点 4 & 14)

平均ずれ誤差 $\{1.276, 1.501\}$ (全参照点)

第 3 画像 (図 10, 図 11 参照)

$\alpha = 12.06'$, $\beta = 40.69'$, $\gamma = 0.82'$

$T_3 = (-1408.442, 401.791, -1719.288)$

$f_{3x} = 4264.787$

最大誤差 $\Delta u = 2.727$ (参照点 13)

$\Delta v = -3.592$ (参照点 3)

最小誤差 $\{0.0, 0.0\}$ (参照点 14 & 4)

平均ずれ誤差 $\{1.375, 1.583\}$ (全参照点)

参照点の組: (2, 4), (3, 4), (3, 8), (3, 12)

, (4, 8), (4, 11), (4, 12), (4, 14)

の 8 組における全参照点のずれ平均

第 4 画像における平均ずれ誤差 $\{1.840, 1.275\}$

第 3 画像における平均ずれ誤差 $\{2.006, 1.251\}$

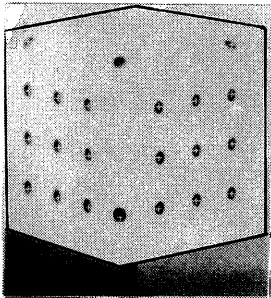


図 9. 第 4 画像 (実験 2)

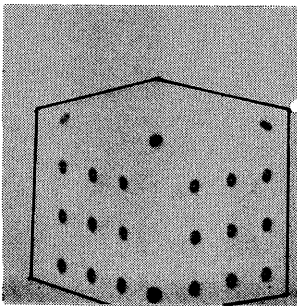


図 10. 第 3 画像 (実験 2)

7 あとがき

移動ロボットに搭載されたカメラのキャリブレーション手法について述べた。動的パラメータの算出には専用の物体でなく、部屋の隅や建物の角を利用する。回転を算出するための直線データは 1 組しかないため、専用の物体を用いて多数の直線を利用できる手法 [1] では 1 画素以下の精度がえられており、これに比べると精度は落ちるが平均して 2 画素程度であり、実用には充分耐えうると思われる。

謝辞

本研究を実施するに際し、有益な討論と貴重な助言を頂いた大阪大学の八木助手と IBM 東京基礎研究所の越後氏、実験に協力して頂いた堺 SCC の山上氏、機会を与えて頂いた当研究所の淀川社長と上野室長並びに光学実験に助言を頂いた加藤主任研究員の方々に感謝します。

参考文献

- [1] T. Echigo, "A camera calibration technique using three sets of parallel lines," Machine Vision and Applications, 3, pp.159-167, 1990.
- [2] 笠井, 他, "ポジションセンサを用いた三次限運動計測システム," 計測自動制御, 19-12, pp.997-1003, 1983.
- [3] 八木, 深田, "三次元物体認識のためのカメラキャリブレーション," 三菱電機研究報告, ORR86-146, pp.1-25, 1986.
- [4] T. Shakunaga and H. Kaneko, "Perspective angle transform: principle of shape from angles," Computer Vision, 3, pp.239-254, 1989.

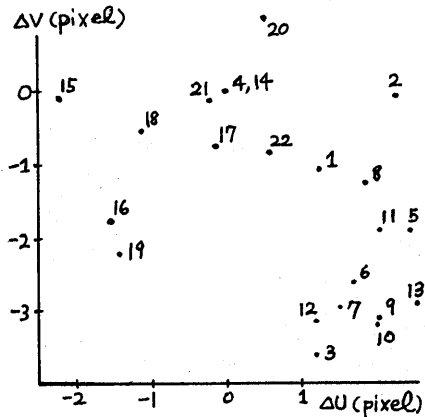


図 11. 誤差 (実験 2 の第 3 画像)

付録A：画像座標表現とカメラ座標表現

A1) 直線

画像上の直線1が $a'U + b'V + c' = 0$ と画像座標表現される時、1の切片を p, q とすると、(1)より

$$p = \{-c'/a', 0\} = [-s_x c'/a', 0, f_i]$$

$$q = \{0, -c'/b'\} = [0, -s_y c'/b', f_i]$$

よって、1は以下の式でカメラ座標表現される。

$$ax + by + c = 0$$

ここで、 $a = a'rat$, $b = b'$, $c = s_y c'$

A2) ベクトル

画像上のベクトルを p とすると、

$$p = \{a', b'\} = [s_x a', s_y b', 0] = s_x [a', b', rat, 0]$$

より、 p の方向ベクトルは $[a, b, 0]$ と表現できる。

ここで、 $a = a'$, $b = b'rat$

A3) 法線ベクトル

1: $aX + bY + c = 0$ の画像切片へのカメラ原点からのベクトル p, q は

$$p = [-c/a, 0, f_i], \quad q = [0, -c/b, f_i]$$

よって、1とカメラ原点とでできる平面 Γ の法線ベクトル N は p と q のベクトル積より、

$$N = p \times q = [a, b, c/f_i]$$

付録B：第4画像による回転角の算出

(17) を用いて (16) を具体的に書き示すと、

$$a_1 (\cos \beta' \cos \gamma' + \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma') + b_1 (-\cos \beta' \sin \gamma' + \sin \alpha' \sin \beta' \cos \gamma') = 0 \quad (B1)$$

$$a_2 (\cos \alpha' \sin \gamma') + b_2 (\cos \alpha' \cos \gamma') = 0 \quad (B2)$$

$$a_3 (-\sin \beta' \cos \gamma' + \sin \alpha' \cos \beta' \sin \gamma') + b_3 (\sin \beta' \sin \gamma' + \sin \alpha' \cos \beta' \cos \gamma') = 0 \quad (B3)$$

(B2) より、

$$\tan \gamma' = -b_2/a_2 \quad (B4)$$

(B1) と (B3) をそれぞれ $(\cos \beta' \cos \gamma')$ で割った式に (B4) を代入してえられる2つの式を解くと、

$$\tan \beta' = \pm \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)(a_2 b_3 - a_3 b_2)}{\sqrt{(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 b_2 - a_2 b_1)}} \quad (B5)$$

$$\sin \alpha' = \tan \beta' (a_2 a_3 + b_2 b_3) / (a_2 b_3 - a_3 b_2) \quad (B6)$$

ところで $-\pi/2 \leq \alpha' \leq \pi/2$, $-\pi \leq \beta' < \pi$, $-\pi \leq \gamma' < \pi$ だから、 γ' は γ_0 と $\gamma_0 - \pi$ の2意解、 β' は β_0 , $\beta_0 - \pi$, $-\beta_0$, $-\beta_0 + \pi$ の4意解、 α' は β' の前二者に対する α_0 と後二者に対する $-\alpha_0$ の2意解。その結果、回転角は以下の8意解となる。

$$\begin{aligned} A1 &= (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) & A2 &= (\alpha_0, \beta_0 - \pi, \gamma_0) \\ A3 &= (-\alpha_0, -\beta_0, \gamma_0) & A4 &= (-\alpha_0, -\beta_0 + \pi, \gamma_0) \\ A5 &= (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \pi) & A6 &= (\alpha_0, \beta_0 - \pi, \gamma_0 - \pi) \\ A7 &= (-\alpha_0, -\beta_0, \gamma_0 - \pi) & A8 &= (-\alpha_0, -\beta_0 + \pi, \gamma_0 - \pi) \end{aligned}$$

次に解の多義性の解消について述べる。ベクトル E の第4画像における像の向き、即ち符号は $[E]$ の第1要素 X_4 と第2要素 Y_4 の符号によってきまる。ところで(7)より $[E] = (E) R_{4W}^{-1}$ だから、ワールド座標軸ベクトル ($i=1, 3$) の像の向きは R_{4W}^{-1} の1~3行の最初の2要素の組によって決まる。よって8意解の各々による回転行列を計算し、所定の要素の符号があう解を選択すればよい。

解の一意性は以下のごとく保証される。 $A1 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ による R_{4W}^{-1} の (i, j) 要素を r_{ij} とおく。すると8意解による (i, j) 要素はそれぞれ、

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_{11} & -r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ -r_{31} & -r_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ -r_{31} & -r_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_{11} & -r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -r_{12} & -r_{12} \\ -r_{21} & -r_{22} \\ -r_{31} & -r_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_{11} & -r_{12} \\ -r_{21} & -r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ -r_{21} & -r_{22} \\ -r_{31} & -r_{32} \end{pmatrix}$$

故にどの2つの解をとっても一致するものはないので、像の符号とあうものは1つしかない。

付録C：回転角 ϕ の算出

第3カメラ座標系を、回転中心を中心にして Y_3 まわりに $\Delta \phi_A$ 回転した座標系での点の表記を「P」、変位行列を T_{3A} 、回転行列を R_{A3} とすると、2つの座標系の関係は (6) と同型の (C1) で表現できる。

$$[P] = [P] T_{3A} R_{A3}^{-1} T_{3A}^{-1} \quad (C1)$$

ここで、

$$T_{3A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x' & 0 & t_z' & 1 \end{pmatrix} \quad R_{A3} = \begin{pmatrix} \cos \Delta \phi_A & 0 & -\sin \Delta \phi_A & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \Delta \phi_A & 0 & \cos \Delta \phi_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(C1)の行列を $t_A = [t_x', 0, t_z']$ を用いて具体的に示すと、

$$T_{3A} R_{A3}^{-1} T_{3A}^{-1} = \begin{pmatrix} r_1^T & r_2^T & r_3^T & 0^T \\ t_A \cdot (r_1 - i_1) & 0 & t_A \cdot (r_3 - i_3) & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、 r_i は $(R_{A3}^{-1})_{3 \times 3}$ の、 i_i は 3×3 の単位行列 I の第 i 列を要素とするベクトルである。0 はゼロベクトルである。

参照点とその像の座標値を $[X_3, Y_3, Z_3]$, $\{u_3', v_3'\}$ 及び $[X_A, Y_A, Z_A]$, $\{u_A', v_A'\}$ と表すと (1) より、

$$u_3 = f_3 X_3 / Z_3, \quad v_3 = f_3 Y_3 / Z_3 \quad (C2)$$

$$u_A = f_3 X_A / Z_A, \quad v_A = f_3 Y_A / Z_A \quad (C3)$$

ここで、 $u_3 = u_3'$, $u_A = u_A'$, $v_3 = v_3'rat$, $v_A = v_A'rat$

ところで、 $X = [X_3, Y_3, Z_3]$ とおき (C1) を展開すると、

$$\begin{aligned} X_A &= X \cdot r_1 + t_A \cdot (r_1 - i_1), & Y_A &= Y_3, \\ Z_A &= X \cdot r_3 + t_A \cdot (r_3 - i_3) \end{aligned} \quad (C4)$$

(C2)における2つの式の比をとると、

$$X_3/Y_3 = u_3/v_3 \quad (C5)$$

(C3) における2つの式の比をとり (C4) を代入して整理すると、

$$(1-\cos\Delta\phi_A) t_x'/Y_3 + (t_z'/Y_3+Z_3/Y_3) \sin\Delta\phi_A \\ = \cos\Delta\phi_A u_3/v_3 - u_A/v_A \quad (C6)$$

(C6) は変数 t_x'/Y_3 と $t_z'/Y_3+Z_3/Y_3$ の線型式だから参照点の2回の観測 (A, B) により解ける。

$$(t_x'/Y_3, t_z'/Y_3+Z_3/Y_3) = (a, b) R_{AB}^{-1} \quad (C7)$$

$$\text{ここで、} R_{AB} = \begin{pmatrix} 1-\cos\Delta\phi_A & 1-\cos\Delta\phi_B \\ \sin\Delta\phi_A & \sin\Delta\phi_B \end{pmatrix}$$

$$a = \cos\Delta\phi_A u_3/v_3 - u_A/v_A$$

$$b = \cos\Delta\phi_B u_3/v_3 - u_B/v_B$$

更に、(C3) の後者に (C4) を代入して整理すると、

$$f_{3x}/v_A = (X_3/Y_3+t_x'/Y_3) \sin\Delta\phi_A \\ + (t_z'/Y_3+Z_3/Y_3) \cos\Delta\phi_A - t_z'/Y_3 \quad (C8)$$

(C8) は変数 f_{3x} と t_z'/Y_3 の線型式だから参照点の2回の観測 (A, B) により f_{3x} は以下の如く解ける。

$$(1/v_A-1/v_B) f_{3x} \\ = (X_3/Y_3+t_x'/Y_3) (\sin\Delta\phi_A-\sin\Delta\phi_B) \\ + (t_z'/Y_3+Z_3/Y_3) (\cos\Delta\phi_A-\cos\Delta\phi_B) \quad (C9)$$

以上の議論は任意の参照点について成り立つが、ここでは 0_w の像を原点にもっていききたいので、以下では参照点として 0_w を考える。

0_w の像が V 軸上にあるまでの角度を ϕ とすると、 R_{A3} における角度を $\Delta\phi_A$ から ϕ に変えた行列に対して (C1) が成り立ち、 $u_A=0$ より $X_A=0$ を展開すると、

$$X_3 \cos\phi - Z_3 \sin\phi + t_x' (\cos\phi - 1) - t_z' \sin\phi = 0$$

上式は $T=\tan\phi$ を変数とする以下に示す2次式となるので、 ϕ ($-\pi \leq \phi < \pi$) としては4意解 (正解が2、負解が2) がえられる。正負の判定は 0_w の第3画像座標値 u_3' の符号と同じである。残る2意解の判定は、実際に回転してみても像が V 軸上にある方を選択すればよい。

$$AT^2 + BT + C = 0 \quad (C10)$$

$$\text{ここで、} A = \{ (Z_3/Y_3+t_z'/Y_3)^2 - (t_x'/Y_3)^2 \} \\ B = -2 (X_3/Y_3+t_x'/Y_3) (Z_3/Y_3+t_z'/Y_3) \\ C = \{ (X_3/Y_3+t_x'/Y_3)^2 - (t_x'/Y_3)^2 \}$$

付録D：回転角 ϕ の算出

ϕ についても ϕ と同様に決定できる。 0_w の像が V 軸上にくるまで ϕ だけ回転した座標系での点の表記を「P」、この座標系から X 軸まわりに $\Delta\phi_c$ 回転した座標系の表記を「P」とする。変位行列を T_{nc} 、回転行列を R_{cn} とすると、2つの座標系の関係は (6) と同型の (D1) で表現できる。

$$\text{『P』} = \text{『P』} T_{nc} R_{cn}^{-1} T_{nc}^{-1} \quad (D1)$$

ここで、

$$T_{nc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t_y' t_z' & 1 & 1 \end{pmatrix} R_{cn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Delta\phi_c & \sin\Delta\phi_c & 0 \\ 0 & -\sin\Delta\phi_c & \cos\Delta\phi_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(D1) の行列を $t_n = \{0, t_y', t_z'\}$ を用いて具体的に示すと、

$$T_{nc} R_{cn}^{-1} T_{nc}^{-1} = \begin{pmatrix} r_1^T & r_2^T & r_3^T & 0^T \\ 0 & t_n \cdot (r_2 - i_2) & t_n \cdot (r_3 - i_3) & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、 r_i は $(R_{cn}^{-1})_{3 \times 3}$ の、 i_i は 3×3 の単位行列 I の第 i 列を要素とするベクトルである。0 はゼロベクトルである。

0_w とその像の座標値を「 X_M, Y_M, Z_M 」、 $\{0, v_n'\}$ 及び「 X_c, Y_c, Z_c 」、 $\{0, v_c'\}$ と表すと (1) より

$$X_M = 0, \quad v_n = f_{3x} Y_M / Z_M \quad (D2)$$

$$v_c = f_{3x} Y_c / Z_c \quad (D3)$$

ここで、 $v_n = v_n' \text{rat}$, $v_c = v_c' \text{rat}$

(D1) を展開し Z_M で割ると、

$$Y_c/Z_M = \cos\Delta\phi_c Y_M/Z_M + \sin\Delta\phi_c \\ - (1-\cos\Delta\phi_c) t_y'/Z_M + \sin\Delta\phi_c t_z'/Z_M$$

$$Z_c/Z_M = -\sin\Delta\phi_c Y_M/Z_M + \cos\Delta\phi_c \\ - \sin\Delta\phi_c t_y'/Z_M - (1-\cos\Delta\phi_c) t_z'/Z_M$$

これらを (D3) に代入すると、(C9) と (D2) より f_{3x} と Y_M/Z_M は既に算出されているので、 t_y'/Z_M と t_z'/Z_M に関する線型式が1つ求まる。よって2回の観測 (C, D) により解ける。

$$(t_y'/Z_M, t_z'/Z_M) = (c, d) R_{cd}^{-1} \quad (D4)$$

ここで、

$$R_{cd} (1, 1) = f_{3x} (1-\cos\Delta\phi_c) - v_c \sin\Delta\phi_c$$

$$R_{cd} (1, 2) = f_{3x} (1-\cos\Delta\phi_D) - v_D \sin\Delta\phi_D$$

$$R_{cd} (2, 1) = -f_{3x} \sin\Delta\phi_c - v_c (1-\cos\Delta\phi_c)$$

$$R_{cd} (2, 2) = -f_{3x} \sin\Delta\phi_D - v_D (1-\cos\Delta\phi_D)$$

$$c = f_{3x} (\cos\Delta\phi_c Y_M/Z_M + \sin\Delta\phi_c) \\ + v_c (\sin\Delta\phi_c Y_M/Z_M - \cos\Delta\phi_c)$$

$$d = f_{3x} (\cos\Delta\phi_D Y_M/Z_M + \sin\Delta\phi_D) \\ + v_D (\sin\Delta\phi_D Y_M/Z_M - \cos\Delta\phi_D)$$

0_w の像が原点に一致するまでの角度を ϕ とすると、 R_{cn} における角度を $\Delta\phi_c$ から ϕ に変えた行列に対して、(D1) における「P」を「P」におきかえた式が成り立ち、 $v_c=0$ より $Y_c=0$ を展開すると、

$$\cos\phi Y_M + \sin\phi Z_M - (1-\cos\phi) t_y' + \sin\phi t_z' = 0$$

上式は $T=\tan\phi$ を変数とする以下に示す2次式となるので、 ϕ ($-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$) としては正解と負解の2意解がえられる。正負の判定は v_n' の符号と反対である。

$$AT^2 + BT + C = 0 \quad (D5)$$

$$\text{ここで、} A = \{ (1+t_y'/Z_M)^2 - (t_y'/Z_M)^2 \}$$

$$B = 2 (1+t_y'/Z_M) (Y_M/Z_M + t_y'/Z_M)$$

$$C = \{ (Y_M/Z_M + t_y'/Z_M)^2 - (t_y'/Z_M)^2 \}$$